教材习题解答

第1章 集合

1.1 集合的含义及其表示

教材课后习题答案

练习(P7)

1. 列举法就是将集合的元素一一列举出来.

(1)本集合的元素都必须满足 $x+1=0$,即为该方程的解. 因为只有 $x=-1$ 适合它,所以此集合用列举法表示为$\{-1\}$.

(2)本集合是由12的所有正约数组成的. 而12的正约数是1,2,3,4,6,12,故答案应为$\{1,2,3,4,6,12\}$.

(3)由于不大于10的正偶数是2,4,6,8,10这五个数,故该集合用列举法表示为$\{2,4,6,8,10\}$.

(4)由于不超过5的自然数是0,1,2,3,4,5这6个数,故答案应为$\{0,1,2,3,4,5\}$.

2. 描述法的关键是把集合元素的专属属性借助语言或符号描述出来,还要注意形式上的要求:$\{x|p(x)\}$.

(1)$\{x|x$是奇数$\}$,也可以写成$\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$.

(2)$\{x|x$是正偶数$\}$,也可以写成$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(3)由于不等式 $x^2+1\leqslant0$ 的解都是集合的元素,故该集合用描述法表示为$\{x|x^2+1\leqslant0,x\in\mathbf{R}\}$.

(4)$\{(x,y)|(x,y)$为平面直角坐标系中第二象限的点$\}$,也可以写成$\{(x,y)|x<0,y>0,x,y\in\mathbf{R}\}$.

3. (1)$\in$ $\notin$ $\in$ $\notin$ $\in$ $\in$ $\in$ $\in$

(2)$\in$ $\notin$ (3)$\in$ $\notin$ (4)$\notin$ $\notin$

4. (1)满足条件 $0\leqslant a<5$ 的自然数 $a=0,1,2,3,4$,故该集合用列举法表示为$\{0,1,2,3,4\}$.

(2)由题意,知 x 的可能取值为0,1,2,y 的可能取值为0,1,所以(x,y)的取值是(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),于是该集合用列举法表示为$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$.

(3)列举此集合中的元素时要注意元素的"互异性",单词中 m,a,t 都出现了两次,但列举时只能出现一次,所以该集合用列举法表示为$\{m,a,t,h,e,i,c,s\}$.

5. 由 $M=N$ 得$\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

所以 $a=1$ 或 2,$b=2$ 或 1.

1.2 子集、全集、补集

教材课上思考答案

思考(P8)

$A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 是可以同时成立的. 成立的条件是 $A=B$.

思考(P9)

A、B 两个集合没有公共元素,且它们的元素合在一起恰好是集合 S 的全部元素.

教材课后习题答案

练习(P9)

1. (1)集合$\{1\}$的所有子集为$\varnothing$,$\{1\}$;

(2)集合$\{1,2\}$的所有子集为$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$.

(3)集合$\{1,2,3\}$的所有子集为$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$

2. (1)由 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{0,2,4,6\}$,所以$\complement_U A=\{1,3,5\}$;

(2)由 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,所以$\complement_U A=\varnothing$;

(3)由 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,$A=\varnothing$,所以$\complement_U A=\{0,1,2,3,4,5,6\}=U$.

3. $\complement_U A$ 是由集合 U 中不属于 A 的元素组成的集合,它与 A 没有公共元素,但$\complement_U A$ 中的元素与 A 中的元素合在一起恰好是 U 中的所有元素,也可以理解为把 U 一分为二,一部分是 A,另一部分是$\complement_U A$. 那么 U 中的元素就一定属于也只能属于 A 或$\complement_U A$ 中的一个集合.

依照补集的含义,$\complement_U A$ 在 U 中的补集(即$\complement_U(\complement_U A)$)中的元素应是 U 中不属于$\complement_U A$ 的元素,显然应是属于 A 的元素,所以$\complement_U(\complement_U A)=A$.

4. (1)×."$\subseteq$"表示一个集合是另一个集合的子集,是表示两个集合间的包含关系的,而 a 与$\{a\}$一个是元素,一个是集合,由于 a 是$\{a\}$中的元素,所以正确的表示是 $a\in\{a\}$.

(2)×."$\in$"表示元素与集合的从属关系,而两个集合间的关系应借助"$\subseteq$""$\not\subseteq$"等描述. 由于$\{a\}$是$\{a,b\}$的子集,所以正确的表示是$\{a\}\subseteq\{a,b\}$.

(3)√. 两个集合中虽然元素的顺序不同,但由无序性可知并不影响两集合的关系,利用子集的定义可判定$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$. 事实上,$\{b,a\}\subseteq\{a,b\}$,且$\{a,b\}=\{b,a\}$.

(4)√. $\{-1,1\}$中的每一个元素都是$\{-1,0,1\}$中的元素,但$\{-1,0,1\}$中的元素0却不是$\{-1,1\}$中的元素,根据真子集的定义得$\{-1,1\}\subsetneqq\{-1,0,1\}$.

(5)×. 空集中没有元素.

(6)×. 集合$\{0\}$中有一个元素0,而空集中没有

元素.

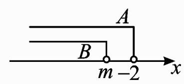
(7)√. 空集是任何集合的子集.

(8)√. 空集是任何非空集合的真子集.

5. A 是偶数集，B 是奇数集，奇数和偶数合在一起统称为整数，所以 A 与 B 没有公共元素，但它们的元素合在一起恰好是 U 的全体元素，于是 U 中的任一个元素，必定属于且只能属于 A 或 B 中的一个集合，从而 $\complement_U A=B$，$\complement_U B=A$.

6. 由 $B\subseteq A$.

$\therefore m\leqslant -2$.



答图 1

习题 1.2(P10)

1. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$.

2. (1)由于 $-1\in\mathbf{Z}$，$1\in\mathbf{Z}$，故 $\{-1,1\}\subseteq\mathbf{Z}$，但 $5\in\mathbf{Z}$，且 $5\notin\{-1,1\}$，知 $\{-1,1\}\subsetneqq\mathbf{Z}$，即 $A\subsetneqq B$.

(2) $B=\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$，由于 $-1\in A$，$1\in A$，

$\therefore B\subseteq A$. 又 $0\in A$，$0\notin B$，$\therefore B\subsetneqq A$.

(3) 15 的正约数是 1，3，5，15，从而 $B=A$.

(4)由 $0\in\mathbf{N}=B$，$0\notin A$. $\therefore A\subsetneqq B$.

3. $\because U=\{x|x$ 是至少有一组对边平行的四边形$\}=\{x|x$ 是只有一组对边平行的四边形或是两组对边都平行的四边形$\}=\{x|x$ 是梯形或平行四边形$\}$，$\therefore \complement_U A=\{x|x$ 是梯形$\}$.

4. (1)利用补集的定义得 $\complement_U A=\{2,4\}$.

(2)由于 $U=A$，所以 $\complement_U A=\varnothing$.

(3)利用补集的定义得 $\complement_U A=\{x|x<2\}$.

(4)利用补集的定义得 $\complement_U A=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 2\}$.

5. 由于集合中的元素必须满足互异性，

所以 $\begin{cases}x+2\neq 0,\\x+2\neq 1,\end{cases}$ 解得 $x\neq -2$ 且 $x\neq -1$.

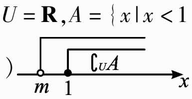
6. B 的所有子集为 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{0,2\}$，$\{0,4\}$，$\{2,4\}$，$\{0,2,4\}$，

C 的所有子集为 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{6\}$，$\{0,2\}$，$\{0,6\}$，$\{2,6\}$，$\{0,2,6\}$，

又 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，

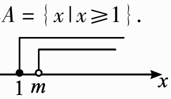
$\therefore A$ 满足的集合有：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{0,2\}$.

7. $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x<1\}$，得 $\complement_U A=\{x|x\geqslant 1\}$.

(1) 

答图 2

故 $m<1$.

(2) 

答图 3

故 $m\geqslant 1$.

8. 数学家的话是说“网中的鱼虾构成了一个集合”，进一步说，“水中的鱼虾也可以构成一个集合，并且网中的鱼虾构成的集合是水中的鱼虾构成的集合的真子集”.

通过本例，不难发现许多抽象、不易理解的知识，若与实际生活联系起来，其寓意自然展现出来，这正是数学的应用之美.

1.3　交集、并集

教材课上思考答案

思考(P11)

$A\cap B=A$ 可能成立，成立的条件是 $A\subseteq B$；$A\cap B=\varnothing$ 可能成立，如 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4,5\}$

思考(P12)

$A\cup B=A$ 可能成立，成立的条件是 $B\subseteq A$；$A\cup\complement_U A=U$.

教材课后习题答案

练习(P13)

1. $A=\{2,4,6\}$，$B=\{-2,0,2,4\}$，所以 $A\cap B=\{2,4\}$，$A\cup B=\{-2,0,2,4,6\}$.

2. 利用子集、交集、并集、补集及空集的相关知识得 $A\cap A=A$，$A\cup A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.

3. 利用交集，并集的运算求解.

(1) $A\cap B=\{-1,0\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4\}$.

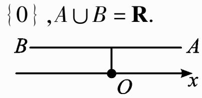
(2) $A\cap B=\{-1,0,1\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$.

(3) $A\cap B=A$，$A\cup B=A$.

(4) $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=A$.

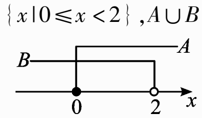
4. 借助数轴可观察出：

(1) $A\cap B=\{0\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.



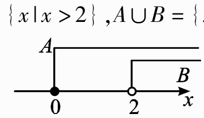
答图 4

(2) $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.



答图 5

(3) $A\cap B=\{x|x>2\}$，$A\cup B=\{x|x\geqslant 0\}$.



答图 6

5. 联立 $\begin{cases}y=-4x+6,\\y=5x-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

$\therefore A\cap B=\{(x,y)\mid y=-4x+6$，且 $y=5x-3\}=\{(x,y)|x=1,y=2\}$(或 $\{(1,2)\}$).

6. A 是奇数集，B 是偶数集.

所以 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\mathbf{Z}$.

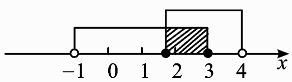
习题 1.3(P13)

1. 解析：

$\cap$	$\varnothing$	A	B	$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	A	B
A	$\varnothing$	A	$A\cap B$	A	A	A	$A\cup B$
B	$\varnothing$	$B\cap A$	B	B	B	$B\cup A$	B

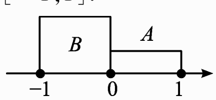
$\cap$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$	$\cup$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A	A	A	U
$\complement_U A$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\complement_U A$	$\complement_U A$	$\complement_U A$	U	$\complement_U A$

2. 利用数轴表示出区间$(-1,3]$和$[2,4)$(如答图7)，观察得公共部分为$[2,3]$，故$A\cap B=[2,3]$.



答图 7

3. 利用数轴表示出区间$[0,1]$和$[-1,0]$，如答图8，得$A\cup B=[-1,1]$.



答图 8

4. (1)由于B中的每一个元素都是A中的元素，所以$B\subseteq A$成立.

但A中的元素1,3,5,7都不是B中的元素，所以$A\subseteq B$不成立.

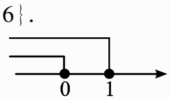
(2)由于$B\subseteq A$，所以$A\cap B=B$，$A\cup B=A$.

5. 因为$B\cap C=\{1\}$，所以$A\cap(B\cap C)=\{1\}$，

因为$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，

所以$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$.

6. 由答图9可知，$A\cap B=\{x|x\leqslant 0\}$. 得$A\subsetneqq B$.



答图 9

7. (1)由$PA=PB$知点P满足条件“到两定点A和B的距离相等”，故点P为线段AB的垂直平分线上的点，所以集合$\{P|PA=PB\}$表示的图形是线段AB的垂直平分线.

(2)由$PO=1$知点P到定点O的距离为定长1，故点P在以O为圆心，1为半径的圆上，所以集合$\{P|PO=1\}$表示的图形为圆.

8. 第一次进的货物构成集合$A=\{$圆珠笔，钢笔，铅笔，笔记本，方便面，火腿肠$\}$，第二次进的货物构成集合$B=\{$铅笔，方便面，汽水，火腿肠$\}$. 所以两次进的货构成的集合为$A\cup B=\{$圆珠笔，钢笔，铅笔，笔记本，方便面，汽水，火腿肠$\}$.

9. (1)$(\complement_U A)\cap B$；(2)$A\cap B\cap C$.

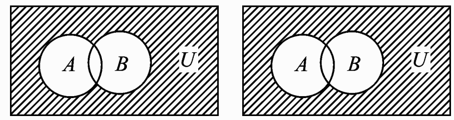
10. (1)由已知，得$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，

所以$\complement_U(A\cup B)=\{6\}$.

因为$\complement_U A=\{1,4,6\}$，$\complement_U B=\{2,3,5,6\}$.

所以$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6\}$.

(2)所画阴影如答图10：



$\complement_U(A\cup B)$　　$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

答图 10

(3)我们可以推出一个结论：

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，

另外还有$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，

其实，这就是著名的 De Morgan 定律.

11. $A\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}$，$A\cup B=\{x|1\leqslant x<4\}$，$\complement_U B=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}$，$\therefore A\cup\complement_U B=\{x|x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$.

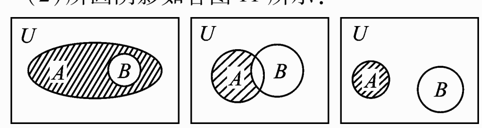
12. 当$2m-1=-3$，即$m=-1$时，$A=\{0,-3\}$，$B=\{-3,-4\}$满足$A\cap B=\{-3\}$.

当$m-3=-3$时，即$m=0$时，$A=\{1,-3\}$，$B=\{-1,-3\}$满足$A\cap B=\{-3\}$.

综上所述$m=-1$或0.

13. (1)$S-A=\complement_S A=\{$高一(1)班全体男同学$\}$.

(2)所画阴影如答图11所示：



答图 11

(3)$A-B=\varnothing\Leftrightarrow\{x|x\in A$，且$x\notin B\}=\varnothing$，

也就是说属于A但不属于B的元素不存在，即凡是属于A的元素必定属于B，所以$A\subseteq B$.

复习题(P18)

1. 用描述法可以表示为$\{x|x$是小于5的自然数$\}$或$\{x|x<5$，且$x\in\mathbf{N}\}$；

用列举法可以表示为$\{0,1,2,3,4\}$，

究竟哪种方法最适当要依据需要而确定.

2. (1)A中含$-9,-8,\cdots,-1,0,1,\cdots,8,9$共19个元素，故是有限集.

(2)对n取每一个自然数，都会有唯一的x与之一一对应. 由于n的取值无限，从而x的取值也无限，所以该集合是无限集.

(3)依题意，满足条件的点P是线段AB上的动点，显然这样的点P有无穷多个，从而该集合是无限集.

3. 等边三角形要求三边全相等，那么它在三角形范围内的否定就是三边不全相等，所以$\complement_U A=\{x|x$是三边不全相等的三角形$\}$.

4. $A\cap B=\{1,2\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$.

5. $A\cap B=\{x|1<x<2\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.

6. 由题意知$4\leqslant a$，即实数a的取值范围是$[4,+\infty)$.

7. (1)$\complement_U A=(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$.

(2)$\complement_U A=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}\cap\{x|x\leqslant 3\}=\{x|x<-1$，或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$.

(3)$\complement_U A=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}\cap\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}=\{x|-2\leqslant x<-1$，或 $x=2\}$.

(4)$\because U=A$，$\therefore \complement_U A=\varnothing$.

8. 由题意，集合A应满足$\{5\}\subseteq A\subseteq\{1,3,5\}$，

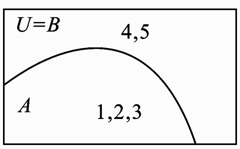
$\therefore A$可能是$\{5\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}$.

9. 由$A\cup B=A$得$B\subseteq A$，

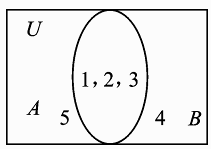
$\therefore B$可能是$\{1,2\},\{1,3\}$. $\therefore x$的值为2或3.

10. 符合题意的情况有以下四种：

(1)$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，其Venn图如答图12所示：



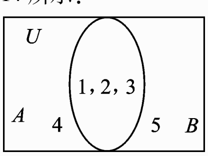
答图12



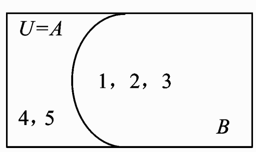
答图13

(2)$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，其Venn图如答图13所示：

(3)$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3,5\}$，其Venn图如答图14所示：



答图14



答图15

(4)$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，其Venn图如答图15所示：

11. 由题意，数学不优秀的百分率为30%，语文不优秀的百分率为25%. 为使上述两门学科都优秀的百分率最少，则这两门学科不优秀的学生要尽量不重复，故两门学科都优秀的百分率至少为$1-(30\%+25\%)=45\%$.

12. $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，相关Venn图如答图16所示. 对结论的证明过程如下：

①任取$a\in\complement_U(A\cap B)$，则$a\notin A\cap B$，

所以$a\notin A$与$a\notin B$中至少有一个成立，不妨设$a\notin A$，则$a\in\complement_U A$，于是$a\in(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

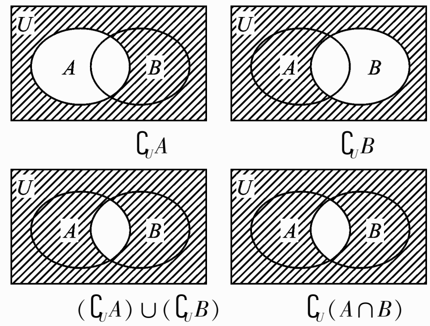
所以$\complement_U(A\cap B)\subseteq(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

②任取$a\in(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，则$a\in\complement_U A$或$a\in\complement_U B$. 不妨设$a\in\complement_U A$，则$a\notin A$，于是$a\notin A\cap B$，从而$a\in\complement_U(A\cap B)$，所以$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)\subseteq\complement_U(A\cap B)$.

综合①②得$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

类似的，还有一个公式$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，

这两个公式就是著名的集合运算律——De Morgan律.



答图16

13. (1)能成立. 例如$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，

其实只要$A\cap B\neq\varnothing$就会成立.

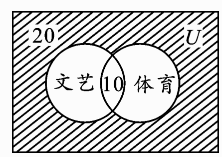
(2)能成立. 例如$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，

其实只要$A\cap B=\varnothing$就会成立.

(3)不能成立. 因为$A\cup B$中的元素至少来自A或B中的一个，如果$m+n<s$成立，就意味着$A\cup B$中存在A或B之外的元素，这是不可能的.

14. 由题意知，如答图17：

可知文艺、体育均爱好的有10人.



答图17

15. 由题意知$A=\{1,2\}$，$B=\{x|x=m\}$.

若$B\subsetneqq A$，得$m=1$或2.

16. (1)$C\times D=\{(a,1),(a,2),(a,3)\}$.

(2)由$A\times B=\{(1,2),(2,2)\}$知$1\in A,2\in A,2\in B$，且$A$、$B$也只有这些元素. $\therefore A=\{1,2\}$，$B=\{2\}$.

(3)对A中每一个元素，B中都可以提供4个元素与之分别组成$A\times B$中的一个元素，

又A中有3个元素，B中有4个元素.

$\therefore A\times B$中就有$3\times4=12$个元素.

17. 略.

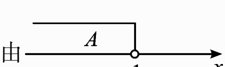
本章测试(P19)

1. $\{-1,1\}$ 【解析】由$x^2-1=0$得$x=\pm1$，所以$A=\{-1,1\}$.

2. $\{x|x=-2n,n\in\mathbf{N}^*\}$ 【解析】由所有偶数组成的集合为$\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，得$M=\{x|x=-2n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

3. ②③ 【解析】空集是任何非空集合的真子集，故①错误.

4. $\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ $\{0,1\}$ 【解析】由交集、并集定义可知，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{0,1\}$.

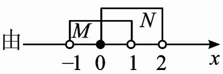
5. $\{x|x\geqslant1\}$ 【解析】由 

可

知$\complement_U A=\{x|x\geqslant 1\}$.

6.5　22　【解析】由 $22+28-45=5$ 人,即同时爱好围棋、足球的人最少有 5 人,最多有 22 人.

7.C　【解析】$N=\{-1,3\}$,$\therefore \complement_M N=\{0,1,2,4,5,6,7\}$.

8.B　【解析】由,知 $M\cap N=\{x|0\leqslant x<1\}$.

9.C　【解析】由 $M\cap N=M$,知 $M\subseteq N$,由 $N\cup P=P$ 知 $N\subseteq P$,所以 $M\cup P=P$.

10.B　【解析】由$\{1\}\subseteq A$ 知集合 A 中必有 1,又 $A\subsetneqq\{1,2,3\}$,所以 $A=\{1\}$或$\{1,2\}$或$\{1,3\}$,所以共有 3 个.

11.$m=0$　【解析】由 $m=2m$ 得 $m=0$.

12.$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{0,1,2,3,4,5\}$或 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,图略.

【解析】由 $A\cap B=\{1,2,3,4,5\}$知集合 A、B 中必有 1,2,3,4,5,又 $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$,所以 0 可以在集合 A 中也可以在集合 B 中,即 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$或 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{0,1,2,3,4,5\}$.

13.$\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}$　【解析】由 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|x<2\}$,知 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x<2\}$,所以$\complement_U(A\cap B)=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}$.

14.$[1,2]$　【解析】由 $B\subseteq A$ 可知$\begin{cases}1\leqslant m,\\ m+2\leqslant 4,\end{cases}$解得$1\leqslant m\leqslant 2$.

15.由题意知,$A=\{(1,1),(1,2)\}$,$B=\{(1,1),(2,1)\}$,所以 $A\cap B=\{(1,1)\}$,$A\cup B=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

第 2 章　函数

2.1　函数的概念

2.1.1　函数的概念和图象

教材课上思考答案

思考(P28)

不相等.集合 P 中的元素是有序数对,所以 P 是一个有序数对集(即是坐标平面内的一个点集),表示函数 $y=f(x)(x\in A)$的图象;而 Q 中的元素是数,所以 Q 是一个数集,表示函数 $y=f(x)(x\in A)$的值域.

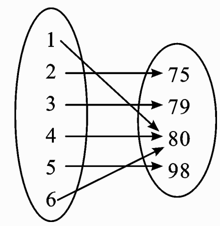
思考(P29)

(1)$f(x_1)>f(x_2)$　(2)$f(x_1)<f(x_2)$

教材课后习题答案

练习(P26)

1.所画"箭头图"如答图 18 所示:



答图 18

2.(1)0　40　80

(2)1.1((0,1.1]上的任意一个数都可以)　1.3((1.1,1.4]上的任意一个数都可以)

(3)(1)中对应是"单值对应";(2)中对应不是"单值对应".

3.(1)不是　(2)是　(3)不是　(4)是

4.(1)是　(2)是　(3)是　(4)是　(5)不是　(6)是

5.$f(0)=0-0^2=0$,$f(1)=1-1^2=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,$f(n+1)-f(n)=(n+1)-(n+1)^2-(n-n^2)=-2n$.

6.(1)$\mathbf{R}$

(2)$x^2-1\neq 0$,即定义域为$\{x\in\mathbf{R},x\neq\pm 1\}$.

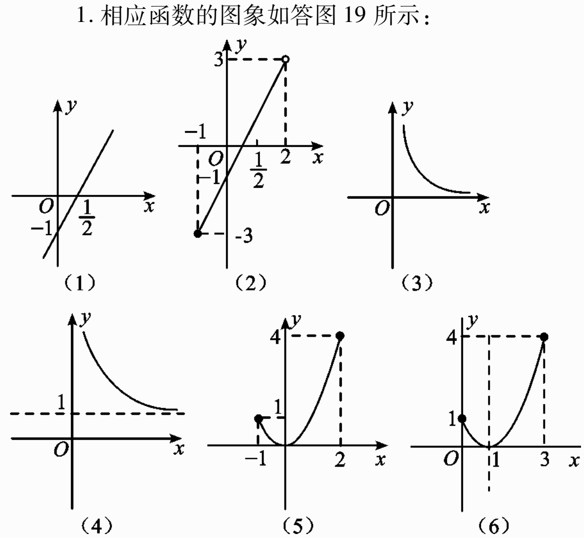
(3)$\begin{cases}2+x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0,\end{cases}$得$-2\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

(4)由题意得$\begin{cases}x\neq 0,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$则定义域为$\{x|x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0\}$.

7.(1)$\{2,6,12\}$　(2)$[-1,+\infty)$　(3)$(2,3]$

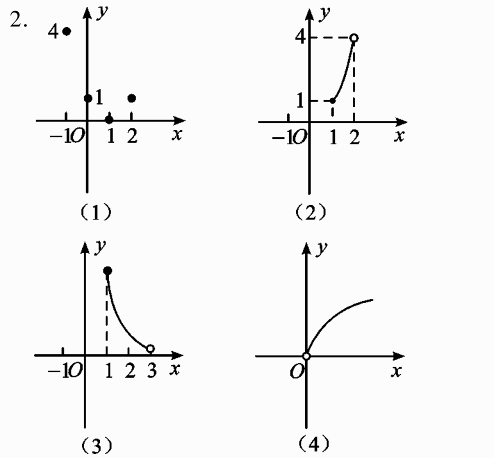
练习(P30)

1.相应函数的图象如答图 19 所示:



答图 19

2.



答图 20

由图可得(1)的值域为$\{4,1,0\}$;(2)的值域为$[1,4)$;(3)的值域为$\left(\frac{1}{3},1\right]$;(4)的值域为$(0,+\infty)$.

3.(1)2 3 0 (2)$f(x_1)<f(x_2)$.

习题 2.1(1)(P31)

1.(1)当$x=0$时,$y=-2$;当$x=1$时,$y=3$;当$x=5$时,$y=23$.

(2)把$y=5x-2$化为$x=\frac{1}{5}(y+2)$,当$y=0$时,$x=\frac{2}{5}$;当$y=1$时,$x=\frac{3}{5}$;当$y=5$时,$x=\frac{7}{5}$.

2.根据函数的定义知(1)、(2)、(4)、(5)都是从集合A到集合B的函数.而(3)不是,原因是A中的元素3在B中找不到与之对应的元素5.

3.(1)定义域为**R**,值域为**R**;

(2)定义域为**R**,值域为**R**;

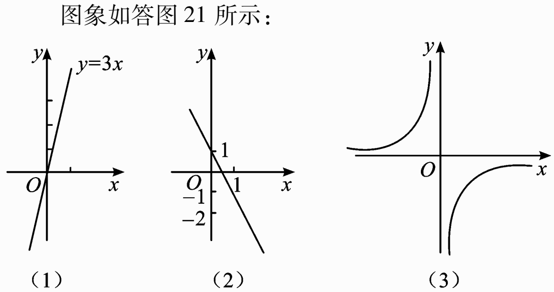
(3)定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

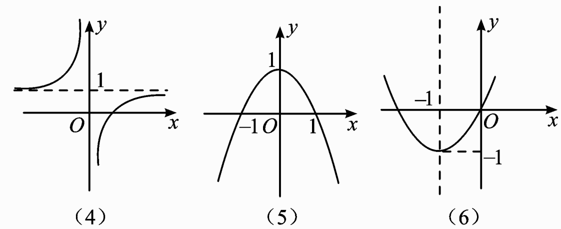
(4)定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

(5)定义域为**R**,值域为$(-\infty,1]$;

(6)定义域为**R**,值域为$[-1,+\infty)$.

图象如答图21所示:





答图 21

4.因为2000年的GDP约为89 442亿元,年均增长7.8%所以2004年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^4\approx120\ 785.98$,

2005年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^5\approx130\ 207.29$,

2006年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^6\approx140\ 363.46$,

2007年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^7\approx151\ 311.81$,

2008年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^8\approx163\ 114.13$,

2009年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^9\approx175\ 837.03$,

2010年的GDP应为

$89\ 442\times(1+7.8\%)^{10}\approx189\ 552.32$,

把上面计算结果相应填入表内即可.

5.由$f(3)=7\Rightarrow3a+b=7$,①

由$f(5)=-1\Rightarrow5a+b=-1$.②

综合①②,得$a=-4,b=19$,

$\therefore f(x)=-4x+19$,

$\therefore f(0)=19,f(1)=15$.

6.有且只有一个,坐标为(a,a^2+1).

7.$f(t)-g(t)=\frac{t}{1+t}-\frac{t}{1-t}=\frac{t(1-t)-t(1+t)}{1-t^2}=\frac{t-t^2-t-t^2}{1-t^2}=\frac{2t^2}{t^2-1}$. $-2g(t^2)=(-2)\cdot\frac{t^2}{1-t^2}=\frac{2t^2}{t^2-1}$.

$\therefore f(t)-g(t)=-2g(t^2)$.

8.$f(f(1))=f(2)=3$;$f(g(2))=f(1)=2$;$g(f(3))=g(4)=3$;$g(g(4))=g(3)=4$.

9.$g(x)=3x-5$,$f(g(x))=f(3x-5)=2(3x-5)+3=6x-7$.$f(x)=2x+3$,$g(f(x))=g(2x+3)=3(2x+3)-5=6x+4$.

10.是,该对应完全符合函数的定义.

11.略.

2.1.2 函数的表示方法

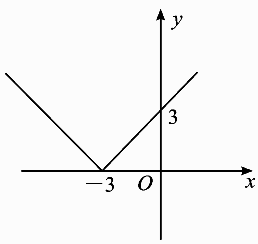
教材课后习题答案

练习(P35)

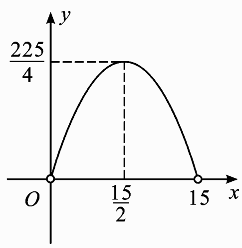
1. $y=1\ 852x, x>0$

2. $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\geqslant -3,\\ -x-3, & x<-3,\end{cases}$

图象如答图22所示.



答图22



答图23

3. (1) $S=x(15-x)=-x^2+15x, x\in(0,15)$，图象如答图23所示. (2) $l=2x+\frac{2}{x}(x>0)$

4. (1)、(4)

习题2.1(2)(P35)

1. 设下落的时间为 x，下落的距离为 y，则 $y=kx^2$，当 $x=2, y=4k=19.6$，解得 $k=4.9$，则当 $x=3$ 时，$y=kx^2=4.9\times3^2=44.1(\text{m})$.

2. (1) 设销售价上涨 x 元，则售价为 $10+x$，销售个数为 $(100-10x)$，利润为 y，则有 $y=(10+x)(100-10x)-8(100-10x)=(2+x)(100-10x)=-10x^2+80x+200$.

(2) 若 $x=3$ 时，利润 $y=-10\times3^2+80\times3+200=350$(元)；

(3) 若 $y=360$，即 $360=-10x^2+80x+200$，

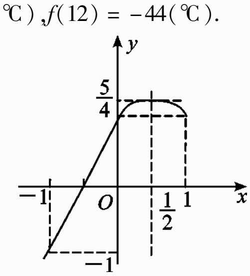
解得 $x=4$，即销售价上涨了4元.

3. $y=\begin{cases}22-6x, & 0\leqslant x\leqslant 11,\\ -44, & x>11.\end{cases}$

$f(3.5)=22-6\times3.5=1(℃)$，$f(12)=-44(℃)$.

4. $y=120\times4+2x\times2\times80+2\times\frac{4}{x}\times2\times80=480+320x+\frac{1\ 280}{x}(x>0)$.

5. (1) $f(x)=-x^2+x+1=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}(-1\leqslant x\leqslant 1)$，图象如答图24所示. 可得 $f(x_1)<f(x_2)$.



答图24

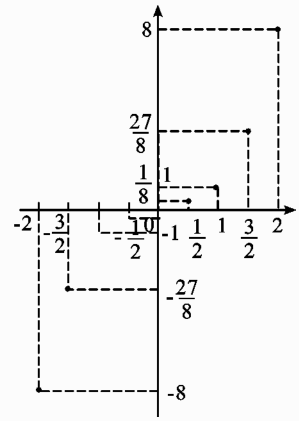
(2) 不存在.

6. 例如 $y=\begin{cases}x(x=1\text{ 或 }x=3),\\ x+1(x=2\text{ 或 }x=4).\end{cases}$

$y=\begin{cases}x+2(x=1\text{ 或 }x=3),\\ x-1(x=2\text{ 或 }x=4).\end{cases}$

7. $f(2)=2$；$f(f(-2))=f[(-2)^2]=f(4)=4$.

8. 如答图25所示.



答图25

9. D

10. ① $f(x)=x^2\ (x\in\mathbf{R})$.

② $f(x)=\begin{cases}1(x=1),\\ 4(x=2).\end{cases}$

③ $f(x)=3x-2\ (x\in\mathbf{R})$.

11. (1) $C=4\ 000+50n=4\ 000+1\ 000\times50=54\ 000$(元).

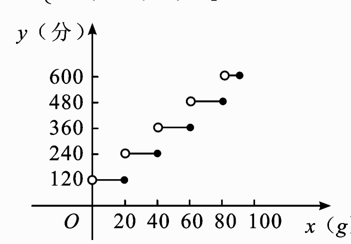
(2) 已知 $48\ 000=4\ 000+50n$，解得 $n=880$(双).

(3) $P=90n-(4\ 000+50n)=40n-4\ 000$，

由 $P\geqslant0$，得 $n\geqslant100$，

故每天至少生产100双皮鞋，才能不亏本.

12. $y=\begin{cases}120, & x\in(0,20],\\ 240, & x\in(20,40],\\ 360, & x\in(40,60],\\ 480, & x\in(60,80],\\ 600, & x\in(80,90].\end{cases}$，图象如答图26所示.



答图26

13. 略.

2.2 函数的简单性质

2.2.1 函数的单调性

教材课上思考答案

思考(P40)

对于例4中的两个函数.

(1) 因为 $x\in\mathbf{R}$，所以函数 $y=x^2-2x$ 没有最大值.

(2) 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，当 $x=1$ 时，函数有最大值.

教材课后习题答案

练习(P40)

1. $f(x)=x^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数.

任取 x_1, x_2，且设 $x_1 > x_2 > 0$，

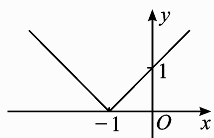
$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - 1 - x_2^2 + 1 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$.

$\because x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 > 0$，

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$.

$\therefore f(x) = x^2 - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数.

2.



答图 27

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减，在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增

3. $f(x) = -x^2 + 2x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调增函数.

任取 x_1, x_2，且设 $x_1 < x_2 < 0$，则

$f(x_1) - f(x_2) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2$

$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$，

$\because x_2 - x_1 > 0, x_1 + x_2 - 2 < 0$，

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore f(x) = -x^2 + 2x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调增函数.

4. $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1, x \in [0, 10]$，

$\therefore f(x)$ 的图象是以 $x = 1$ 为对称轴，开口向下的一段抛物线. $\therefore y_{\max} = f(1) = -1 + 2 \times 1 = 1, y_{\min} = f(10) = -100 + 20 = -80$.

5. 已知 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

$\therefore y = \frac{1}{x}$ 在 $(-2, -1]$ 上也是递减的，

$\therefore y_{\min} = \frac{1}{-1} = -1, y = \frac{1}{x}$ 在 $(-2, -1]$ 上没有最大值，但 $y < -\frac{1}{2}$.

6. 函数 $f(x) = -2x + 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. 任取 x_1, x_2，且设 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1) - f(x_2) = -2x_1 + 1 + 2x_2 - 1 = 2(x_2 - x_1)$.

$\because x_2 - x_1 > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在定义域上是单调减函数.

7. $f(x)$ 的单调增区间：$[1, 4), [4, 6]$；

$g(x)$ 的单调增区间：$[-\frac{3}{2}\pi, 0], [\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$.

8. (1) ×；(2) √；(3) √；(4) ×.

2.2.2　函数的奇偶性

教材课上思考答案

探究(P43)

具有奇偶性的函数，其定义域关于数“0”对称.

教材课后习题答案

练习(P43)

1. B

2. $f(x) = x^2 + 2x$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称，但它不是偶函数.

3. 图略. (1) 由于 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 在 y 轴左右两侧的图象关于 y 轴对称. (2) 由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象与 y 轴右侧的图象关于原点对称.

4. (1) √　(2) ×　(3) √　(4) ×

5. $\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f(-x) = (-x)^3 - (-x)$

$= -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$，

$\therefore f(x) = x^3 - x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

6. (1) $\because f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$，

$\therefore f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -(x + \frac{1}{x}) = -f(x)$.

$\therefore f(x) = x + \frac{1}{x}$ 是奇函数.

(2) $\because f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$，

又 $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{(-x)^2} = \frac{x^4 - 1}{x^2} = f(x)$，

$\therefore f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ 是偶函数.

(3) $\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore f(-x) = 2|-x| - 3 = f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数.

7. (1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore f(-x) = |-x + 3| + |-x - 3| = |x + 3| + |x - 3| = f(x)$.

$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(2) $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore g(-x) = |-x + 3| - |-x - 3|$

$= -|x + 3| + |3 - x| = -g(x)$.

$\therefore g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

习题 2.2(P44)

1.

函数	$y = kx + b$		$y = \frac{k}{x}$	
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
单调区间	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$
单调性	增	减	减	增

2. (1) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

(2) 在 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$ 上单调递减；

(3)在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增；

(4)在$(-\infty,\frac{1}{2})$上单调递增，在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递减.

3. 图象略.

(1)单调增区间$(-\infty,0]$，单调减区间$[0,+\infty)$. 最大值是1，无最小值.

(2)单调减区间$[-1,1]$，最大值是2，最小值是-2.

(3)单调增区间$\mathbf{R}$，无最大值，无最小值；

(4)单调减区间$[0,+\infty)$，最大值为0，无最小值；

(5)单调减区间$(-\infty,0]$，单调增区间$[0,+\infty)$，最小值为-2，无最大值；

(6)单调增区间$(-\infty,0)$，$[0,+\infty)$，无最大值和最小值.

4. $y=f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是单调减函数，因为$f(a+1)>f(2a)$，所以$a+1<2a$，即$a>1$.

5. (1)$f(-x)=2(-x)^2-7=f(x)$，$f(x)$为偶函数.

(2)$f(-x)=-x^3-5x=-f(x)$，$f(x)$为奇函数.

(3)$f(-x)=-5x-3$，$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

6. $f(-x)=x^2-2|x|-1=f(x)$，则$f(x)$是偶函数，图象略.

即$f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1, & x\geqslant 0,\\ x^2+2x-1, & x<0,\end{cases}$再判断其奇偶性.

7. (1)任取x_1,x_2，且设$x_1<x_2\leqslant 0$，则

$f(x_1)-f(x_2)=-2x_1^2+3+2x_2^2-3$

$=2(x_2-x_1)(x_2+x_1)$.

$\because x_2-x_1>0,x_1+x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)=-2x^2+3$在区间$(-\infty,0]$上是单调增函数.

(2)任取x_1,x_2，且设$x_1<x_2\leqslant 0$，则

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3+1+x_2^3-1$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$，

$\because x_2-x_1>0,x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)=-x^3+1$在区间$(-\infty,0]$上是单调减函数.

(3)任取x_1,x_2，且设$x_1<x_2<0$，则

$f(x_1)-f(x_2)=2-\frac{3}{x_1}-2+\frac{3}{x_2}$

$=3\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=3\cdot\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$.

$\because x_1-x_2<0,x_1x_2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

又设$x_1>x_2>0$，

则$f(x_1)-f(x_2)=2-\frac{3}{x_1}-2+\frac{3}{x_2}=3\cdot\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，

$\because x_1-x_2>0,x_1x_2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上都是单调增函数.

8. 函数$f(x)=x^2+mx+1$的定义域是$\mathbf{R}$.

$f(-x)=(-x)^2-mx+1=x^2-mx+1$.

$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(x)=f(-x)$，

即$x^2+mx+1=x^2-mx+1$对任意$x\in\mathbf{R}$都成立，

$\therefore m=0$.

9. 令$h(x)=ax^3-bx$. 易知$h(x)$为奇函数.

$\because f(-2)=-1$，$\therefore h(-2)=-2$.

$\therefore h(2)=2$. $\therefore f(2)=3$.

10. (1)在$(0,1]$上任取x_1,x_2，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$.

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$.

又$0<x_1<x_2\leqslant 1$，$\therefore x_1x_2<1$.

$\therefore 1-\frac{1}{x_1x_2}<0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$. 即$f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)$在$(0,1]$上是单调减函数.

又在$[1,+\infty)$上任取x_1,x_2，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$.

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，

又$1\leqslant x_1<x_2$，$\therefore x_1x_2>1$. $\therefore 1-\frac{1}{x_1x_2}>0$.

即$f(x_1)-f(x_2)<0$，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上是单调增函数.

(2)由(1)知，当$x=1$时，$f(x)$有最小值为2，无最大值.

11. $\because f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，

$\therefore -f(x)=f(-x)$，且$f(0)=0$.

又$x>0$时，$f(x)=1$，$\therefore$ 设$x<0$，则$-x>0$，

$\therefore f(-x)=1$. $\therefore f(x)=-f(-x)=-1$.

$\therefore f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

12. 单调增区间$(-\infty,+\infty)$，图略.

13. (1)

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)\cdot g(x)$
单调增函数	单调增函数	单调增函数	不能确定
单调增函数	单调减函数	不能确定	不能确定
单调减函数	单调减函数	单调减函数	不能确定
单调减函数	单调增函数	不能确定	不能确定

(2)

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$
单调增函数	单调增函数	单调增函数
单调增函数	单调减函数	单调减函数
单调减函数	单调减函数	单调增函数
单调减函数	单调增函数	单调减函数

2.3　映射的概念

教材课上思考答案

思考(P47)

函数是特殊的映射,它是两个非空数集之间的映射.

教材课后习题答案

练习(P47)

1. (1)3,5;B 中对应元素是 A 中元素的 2 倍加 1.

(2)1,2;B 中对应元素是 A 中元素与 1 的差的一半.

2. (3)是 A 到 B 的映射.

对于(1),A 中每个元素在 B 中有两个元素与之对应;

对于(2),A 中的元素 0 在 B 中没有元素与之对应.

3. (1)是从 A 到 B 的映射.

(2)是从 A 到 B 的映射.

4. (1)是

(2)不是,可以"一对多".

5. 略.

练习 2.3(P47)

1. 是映射,由映射定义可知.
2. f 是映射,g 不是映射.
3. 是映射.
4. (1)是映射,能　(2)是映射,能
5. $A=\{0,2,3\}$
6. (1)*nbuifnbujdt*　(2)*it is funny*
7. 略

复习题(P52)

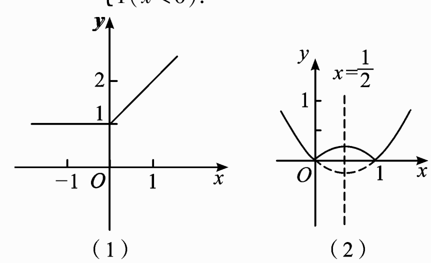
1. (1)由 $3x+5\geqslant 0$ 得定义域为 $[-\frac{5}{3},+\infty)$.

(2)由 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x+2\neq 0\end{cases}$ 得定义域为 $[-1,+\infty)$.

(3)由 $3-2x>0$ 得定义域为 $(-\infty,\frac{3}{2})$.

(4)由 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x+4\neq 0\end{cases}$ 得定义域为 $[1,+\infty)$.

2. (1)$x=\begin{cases}1+x(x\geqslant 0),\\ 1(x<0).\end{cases}$ 图象如答图 28(1)所示.



答图 28

(2)$y=\begin{cases}x^2-x(x^2-x\geqslant 0),\\ -(x^2-x)(x^2-x<0),\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}(x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant 1),\\ -(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}(0<x<1).\end{cases}$

其图象如答图 28(2)所示.

3. $\because f(x)=2x+1,\therefore f(2x-3)=2(2x-3)+1,$
$\therefore f(2x-3)=4x-5(2\leqslant x\leqslant 4).$

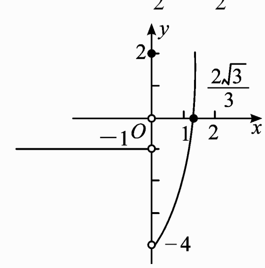
4. $y=x(20-2x)^2$,其中 $\begin{cases}x>0,\\ 20-2x>0.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式是 $y=4x(x-10)^2$,定义域为 $\{x|0<x<10\}$.

5. 令 $y=-1,2,5,8$,由 $y=2x+3$ 可得 $x=-2,-\frac{1}{2},1,\frac{5}{2}$. 所以函数的定义域为 $\{-2,-\frac{1}{2},1,\frac{5}{2}\}$.

6. 图象如答图 29 所示.

$f(-2)=-1,f(1)=-1,f(f(2))=f(8)=188.$



答图 29

7. (1)显然 $g(x)$ 的定义域仍为 $\mathbf{R}$,关于原点对称.

$\because g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x),\therefore g(x)$ 是偶函数.

(2)显然 $h(x)$ 的定义域仍为 $\mathbf{R}$,关于原点对称.

$\because h(-x)=f(-x)-f(x)$
$=-(f(x)-f(-x))$
$=-h(x),$
$\therefore h(x)$ 为奇函数.

8. 由图象可知，$a>0$ 时，$y=ax^3$ 为增函数；$a<0$ 时，$y=ax^3$ 为减函数，下面用定义给出证明：

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且设 $x_1<x_2$，记 $f(x)=y=ax^3$.

则 $f(x_1)-f(x_2)=ax_1^3-ax_2^3=a(x_1^3-x_2^3)$

$=a(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)$

$=a(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]$，

$\because x_1<x_2$，又 $x_1+\frac{1}{2}x_2$，x_2 不同时为 0，

$\therefore x_1-x_2<0$，$(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$ 为增函数；

当 $a<0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$ 为减函数.

9. $\because a<c<b$ 且 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上为单调减函数，

$\therefore$ 对 $[a,c]$ 上任一个 x，均有 $f(x)\geqslant f(c)$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上为单调增函数，

$\therefore$ 对区间上任一个 x，均有 $f(x)\geqslant f(c)$，故在 $[a,b]$ 上的任一个 x，均有 $f(x)\geqslant f(c)$，故 $f(x)$ 在 $x=c$ 时取得最小值.

10. $\because y=x^2$ 的值域为 $\{1,4\}$，令 $y=1$ 或 4，得 $x=\pm1$ 或 $x=\pm2$.

$\therefore$ 函数定义域为 $\{1,2\}$ 或 $\{1,-2\}$ 或 $\{-1,-2\}$ 或 $\{-1,2\}$ 或 $\{-1,1,2\}$ 或 $\{-1,1,-2\}$ 或 $\{-1,2,-2\}$ 或 $\{1,2,-2\}$ 或 $\{-1,1,2,-2\}$.

11. (1) 令 $t=1+x$，有 $x=t-1$，则原函数化为 $f(t)=3(t-1)+2=3t-1$，即函数 $f(x)=3x-1$，$x\in\mathbf{R}$.

(2) 令 $t=2x$，有 $x=\frac{t}{2}$，则原函数化为 $f(t)=3(\frac{t}{2})^2+1=\frac{3}{4}t^2+1$，即函数 $f(x)=\frac{3}{4}x^2+1$，$x\in\mathbf{R}$.

12. 设 x 为 A 中任一元素，由题意得 $f(x)=g(x)$，即 $x^2+1=3x+5$，解得 $x=4$ 或 $x=-1$，

$\therefore$ 集合 A 可为 $\{-1,4\}$ 或 $\{-1\}$ 或 $\{4\}$.

13. $\because f(x)=x+1$，

$\therefore f(f(f(x)))=f(f(x+1))=f(x+2)=x+3$.

猜想：$\underbrace{f(f(f(f(\cdots f(x)\cdots))))}_{n\text{ 个 }f}=x+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

14. (1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称；

(2) ①$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

②函数 $y=-f(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；

③函数 $y=f(x)+1$ 的图象可由函数 $y=f(x)$ 的图象向上平移 1 个单位得到；

④函数 $y=f(x-2)$ 的图象可由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 2 个单位得到.

图略.

15. (1) 在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x=y=0$，得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$，$\therefore f(0)=0$.

令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$.

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)+f(-x)=0$.

$\therefore f(-x)=-f(x)$. 又 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) 如 $f(x)=x$，$f(x)=3x$.

本章测试(P54)

1. $\{x|x\neq-\frac{1}{2}\}$ 【解析】由 $2x+1\neq0$，得 $x\neq-\frac{1}{2}$.

2. $[0,+\infty)$ 【解析】由 $2x-1\geqslant0$ 得 $y\in[0,+\infty)$.

3. 1 【解析】由 $3\geqslant1$ 得 $f(3)=-1$，

$\therefore f(f(3))=f(-1)=1$.

4. $[-3,-1]$，$[1,3]$ 【解析】由图象可知.

5. 0 【解析】由 $f(-x)=f(x)$ 得 $m=0$.

6. $(-\infty,-4]$ 【解析】由 $2\leqslant-\frac{m}{2}$，得 $m\leqslant-4$.

7. C 【解析】$\because f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=-3$，$f(x)_{\max}=f(2)=5$.

8. D 【解析】由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 成立.

9. D 【解析】由 $2\times0-1=-1$，$2\times1-1=1$，$2\times2-1=3$ 得D 符合题意.

10. A 【解析】由 $x>0$，$f(x)=x^3+x+1$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，得 $f(-x)=-x^3-x+1$，$\therefore f(x)=-f(-x)=x^3+x-1$.

11. 如 $f(x)=x^2$，$x\in A$；$f(x)=0$，$x\in A$.

12. $S=x(200-4x)$，$0<x<50$.

13. (1) $M=[1,3]$，$N=[2,+\infty)$.

(2) $M\cap N=[2,3]$，$M\cup N=[1,+\infty)$.

14. 对任意的 $x_1,x_2\in(0,2)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{4}{x_1})-(x_2+\frac{4}{x_2})$

$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$.

由 $0<x_1<x_2<2$，

可得 $x_1-x_2<0$，$0<x_1x_2<4$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上是减函数.

15. (1) $f(x)=\begin{cases}-5, & x<-2,\\ 2x-1, & x\geqslant-2.\end{cases}$

(2) 图象略，单调增区间为 $[-2,+\infty)$，值域为 $[-5,+\infty)$.

第 3 章　指数函数、对数函数和幂函数

3.1　指数函数

3.1.1　分数指数幂

教材课上思考答案

思考(P60)

$(\sqrt[n]{a})^n=a$,其中 n 为正奇数时,$a\in\mathbf{R}$;n 为正偶数时,$a\geqslant 0$.

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a, & n\text{ 为正奇数},\\ |a|, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

教材课后习题答案

练习(P62)

1. (1)5;(2)$\frac{2}{3}$;(3)2;(4)$\frac{1}{2}$.

2. (1)$\sqrt{a}$;(2)$\sqrt[5]{a}$;(3)$\sqrt[4]{a^3}$;(4)$\sqrt[5]{a^7}$;(5)$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$;(6)$\frac{1}{\sqrt{a^3}}$.

3. (1)$a^{\frac{1}{2}}$;(2)$x^{\frac{2}{3}}$;(3)$a^{-\frac{1}{3}}$;(4)$x^{\frac{3}{2}}$;
(5)$x^2y^{\frac{3}{2}}$;(6)$m^{\frac{3}{2}}$;(7)$(a+b)^{\frac{2}{3}}$;(8)$m-n$.

4. (1)5;(2)4;(3)$-\frac{2}{3}$;(4)$2^{-1}=\frac{1}{2}$;(5)$25^{\frac{3}{2}}=5^3=125$;

(6)$\left(\frac{25}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{125}{8}}=\frac{8}{125}$;

(7)$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$;

(8)$2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}=2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times 12^{\frac{1}{6}}$

$=2\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\times(2^2\times 3)^{\frac{1}{6}}$

$=2\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}$

$=2^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$

$=2\times 3=6$.

5. (1)$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$;

(2)$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$;

(3)$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{8}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}}=a^{\frac{3}{8}}$;

(4)$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$;

(5)$(a^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{5}{2}}=a^{\frac{15}{4}}$;

(6)$(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6=x^{\frac{1}{2}\times 6}\cdot y^{-\frac{1}{3}\times 6}=x^3\cdot y^{-2}$;

(7)$(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}=ab^{-\frac{1}{2}}$;

(8)$(x^{\frac{3}{2}}y)^2\div(xy^{\frac{2}{3}})=x^3y^2\div xy^{\frac{2}{3}}=x^2y^{(2-\frac{2}{3})}=x^2y^{\frac{4}{3}}$.

习题 3.1(1)(P63)

1. (1)$\sqrt{16}=4$;(2)$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$;

(3)$\sqrt{10^4}=10^{\frac{4}{2}}=100$;(4)$\sqrt[5]{(-0.1)^5}=-0.1$;

(5)$\sqrt[6]{(x-y)^6}=x-y$;

(6)$\sqrt[3]{-(2x+y)^3}=-(2x+y)$.

2. (1)$a^{\frac{2}{3}}$;(2)$a^{\frac{3}{2}}$;(3)$a\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$

(4)$(\sqrt[3]{a})^2=(a^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{2}{3}}$;

(5)$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{12}}$;

(6)$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\sqrt{a\cdot\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{a^{\frac{7}{4}}}=a^{\frac{7}{8}}$;

(7)$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=a^{\frac{13}{6}}$;

(8)$(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{3}{2}}$.

3. (1)$36^{\frac{1}{2}}=6$;(2)$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$;

(3)$(10\ 000)^{\frac{1}{4}}=10$;(4)$\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{4}$;

(5)$4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$;

(6)$\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$.

4. (1)$5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}\approx 1.71$;(2)$321^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{321^2}\approx 46.88$;

(3)$25.8^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{25.8^3}\approx 11.45$;(4)$723^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{723^5}\approx 58\ 241.22$.

5. (1)$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{7}{12}}=a^{\frac{5}{3}}$;

(2)$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{12}}$;

(3)$(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}})^{12}=(a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}})^{12}=a^{\frac{13}{12}\times 12}=a^{13}$;

(4)$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{4}})^{12}=a^4b^{-9}$;

(5)$4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=-6a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=-6a$;

(6)$2a^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{2}{3}}\right)$

$=a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}-4a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}$

$=1-4a^{-1}=1-\frac{4}{a}$;

(7)$(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{-\frac{1}{4}})(2a^{\frac{1}{2}}-3b^{-\frac{1}{4}})$

$=(2a^{\frac{1}{2}})^2-(3b^{-\frac{1}{4}})^2=4a-9b^{-\frac{1}{2}}$;

(8)$(a^2-2+a^{-2})\div(a^2-a^{-2})$

$=(a-a^{-1})^2\div[(a+a^{-1})(a-a^{-1})]$

$=(a-a^{-1})\div(a+a^{-1})$

$=\left(a-\frac{1}{a}\right)\div\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{a^2-1}{a}\div\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

6. $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=3-2=1$.

$\therefore a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm1$.

$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1})$.

而 $a+a^{-1}=3$，$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm1$.

故 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=\pm4$

7. (1) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}$，故 $\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{8}\right)^3$，$\therefore x=8^3=512$.

(2) $2x^{\frac{3}{4}}-1=15$，$2x^{\frac{3}{4}}=16$，$x^{\frac{3}{4}}=8$.

$x=8^{\frac{4}{3}}=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$. $\therefore x=16$

3.1.2　指数函数

教材课上思考答案

探究(P65)

(1) x 轴是指数函数 $y=a^x$ 图象的“渐近线”.

当 $0<a<1$ 时，随着 x 的增大，函数 $y=a^x$ 的图象越来越趋向于 x 轴；当 $a>1$ 时，随着 x 的减小，函数 $y=a^x$ 的图象越来越趋向于 x 轴.

(2) 函数 $y=2^x$ 与 $y=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称，一般地，函数 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}(a>0,a\neq1)$ 的图象关于 y 轴对称.

思考(P67)

当 $h>0$ 时，将函数 $y=a^x$ 的图象向左平移 h 个单位可得到 $y=a^{x+h}$ 图象.

当 $h<0$ 时，将函数 $y=a^x$ 的图象向右平移 $|h|$ 个单位可得到 $y=a^{x+h}$ 图象，一般地，函数图象平移变换时，$h>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 h 个单位以后，得到 $y=f(x-h)$ 的图象；向左平移 h 个单位以后，得到 $y=f(x+h)$ 的图象.

教材课后习题答案

练习(P67)

1. ①⑤是指数函数，由指数函数定义知.

2. (1) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；(2) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；(3) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；(4) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

3. C

4. (1) 考查函数 $y=3.1^x$，$3.1>1$，

$\therefore y=3.1^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$\because 0.5<2.3$，$\therefore 3.1^{0.5}<3.1^{2.3}$；

(2) 考查函数 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$，可知 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $-1.5>-1.8$，$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{-1.5}>\left(\frac{3}{2}\right)^{-1.8}$；

(3) 考查函数 $y=(0.6)^x$，可知 $y=(0.6)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $2<3$，$\therefore 0.6^2>0.6^3$；

(4) 考查函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$，可知 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $-0.3<-0.24$，$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{-0.3}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.24}$；

(5) $(0.5)^{3.2}<1$，$1.3^{2.1}>1$，$\therefore 0.5^{3.2}<1.3^{2.1}$；

(6) $2.3^{-2.5}=\frac{1}{2.3^{2.5}}<1$，$0.2^{-0.1}>1$，$\therefore 2.3^{-2.5}<0.2^{-0.1}$.

5. (1) 由 $2^x>8=2^3$，得 $x>3$；

(2) 由 $3^x<3^{-3}$，得 $x<-3$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$，得 $x<-\frac{1}{2}$；

(4) $5^x<0.2=\frac{1}{5}=5^{-1}$，得 $x<-1$.

6. A　【解析】由 $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，故选 A.

练习(P70)

1. 由题意知 $y=a\cdot(1+b)^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

2. 由题意知 $y=10\ 000\cdot(0.9)^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

3. 由题意知 $y=10(1+7\%)^x(x\in\mathbf{N}^*)$，5 年后还款总额为 $y=10(1+7\%)^5\approx14.03$(万元).

习题 3.1(2)(P70)

1. 由题意知 $y=2^x$，$x\in\mathbf{N}^*$.

2. 由题意知 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x(x\in\mathbf{N}^*)$，$\left(\frac{1}{4}\right)^x\leqslant0.01$，借助计算器得 $x\geqslant4(x\in\mathbf{N}^*)$，即至少漂洗 4 次.

3. (1) $1.7^m<1.7^{m+1}$；(2) $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$；(3) $0.9^m<0.9^{m-1}$；(4) $0.618^{1.9}<0.618^{1.8}$.

4. (1) 由 $2^{2.1}>2^{1.9}>1$，

$0.3^{2.1}<1$ 得 $0.3^{2.1}<2^{1.9}<2^{2.1}$；

(2) 由 $2^{2.5}>1$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}<1$，

$2.5^0=1$ 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}<2.5^0<2^{2.5}$；

(3) 由 $1>0.8^{0.8}>0.8^{0.9}$，

$1.2^{0.8}>1$ 得 $0.8^{0.9}<0.8^{0.8}<1.2^{0.8}$；

(4) 由 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$，得 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>1$，又 $(\frac{5}{3})^{-\frac{2}{3}}<1$，故 $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

5. 由指数函数单调性知 (1) $m<n$；(2) $m>n$；(3) $m>n$.

6. 由指数函数性质得

(1) $0<a<1$；(2) $0<a<1$；(3) $a>1$；(4) $a>1$

7. (1) 由 $2^x=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ 得 $x=\frac{1}{2}$；

(2) 由 $4^x=8=4^{\frac{3}{2}}$ 得 $x=\frac{3}{2}$；

(3) 由指数函数的图象过点 $(0,1)$ 知方程 $2^x=3^x$

有唯一解 $x=0$.

8. (1) $3^x<9=3^2$, 得 $x<2$;

(2) $2^x>2^{-3}$, 得 $x>-3$;

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$, $\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$, 又 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\sqrt[3]{9}$, 即 $3^{-x}>3^{\frac{2}{3}}$, 所以 $-x>\frac{2}{3}$, 即 $x<-\frac{2}{3}$;

(4) 由 $3^x>7^x$, 得 $1>\left(\frac{7}{3}\right)^x$, 得 $x<0$.

9. (1) 由 $f(x)=3^x$ 得左边 $=f(x)\times f(y)=3^x\times 3^y=3^{x+y}$, 右边 $=f(x+y)=3^{x+y}$, ∴ 左边 = 右边. ∴ 等式成立.

(2) 由 $f(x)=3^x$ 得左边 $=f(x)\div f(y)=\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{3^x}{3^y}=3^{x-y}$, 右边 $=f(x-y)=3^{x-y}$, ∴ 左边 = 右边. ∴ 等式成立.

10. (1) 设经过 x 年电子元件产量为 y 个, 则经过一年有电子元件 $y=a(1+p\%)$,

经过两年有电子元件 $y=a(1+p\%)(1+p\%)=a(1+p\%)^2$,

经过三年有电子元件 $y=a(1+p\%)^2(1+p\%)=a(1+p\%)^3$,

……

经过 x 年有电子元件 $y=a(1+p\%)^x(1\leqslant x\leqslant m$, 且 $x\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 设经过 x 年后, 电子元件成本为 y 元, 则 $y=a(1-p\%)^x(1\leqslant x\leqslant m$, 且 $x\in\mathbf{N}^*)$.

11. 由图象可以看出函数 $y=ka^{-x}$ 的图象经过点 $(0,8)$ 和 $(3,1)$, 而坐标应满足函数式 $y=ka^{-x}$, 即

$\begin{cases}8=k\cdot a^0,\\1=k\cdot a^{-3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=8,\\a=2.\end{cases}$

12. $y=a^x+b$ 的单调性由 a^x 决定, 由图象可知是增函数, 所以 $a>1$, 又当 $x=0$ 时对应点位于 x 轴下方即函数值小于 0, 所以 $a^0+b<0$, 即 $b<-1$.

13. ∵ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 且是奇函数,

∴ $f(0)=0$, 即 $a+\frac{1}{4^0+1}=0$. ∴ $a=-\frac{1}{2}$.

14. $f(x)=\frac{2^x+1-2}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$.

任取 x_1、$x_2\in(-\infty,+\infty)$, 且设 $x_1<x_2$,

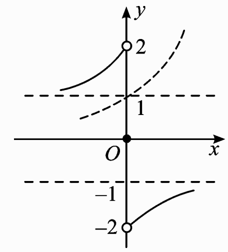
则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)}$.

∵ $x_1<x_2$, ∴ $2^{x_1}-2^{x_2}<0$.

∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$, 即 $f(x_1)<f(x_2)$.

∴ 函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

15. 先在坐标系中画出函数 $y=2^x$ 的图象, 再向上平移 1 个单位, 取 y 轴左侧部分, 再作出关于原点的对称图形, 所得图象就是函数 $y=f(x)$ 的图象 (包括原点), 如答图 30 所示.



答图 30

16. (1) $Q=Q_0e^{-0.0025t}$,

∵ $u=-0.0025t$ 随 t 的增大而减少, 且 $e>1$,

∴ $e^{-0.0025t}$ 的值也随 t 的增大而减小.

∴ 随时间 t 的增加, 臭氧的含量减小.

(2) 由题意得 $\frac{1}{2}Q_0=Q_0e^{-0.0025t}$, 即 $e^{-0.0025t}=\frac{1}{2}$.

由计算器计算得 $t\approx 277$ 年, 所以 277 年以后将会有一半的臭氧消失.

17. $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}=2^{x_1-1}+2^{x_2-1}$,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$. 则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^{x_1}+\frac{1}{2}\cdot 2^{x_2}-2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^{x_1}-\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2^{x_2}-\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{x_1}{2}}(2^{\frac{x_1}{2}}-2^{\frac{x_2}{2}})+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{x_2}{2}}(2^{\frac{x_2}{2}}-2^{\frac{x_1}{2}})$

$=\frac{1}{2}(2^{\frac{x_1}{2}}-2^{\frac{x_2}{2}})(2^{\frac{x_1}{2}}-2^{\frac{x_2}{2}})$

$=\frac{1}{2}(2^{\frac{x_1}{2}}-2^{\frac{x_2}{2}})^2\geqslant 0$.

当 $x_1=x_2$ 时, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$;

当 $x_1\neq x_2$ 时, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

所以 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号.

3.2　对数函数

3.2.1　对数

教材课后习题答案

练习(P74)

1. $\log_{10}100=2$; $\log_{25}5=\frac{1}{2}$; $\log_2\frac{1}{2}=-1$; $\log_5 1=0$; $\log_3 3=1$; $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$; $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$.

2. (1) $2^4=16$　(2) $\log_3\frac{1}{27}=-3$　(3) $5^a=25$

3. (1) $\log_3 234=5$　(2) $\log_2\frac{1}{256}=-8$

(3) $\log_2 10 = x$　(4) $\log_{\frac{1}{5}} 12 = x$

4. (1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = 4$　(2) $10^4 = 10\ 000$

(3) $10^{0.477\ 1} = a$　(4) $e^b = 12$

5. (1) $\log_4 64 = 3$　(2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

(3) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

(5) $\lg 1\ 000 = 3$　(6) $\ln \frac{1}{e^2} = -2$

6. (1) $\lg 2 = 0.301\ 0$　(2) $\lg 5 = 0.699\ 0$
(3) $\lg 1.078 = 0.032\ 6$　(4) $\lg 0.84 = -0.075\ 7$

7. (1) $\log_a a^2 = 2$; $\log_a a^5 = 5$; $\log_a a^{-3} = -3$; $\log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$.

一般地，$\log_a a^b = b$.

证明如下：设 $a^b = N$，则 $b = \log_a N$，把 $N = a^b$ 代入 $b = \log_a N$ 得 $b = \log_a a^b$.

(2) 设 $a^b = N$，则 $b = \log_a N$，代入 $a^b = N$ 得 $a^{\log_a N} = N$.

练习(P76)

1. (1) $\lg (xy^2z^3) = \lg x + \lg y^2 + \lg z^3 = \lg x + 2\lg y + 3\lg z$.

(2) $\lg \frac{\sqrt{x}}{yz^2} = \lg \sqrt{x} - \lg (yz^2) = \frac{1}{2}\lg x - (\lg y + \lg z^2)$

$= \frac{1}{2}\lg x - \lg y - 2\lg z$.

2. (1) $\log_3 (9 \times 27) = \log_3 3^5 = 5$.

(2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (4^5 \times 8^2) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2^{16} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-32} = -32$.

(3) $\lg 25 + \lg 4 = \lg (25 \times 4) = \lg 100 = 2$.

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$.

3. (1) $\lg 18 = \lg (2 \times 3^2) = \lg 2 + 2\lg 3 = 1.255\ 2$

(2) $\lg 72 = \lg (8 \times 9) = 3\lg 2 + 2\lg 3 = 1.857\ 2$

(3) $\lg \frac{3}{4} = \lg 3 - 2\lg 2 = -0.124\ 9$

(4) $\lg 15 = \lg \left(\frac{3}{2} \times 10\right) = \lg \frac{3}{2} + 1 = \lg 3 - \lg 2 + 1 = 1.176\ 1$.

4. (1) $\lg 108 = \lg (36 \times 3) = \lg 36 + \lg 3 = \lg 6^2 + \lg 3 = 2\lg 6 + \lg 3 = 2\lg (2 \times 3) + \lg 3 = 2(\lg 2 + \lg 3) + \lg 3 = 3\lg 3 + 2\lg 2 = 3b + 2a$.

(2) $\lg \frac{18}{25} = \lg 18 - \lg 25 = \lg (3^2 \times 2) - \lg 5^2 = \lg 3^2 + \lg 2 - 2\lg 5 = 2\lg 3 + \lg 2 - 2\lg \frac{10}{2} = 2\lg 3 + \lg 2 - 2(\lg 10 - \lg 2) = 2\lg 3 + \lg 2 - 2 + 2\lg 2 = 2\lg 3 + 3\lg 2 - 2 = 2b + 3a - 2$.

5. (1) $\lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5} = \lg (\sqrt{10}) = \frac{1}{2}\lg 10 = \frac{1}{2}$.

(2) $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

练习(P78)

1. (1) $\log_2 5 \times \log_5 4 = \log_2 5 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 5} = \log_2 4 = 2$.

(2) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 8$

$= \log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = 3$.

2. 右边 $= \frac{1}{\frac{\log_3 3}{\log_3 4}} = \frac{\log_3 4}{\log_3 3} = \log_3 4 =$ 左边.

3. 原式 $= \log_2 5^{-2} \cdot \log_3 2^{-3} \cdot \log_5 3^{-2}$

$= (-2\log_2 5) \cdot (-3\log_3 2) \cdot (-2\log_5 3)$

$= -12 \cdot \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = -12$.

4. (1) 原式 $= \frac{\lg 5}{\lg 2} + \lg 5 \approx 3.020\ 9$.

(2) 原式 $= \frac{\lg 3.14}{\lg 5} - \frac{\lg 3}{\lg 7} \approx 0.146\ 4$.

(3) 原式 $= \frac{\lg \sqrt{3}}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1.161\ 0$.

(4) 原式 $= \lg 2 \times \frac{1}{\lg 3} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0.630\ 9$.

5. 设经过 x 年后，我国人口数达到 18 亿，依题意，得 $13 \times (1 + 1\%)^x = 18$

解得 $x \approx 33$

即约经过 33 年后，我国人口数达到 18 亿.

习题 3.2(1)(P79)

1. (1) $\log_3 9 = 2$　(2) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

(3) $\log_8 32 = \frac{5}{3}$　(4) $\log_3 2 = m$

2. (1) $2^3 = 8$　(2) $9^{\frac{1}{2}} = 3$　(3) $49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$

(4) $2^{2.321\ 9} = 5$　(5) $10^{0.778\ 2} = 6$　(6) $e^{2.302\ 6} = 10$

3. (1) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

(2) $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-3} = -3$

(3) $\log_{3.4} 3.4 = 1$　(4) $\log_{0.45} 1 = 0$

(5) $\lg 125 + \lg 8 = \lg (125 \times 8) = \lg 1\ 000 = 3$

(6) $\log_2 56 - \log_2 7 = \log_2 \frac{56}{7} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

4. (1) 0.954 2　(2) 1.485 1　(3) 1.548 0　(4) 0.238 6

5. (1) $\lg 54 = \lg (2 \times 27) = \lg 2 + 3\lg 3 = 1.732\ 3$

(2) $\lg 1.5 = \lg \frac{3}{2} = \lg 3 - \lg 2 = 0.176\ 1$

(3) $\lg\frac{4}{9}=2\lg\frac{2}{3}=2(\lg 2-\lg 3)=-0.352\ 2$

(4) $\lg 45=\lg\frac{90}{2}=\lg 90-\lg 2=\lg(9\times 10)-\lg 2=2\lg 3-\lg 2+1=1.653\ 2$

6. (1) 原式 $=\log 2\ {}^{2}2^{3}-\log_{3^{-2}}3=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2.$

(2) 原式 $=\lg 16+\lg\frac{5}{8}=\lg\left(16\times\frac{5}{8}\right)=\lg 10=1.$

(3) 原式 $=(\lg 5)^2+\lg\frac{10}{5}\times\lg(5\times 10)$

$=(\lg 5)^2+(1-\lg 5)(1+\lg 5)$

$=(\lg 5)^2+1-(\lg 5)^2=1.$

7. (1) $\lg 36=\lg(4\times 9)=2\lg 2+2\lg 3=2a+2b$;

(2) $\lg 15=\lg\left(\frac{3}{2}\right)\times 10=\lg 3-\lg 2+1=b-a+1$

(3) $\lg\frac{3}{5}=\lg\frac{6}{10}=\lg 2+\lg 3-1=a+b-1$

(4) $\lg 1.8=\lg\frac{18}{10}=\lg 18-1=\lg 2+2\lg 3-1=a+2b-1$

8. 设平均每年的增长率为 x，2000 年的 GDP 为 a，则 2010 年的 GDP 为 $2a$，由题意得 $a(1+x)^{10}=2a$，即 $(1+x)^{10}=2$. 两边取常用对数得 $10\lg(1+x)=\lg 2$，

即 $\lg(1+x)=\frac{1}{10}\lg 2=0.030\ 1$.

$\therefore 1+x=10^{0.030\ 1}$，$x=10^{0.030\ 1}-1\approx 1.071\ 8-1\approx 0.072$.

∴ 平均每年的增长率应是 7.2%.

9. 设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$ 由对数的定义得 $M=a^p$，$N=a^q$，$\therefore\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$.

故 $\log_a\frac{M}{N}=p-q=\log_a M-\log_a N$.

$\log aM^n=\log_a(a^p)^n=\log_a a^{pn}=pn=n\log_a M$.

10. 设 $\log_a N=x$，则 $a^x=N$.

两边取以 c 为底的对数，得 $\log_c a^x=\log_c N$，即 $x\log_c a=\log_c N$，所以 $x=\frac{\log_c N}{\log_c a}$，即 $\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}$.

11. (1) 右边 $=\frac{1}{\frac{\log_a a}{\log_a b}}=\frac{\log_a b}{\log_a a}=\log_a b=$ 左边.

(2) $\log_{a^n}b^m=\frac{\log_a b^m}{\log_a a^n}=\frac{m}{n}\log_a b$.

12. (1) $\lg 24=2b-a$，$\lg 120=b+1$.

(2) $\lg 24=2a-b+1$，$\lg 120=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}$.

13. 当 I 是 I_0 的 100 倍时，$\frac{I}{I_0}=100$.

$\therefore L=10\lg\frac{I}{I_0}=10\cdot\lg 100=20(\mathrm{dB})$.

∴ 当声强 I 为规定声强 I_0 的 100 倍时，声强级 L 为 20 分贝.

3.2.2　对数函数

教材课上思考答案

思考(P82)

函数 $y=\log_a x$ 的定义域和值域分别是函数 $y=a^x$ 的值域和定义域.

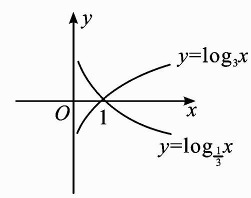
思考(P85)

当 $b>0$ 时，将 $y=\log_a x$ 向左平移 b 个单位得到 $y=\log_a(x+b)$；当 $b<0$ 时，将 $y=\log_a x$ 向右平移 $|b|$ 个单位得到 $y=\log_a(x+b)$.

教材课后习题答案

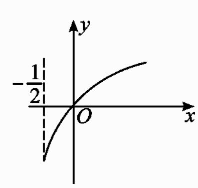
练习(P85)

1. 图象如答图 31 所示，两函数的图象关于 x 轴对称.

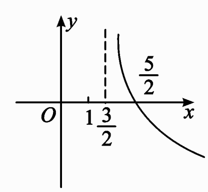


答图 31

2. (1) 由 $2x+1>0$ 得 $x>-\frac{1}{2}$，∴ 函数 $y=\log_2(2x+1)$ 的定义域为 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，图象如答图 32 所示.



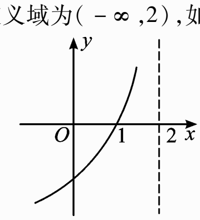
答图 32



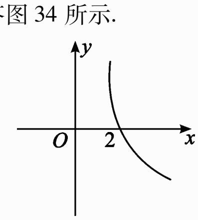
答图 33

(2) 由 $2x-3>0$ 得 $x>\frac{3}{2}$. ∴ 函数 $y=\log_{0.5}(2x-3)$ 的定义域为 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，如答图 33 所示.

(3) 由 $2-x>0$ 得 $x<2$. ∴ 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$，如答图 34 所示.



答图 34



答图 35

(4) 由 $\frac{1}{x-1}>0$ 得 $x>1$. ∴ 函数 $y=\lg\frac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(1,+\infty)$，如答图 35 所示.

3. (1) 由 $2>1$ 得 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 $\frac{3}{5}<1$ 得 $y=\log_{\frac{3}{5}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

(3) 由 $7>1$ 得 $y=\log_7(2x+1)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

(4) 由 $10>0$ 得 $y=\lg(3-2x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减.

4. (1) 考查函数 $y=\log_3 x$, 因为 $3>1$, 所以 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 又 $5.4<5.5$, 所以 $\log_3 5.4<\log_3 5.5$.

(2) 考查函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, 因为 $0<\frac{1}{3}<1$, 所以 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数, 又 $\pi>e$, 所以 $\log_{\frac{1}{3}}\pi<\log_{\frac{1}{3}}e$.

(3) $\lg 0.02<0$, $\lg 3.12>0$, 所以 $\lg 3.12>\lg 0.02$.

(4) 考查函数 $y=\ln x$, 因为 $e>1$, 所以 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 又 $0.55<0.56$, 所以 $\ln 0.55<\ln 0.56$.

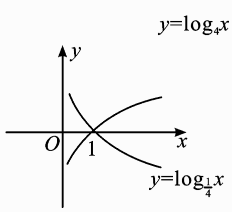
5. (1) 由原方程得 $3x=2x+1$, $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的解.

(2) 由原方程得 $2x+1=x^2-2$, 即 $x^2-2x-3=0$. 解得 $x=3$ 或 $x=-1$, 经检验 $x=3$ 是原方程的解.

(3) 由原方程得 $\sqrt{x-1}=x-1$, 两边平方得 $x-1=(x-1)^2$. 即 $(x-1)(x-2)=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=2$. 经检验 $x=2$ 是原方程的解.

习题 3.2(2)(P87)

1. 图象如答图 36 所示, 两函数的图象关于 x 轴对称.



答图 36

性质相同点: (1) 都经过点 $(1,0)$; (2) 定义域都是 $(0,+\infty)$; (3) 值域都是 **R**.

不同点: (1) $y=\log_4 x$ 是增函数, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 是减函数;

(2) $x>1$ 时, $y=\log_4 x>0$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x<0$; $x<1$ 时, $y=\log_4 x<0$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x>0$;

(3) 当 $x\to 0$ 时, $y=\log_4 x$ 的图象向下无限接近 y 轴, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 的图象向上无限接近 y 轴.

2. (1) 由 $5x+2>0$ 得 $x>-\frac{2}{5}$,

$\therefore$ 函数 $y=\log_2(5x+2)$ 的定义域为 $\left(-\frac{2}{5},+\infty\right)$.

(2) 由 $x-3>0$ 得 $x>3$,

$\therefore$ 函数 $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$

(3) 由 $3x-1>0$, 得 $x>\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 函数 $y=\ln(3x-1)$ 的定义域是 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

(4) 由 $\frac{2}{4x-3}>0$ 得 $x>\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 函数 $y=\log_4\frac{2}{4x-3}$ 的定义域是 $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

3. (1) 考查函数 $y=\log_5 x$, $\because 5>1$ 且 $7.8<7.9$,

$\therefore \log_5 7.8<\log_5 7.9$.

(2) 考查函数 $y=\log_{0.3}x$,

$\because 0<0.3<1$ 且 $3>2$, $\therefore \log_{0.3}3<\log_{0.3}2$.

(3) $\ln 0.32<0$, $\lg 2>0$, $\therefore \ln 0.32<\lg 2$.

(4) $\log_6 5<\log_6 6=1$, $\log_7 8>\log_7 7=1$, $\therefore \log_6 5<\log_7 8$.

4. 函数 $y=\log_{0.5}(3x-2)$ 的定义域是 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

任取 $x_1,x_2\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, 且设 $x_1<x_2$.

则 $f(x_2)-f(x_1)=\log_{0.5}(3x_2-2)-\log_{0.5}(3x_1-2)=\log_{0.5}\frac{3x_2-2}{3x_1-2}$.

$\because x_1,x_2\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, 且 $x_1<x_2$,

$\therefore 3x_2-2>3x_1-2>0$, $\therefore \frac{3x_2-2}{3x_1-2}>1$. 又 $0<0.5<1$,

$\therefore \log_{0.5}\frac{3x_2-2}{3x_1-2}<0$, 即 $f(x_2)<f(x_1)$.

$\therefore$ 函数 $y=\log_{0.5}(3x-2)$ 在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上是减函数.

5. (1) 原方程可化为 $3^{3x+5}=3^3$,

$\therefore 3x+5=3$, $x=-\frac{2}{3}$.

(2) 两边取对数得 $2x\lg 2=\lg 12$,

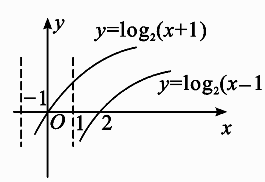
$\therefore x=\frac{\lg 12}{2\lg 2}=\frac{1}{2}\log_2 12$.

(3) 由 $3^{1-x}-2=0$ 得 $3^{1-x}=2$,

两边取对数得 $(1-x)\lg 3=\lg 2$,

$\therefore x=1-\frac{\lg 2}{\lg 3}=1-\log_3 2$.

6. 图象如答图 37 所示, 函数 $y=\log_2(x-1)$ 的图象可看做是由函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象向右平移 2 个单位得到的.



答图 37

7. $\because 5>4=2^2$,

$\therefore \log_2 5>\log_2 2^2=2$.

$\because 8<25=5^2$, $\therefore \log_5 8<\log_5 5^2=2$.

$\therefore \log_2 5>\log_5 8$.

8. 由图象知函数 $y=\log_a(x+b)$ 的图象经过点 $(-2,0)$ 和 $(0,2)$, 所以有 $\begin{cases}\log_a(b-2)=0,\\ \log_a b=2,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=3. \end{cases}$

9. (1) 由 $f(x)=\log_3 x$,

得 $f(x)+f(y)=\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy=f(xy)$,

$\therefore$ 等式成立.

(2) $f(x)-f(y)=\log_3 x-\log_3 y=\log_3\frac{x}{y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$,

$\therefore$ 等式成立.

10. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,

$\therefore f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

11. 由图象知 $c>d>1$, $1>a>b$,

$\therefore$ 有 $0<b<a<1<d<c$.

12. (1) 由指数式的关系得 $1-x=\log_2 5$, 即 $x=1-\log_2 5$.

(2) 原方程等价于 $5^x=\frac{9}{10}$, 即 $x=\log_5\frac{9}{10}$.

13. (1) $\because 5^{x+2}>2$,

$\therefore$ 两边取以 5 为底的对数有 $x+2>\log_5 2$,

$\therefore x>\log_5 2-2$.

(2) $\because 3^{3-x}<6$,

$\therefore$ 两边取以 3 为底的对数有 $3-x<\log_3 6$, $x>2-\log_3 2$.

(3) 原不等式等价于 $\log_3(x+2)>\log_3 3^3$,

$\because 3>1$, $\therefore x+2>3^3$, 即 $x>25$.

(4) 原不等式等价于 $\lg(x-1)<\lg 10$,

$\because 10>1$, $\therefore 0<x-1<10$, $\therefore 1<x<11$.

14. $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\lg x_1+\lg x_2}{2}=\lg\sqrt{x_1x_2}$,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\lg\frac{x_1+x_2}{2}$.

$\because \frac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\frac{x_1-2\sqrt{x_1x_2}+x_2}{2}$

$=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}\geqslant 0$,

(当 $x_1=x_2$ 时取" = ")

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$,

$\because$ 底数 $10>1$, $\therefore \lg\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\lg\sqrt{x_1x_2}$.

$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

当 $x_1=x_2$ 时取等号.

3.3 幂函数

教材课上思考答案

思考(P88)

函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数; $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数; $y=x^{-2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调增函数, 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数.

教材课后习题答案

练习(P89)

1. ①②

2. (1) 函数 $y=x^4$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 是偶函数.

(2) $y=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$, 是非奇非偶函数.

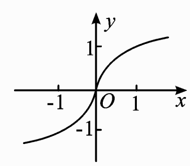
(3) $y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 是奇函数.

(4) $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 是偶函数.

3. 由 $y=x^\alpha$ 过点 $(2,\sqrt{2})$ 得 $\sqrt{2}=2^\alpha$,

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$. $\therefore$ 解析式为 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

4. 函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象如答图 38 所示, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.



答图 38

习题 3.3(P90)

1. (1) 定义域是 $\mathbf{R}$. 奇函数.

(2) $y=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$. 非奇非偶函数.

(3) $y=x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 偶函数.

(4) $y=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 非奇非偶函数.

2. (1) 考查函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$, 其在 $[0,+\infty)$ 上为增函数, 又 $5.23<5.24$, $\therefore 5.23^{\frac{1}{2}}<5.24^{\frac{1}{2}}$.

(2) 考查函数 $y=x^{-1}$, 其在 $(0,+\infty)$ 上为减函数, 又 $0.26<0.27$, $\therefore 0.26^{-1}>0.27^{-1}$.

(3) 考查函数 $y=x^{-\frac{3}{2}}$, 其在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

$\because 1.4<1.7$, $\therefore 1.4^{-\frac{3}{2}}>1.7^{-\frac{3}{2}}$.

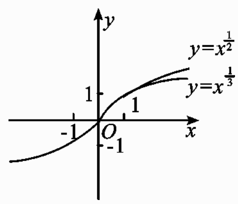
(4) 考查函数 $y=x^3$, 其在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数.

$\because 0.72<0.75$, $\therefore 0.72^3<0.75^3$.

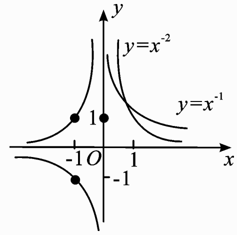
$\therefore (-0.72)^3>(-0.75)^3$.

3. 函数 $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$, 定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 且是偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

4. (1)图象如答图 39 所示. 图象都经过点(0,0)、(1,1),且在(0,+∞)上是增函数.



答图 39



答图 40

(2)图象如答图 40 所示. 图象都经过(1,1),且在(0,+∞)上都是减函数.

5. 在[0,+∞)上取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$.

则 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

$\because 0\leqslant x_1<x_2$,$\therefore x_1-x_2<0$,

即 $f(x_1)-f(x_2)<0$. $\therefore f(x_1)<f(x_2)$. $\therefore f(x)$ 在[0,+∞)上是增函数.

6. 设车身长为 a m,比例系数为 k,由题意知 $d=kv^2a$,又车身长为 4 m,车速为 60km/h 时,安全车距为 1.44 个车身长,$\therefore 1.44\times4=k\times60^2\times4$. 解得 $k=0.0004$.

$\because$ 车距不小于半个车身长,

$\therefore d\geqslant0.5a$,即 $0.0004av^2\geqslant0.5a$. $\therefore v\geqslant35.4$.

$\therefore$ 安全车距 d 与车速 v 的函数关系式是 $d=0.0004av^2$(其中 a 为身长,$v\geqslant35.4$).

3.4 函数的应用

3.4.1 函数与方程

教材课上思考答案

思考(P93)

不一定成立. 例如,对于 $f(x)=x^2$ 来说,$x=0$ 是它的一个零点,$-1<0<1$,但是 $f(-1)\cdot f(1)<0$ 不成立.

教材课后习题答案

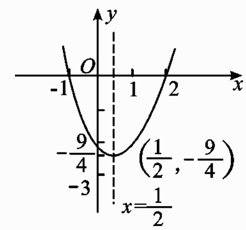
练习(P93)

1. 配方,得 $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$.

列表:

x	…	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	0	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	0	…

描点作图(如答图 41 所示):



答图 41

方程 $x^2-x-2=0$ 的两根是 $x_1=-1,x_2=2$,

所以函数 $y=x^2-x-2$ 的零点为 -1 和 2.

2. (1)由 $y=2x+3$ 得 $2x+3=0$,所以 $x=-\dfrac{3}{2}$.

(2)由 $y=x^2-4x$ 得 $x^2-4x=0$,所以 $x=0$ 或 $x=4$.

(3)由 $y=-3x^2-9$ 得 $-3x^2-9=0$,

所以无解,即无零点.

(4)由 $y=x^2-3x+2$ 得 $x^2-3x+2=0$,

所以 $x=1$ 或 $x=2$.

3. $f(-1)=3^{-1}-(-1)^2=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}<0$

$f(0)=3^0-(0)^2=1>0$,即 $f(-1)f(0)<0$.

所以 $f(x)=0$ 在$[-1,0]$上有实数解.

4. (1)证法一:$\because \Delta=6^2-4\times4=36-16>0$,

$\therefore$ 原方程有两个不同的零点.

证法二:设 $f(x)=x^2+6x+4$.

$\because f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线,且 $f(-1)=1-6+4=-1<0$,

$\therefore f(x)$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点.

$\therefore$ 原方程有两个不同的零点.

5. $f(1)=4\times1^3+1-15=-10<0$,

$f(2)=4\times2^3+2-15=19>0$,

所以 $f(1)f(2)<0$.

所以函数 $f(x)=4x^3+x-15$ 在区间[1,2]上有零点.

练习(P96)

1. 设 $f(x)=x^3+3x-1$,

$\because f(0)=-1<0, f(1)=3>0$,

$\therefore$ 在区间(0,1)上,

$x^3+3x-1=0$ 有解,设为 x_1.

$f(0)=-1<0, f(0.5)=0.625>0\Rightarrow x_1\in(0,0.5)$,

$f(0.25)<0, f(0.5)=0.625>0\Rightarrow x_1\in(0.25,0.5)$,

$f(0.25)<0, f(0.375)>0\Rightarrow x_1\in(0.25,0.375)$,

$f(0.3125)<0, f(0.375)>0\Rightarrow x_1\in(0.3125,0.375)$,

$f(0.3125)<0, f(0.34375)>0\Rightarrow x_1\in(0.3125,0.34375)$.

精确到0.1，所以此方程的近似解为0.3.

2. 由函数图象易知 $\lg x=1-2x$，只有唯一的解，设 $f(x)=\lg x+2x-1$，即 $f(x)$ 只有唯一的解.

$f(0.5)<0$，$f(1)>0$，在区间 $[0.5,1]$ 上，$\lg x=1-2x$ 有解，设为 x_1.

$f(0.5)<0$，$f(0.75)>0\Rightarrow x_1\in(0.5,0.75)$，

$f(0.5)<0$，$f(0.625)>0\Rightarrow x\in(0.5,0.625)$，

$f(0.5625)<0$，$f(0.625)>0\Rightarrow x_1\in(0.5625,0.625)$

精确到0.1，所以此方程的近似解为0.6.

3. 略.

4. 解法一：（因式分解法）

$2x^2-3x+1=0$，$(2x-1)(x-1)=0$，即 $2x-1=0$ 或 $x-1=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=1$.

解法二（用二分法的解题思想）

设 $f(x)=2x^2-3x+1$，则 $f(0)=1$，$f(1)=0$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+1=0.$

又 $f(x)=0$ 至多有两根，$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=1$.

5. 设 $f(x)=x^3-2x-1$，结合 $y=x^3$ 与 $y=2x+1$ 的图象，

$f(-1)=-1+2-1=0$，

$f(0)=-1$，$f(1)=1-2-1=-2$，

$f(2)=8-4-1=3$，

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+1-1=-\frac{1}{8}$，

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{64}+\frac{3}{2}-1=\frac{5}{64}$，

于是可以判断 $f(x)=0$ 有三根：

$x_1=-1$，$x_2\in(-0.75,-0.5)$，$x_3\in(1,2)$.

下面用二分法求 x_2，列表如下：

中点	中点函数值及符号	取区间
	$f(-0.75)(+)$；$f(-0.5)(-)$	$(-0.75,-0.5)$
$x_1=\frac{-0.75-0.5}{2}=-0.625$	$f(-0.625)=0.0059(+)$	$(-0.625,-0.5)$
$x_2=\frac{-0.625-0.5}{2}=-0.5625$	$f(-0.5625)=-0.0530(-)$	$(-0.625,-0.5625)$

$\because -0.625\approx-0.6$，$-0.5625\approx-0.6$，

$\therefore$ 取 $x_2\approx-0.6$.

再用二分法求 x_3，列表如下：

中点	中点函数值及符号	取区间
	$f(1)(-)$；$f(2)(+)$	$(1,2)$
$x_1=\frac{1+2}{2}=1.5$	$f(1.5)=-0.625(-)$	$(1.5,2)$
$x_2=\frac{1.5+2}{2}=1.75$	$f(1.75)=0.859(+)$	$(1.5,1.75)$
$x_3=\frac{1.5+1.75}{2}=1.625$	$f(1.625)=0.041(+)$	$(1.5,1.625)$
$x_4=\frac{1.5+1.625}{2}=1.5625$	$f(1.5625)=-0.310(-)$	$(1.5625,1.625)$

$\because 1.5625\approx1.6$，$1.625\approx1.6$，$\therefore$ 取 $x_3\approx1.6$.

综上，方程 $x^3=2x+1$ 的近似解（精确到0.1）是 $x_1=-1.0$，$x_2\approx-0.6$，$x_3\approx1.6$.

习题3.4(1)（P97）

1. (1) $f(1)=\lg1+2-5<0$，$f(3)=\lg3+6-5>0$，

$\therefore f(x)=\lg x+2x-5$ 在 $(1,3)$ 上存在零点.

(2) $f(1)=2+1-7<0$，$f(2)=4+4-7>0$，

$\therefore f(x)=2^x+x^2-7$ 在 $(1,2)$ 上存在零点.

(3) $f(0)=-1<0$，$f(1)=1+1-1>0$，

$\therefore f(x)=x^3+x-1$ 在 $(0,1)$ 上存在零点.

2. $\because \Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$，

$\therefore$ 方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根.

3. ①$m=0$ 时，$y=-6x+2$ 与 x 轴有一个公共点，符合题意，

②$m\neq0$ 时，$\Delta=0$ 即 $36-4m\times2=36-8m=0$，

$\therefore m=\frac{9}{2}$.

综上所述，当 $m=0$ 或 $\frac{9}{2}$ 时，$f(x)$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点.

4. 原方程可化为 $4x^2-12x+k-3=0$，

$\Delta=(12)^2-4\times4(k-3)=192-16k<0$，

即 $k>12$. $\therefore k\in(12,+\infty)$.

5. 设 $f(x)=5x^2-7x-1$，

$\because f(-1)=5+7-1=11>0$，$f(0)=-1<0$，

$\therefore f(-1)\cdot f(0)<0$.

$\therefore$ 存在 $x_1\in(-1,0)$，使 $f(x_1)=0$.

$\because f(1)=5-7-1=-3<0$，

$f(2)=20-14-1=5>0$.

$\therefore f(1)\cdot f(2)<0.\therefore$ 存在 $x_2\in(1,2)$，使 $f(x_2)=0$.

$\therefore$ 方程 $5x^2-7x-1=0$ 的根一个在区间 $(-1,0)$ 上，另一个在区间 $(1,2)$ 上.

6. 令 $f(x)=x^2-2x-2$，设两根为 x_1、x_2.

$\because f(-1)=1+2-2=1>0, f(0)=-2<0$,

$\therefore f(-1)\cdot f(0)<0$.

$\therefore x_1\in(-1,0)$.

$\because f(2)=-2<0, f(3)=9-6-2=1>0$,

$\therefore f(2)\cdot f(3)<0$.

$\therefore x_2\in(2,3)$.

用二分法可求得 $x_1\approx-0.7, x_2\approx2.7$.

7. 解法一：（因式分解法）

$x^2-3x-10=0,(x+2)(x-5)=0, x_1=-2, x_2=5$.

解法二：（公式法）

$x^2-3x-10=0, \Delta=9+40=49, x=\dfrac{3\pm7}{2}$,

$\therefore x_1=-2, x_2=5$.

8. 函数 $f(x)=7x^2-(m+13)x-m-2$

由题得：$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -m-2>0, \\ -2m-8<0, \\ -3m>0. \end{cases}$

所以 $-4<m<-2$.

9. (1) 令 $f(x)=\lg(2x)+x-1$，结合图象知 $f(x)=0$ 只有唯一解.

$\because f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}<0, f(1)=\lg2>0$,

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$.

$\therefore x\in(0.5,1)$. 下面用二分法求 x：

中点	中点函数值（符号）	取区间
		(0.5,1)
0.75	$f(0.75)=-0.07<0$	(0.75,1)
0.875	$f(0.875)=0.118>0$	(0.75,0.875)
0.812 5	$f(0.812\ 5)=0.023>0$	(0.75,0.812 5)

$\because 0.75\approx0.8, 0.812\ 5\approx0.8$,

$\therefore$ 所求方程近似解为 $x\approx0.8$.

(2) 令 $f(x)=3^x-x-4$，结合 $y=3^x$ 与 $y=x+4$ 的图象可知方程 $3^x=x+4$ 有两解 x_1，x_2.

$\because f(1)=3-1-4=-2<0, f(2)=9-2-4=3>0$,

$\therefore$ 存在 $x_1\in(1,2)$.

$\because f(-4)=3^{-4}>0, f(-3)=3^{-3}, -1<0$

$\therefore$ 存在 $x_2\in(-4,-3)$.

下面用二分法求 x_1，列表如下：

中点	中点函数值（符号）	取区间
		(1,2)
1.5	$f(1.5)=-0.30(-)$	(1.5,2)
1.75	$f(1.75)=1.09(+)$	(1.5,1.75)
1.625	$f(1.625)=0.34(+)$	(1.5,1.625)
1.562 5	$f(1.562\ 5)=0.003(+)$	(1.5,1.562 5)
1.5312 5	$f(1.5312\ 5)=-0.15(-)$	(1.5312 5,1.562 5)
1.546 875	$f(1.546\ 875)=-0.08(-)$	(1.546 875,1.562 5)
1.554 687 5	$f(1.554\ 687\ 5)=-0.04(-)$	(1.554 687 5,1.562 5)

$\because$ 1.5546875 和 1.5625 精确到 0.1 的近似值均为 1.6，$\therefore x_1\approx1.6$,

再求 x_2，列表如下：

中点	中点函数值（符号）	取区间
		(-4,-3)
-3.5	$f(-3.5)=-0.48(-)$	(-4,-3.5)
-3.75	$f(-3.75)=-0.23(-)$	(-4,-3.75)
-3.875	$f(-3.875)=-0.11(-)$	(-4,-3.875)
-3.937 5	$f(-3.937\ 5)=-0.049(-)$	(-4,-3.937 5)
-3.968 75	$f(-3.968\ 75)=-0.018(-)$	(-4,-3.968 75)

$\because$ 最后一个区间 $-3.968\ 75$ 精确到 0.1 的近似值为 -4.0

$\therefore x_2\approx-4.0$.

综上所述：所求方程 $3^x=x+4$ 的近似解为 $x_1\approx1.6, x_2\approx-4.0$.

10. 由题意知 $F(a)=f(a)-\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=\dfrac{f(a)}{2}-\dfrac{f(b)}{2}, F(b)=\dfrac{f(b)}{2}-\dfrac{f(a)}{2}$,

$F(a)$ 与 $F(b)$ 互为相反数，又 $f(x)$ 是一条不间断的

曲线.

所以函数 $F(x)$ 在 (a,b) 上有零点.

3.4.2　函数模型及其应用

教材课后习题答案

练习(P100)

1. $h=\dfrac{26-14.6}{0.6}\times 100=1\ 900$,即山高为 1 900m.

2. 设慢车行驶时间为 t min,则慢车行驶路程 s_1 与时间 t 的函数关系式是 $s_1=\dfrac{7.2}{16}t$,即 $s_1=0.45t(0\leqslant t\leqslant 16)$.

快车行驶路程 s_2 与慢车行驶时间 t 的函数关系式是

$s_2=\dfrac{7.2}{10}(t-3)$,即 $s_2=0.72(t-3)(3\leqslant t\leqslant 13)$.

由 $s_1=s_2$ 解得 $t=8$,此时 $s_1=s_2=3.6(\text{km})$,

即两车在慢车开出 8 min 后相遇,相遇时距始发站 3.6 km.

3. 由 $S=f(t)\cdot g(t)$ 得

$$S=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{4}t+22\right)\left(-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{109}{3}\right)(1\leqslant t\leqslant 40,t\in\mathbf{N})\\ \left(-\dfrac{t}{2}+52\right)\left(-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{109}{3}\right)(41\leqslant t\leqslant 100,t\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

即 $S=\begin{cases}-\dfrac{1}{12}t^2+\dfrac{7}{4}t+\dfrac{2\ 398}{3}(1\leqslant t\leqslant 40,t\in\mathbf{N})\\ \dfrac{1}{6}t^2-\dfrac{71}{2}t+\dfrac{5\ 668}{3}(41\leqslant t\leqslant 100,t\in\mathbf{N}).\end{cases}$

4. 设这两筐椰子原来共有 x 个,由题意得

$\left(\dfrac{300}{x}+1\right)(x-12)-300=78$. 解得 $x=120$ 或 -30 (舍去),

即两筐椰子原来共有 120 个.

练习(P104)

1. $y=0.498\ 3x+1.005\ 8$.

2. 将年份减去 1 985,再输入 Excel 工作表,可得 $y=0.014x^2+0.29x+8.6$. 当 $x=15$ 时,$y=16.1$,

即可预测 2000 年我国能源生产总量折合成标准煤将超过 16.1 亿吨.

习题 3.4(2)(P104)

1. $y=m(1+20\%)^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

2. $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{5}\sqrt{3-x}(0\leqslant x\leqslant 3)$.

3. (1) $y=1\ 000(1-10\%)^x(x\in\mathbf{N}^*)$

(2) $1\ 000(1-10\%)^x=1\ 000\times\dfrac{1}{2}$,

化简,得 $0.9^x=\dfrac{1}{2}$,

即 $x=\log_{0.9}\dfrac{1}{2}=\dfrac{-\lg 2}{2\lg 3-1}\approx 6.6$.

4. 设 $f(x)=px^2+qx+r(p\neq 0)$,$g(x)=ab^x+c$,则

$\begin{cases}p+q+r=f(1)=10\ 000,\\ 4p+2q+r=f(2)=12\ 000,\\ 9p+3q+r=f(3)=13\ 000;\end{cases}$

$\begin{cases}ab+c=g(1)=10\ 000,\\ ab^2+c=g(2)=12\ 000,\\ ab^3+c=g(3)=13\ 000.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}p=-500,\\ q=3\ 500,\\ r=7\ 000;\end{cases}\begin{cases}a=-8\ 000,\\ b=0.5,\\ c=14\ 000.\end{cases}$

$\therefore f(x)=-500x^2+3\ 500x+7\ 000$,

$g(x)=-8\ 000\cdot(0.5)^x+14\ 000$.

经比较用 $y=-8\ 000\cdot(0.5)^x+14\ 000$ 作为模拟函数较好.

5. 略.

复习题(P110)

1. (1) $2^x>\dfrac{1}{8}=2^{-3}$,所以 $x>-3$.

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$,所以 $x<-\dfrac{2}{3}$.

(3) $\log_2 x<\dfrac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$,所以 $0<x<\sqrt{2}$.

(4) $\log_{\frac{1}{3}}x>2=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$,所以 $0<x<\dfrac{1}{9}$.

2. (1) 考查函数 $y=x^{\frac{5}{6}}$,其在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

又 $0.31<0.35$,$\therefore 0.31^{\frac{5}{6}}<0.35^{\frac{5}{6}}$.

(2) 考查函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$,其在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,

又 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$,$\therefore(\sqrt{2})^{-\frac{1}{3}}>(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}$.

(3) 考查函数 $y=x^{1.5}$,其在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

又 $a+1>a$,$\therefore(a+1)^{1.5}>a^{1.5}$.

(4) 考查函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$,其在 $[2,+\infty)$ 上为减函数,

又 $2+a\geqslant 2$,$\therefore(2+a)^{-\frac{2}{3}}\leqslant 2^{-\frac{2}{3}}$.

3. (1) 由 $4+3x>0$ 得 $x>-\dfrac{4}{3}$,$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

(2) 由 $4^x-16\geqslant 0$,得 $x\geqslant 2$,$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$.

4. $\because$ 顶点为 $(1,16)$,$\therefore$ 设二次函数为 $y=a(x-1)^2+16$,由对称性可求二次函数图象与 x 轴的交点为 $(-3,0)$、$(5,0)$,把其中一个代入 $y=a(x-1)^2+16$,得 $16a+16=0$,$a=-1$.

$\therefore$ 所求二次函数解析式为 $y=-(x-1)^2+16$.

即 $y=-x^2+2x+15$.

5. $\because a-a^{-1}=1$，平方得 $a^2+a^{-2}=3$.

$\therefore \dfrac{(a^3+a^{-3})(a^2+a^{-2}-3)}{a^4-a^{-4}}=\dfrac{(a^3+a^{-3})(3-3)}{a^4-a^{-4}}=0.$

6. $(\lg 2)^3+3\lg 2\cdot\lg 5+(\lg 5)^3$

$=(\lg 2)^3+(\lg 5)^3+3\lg 2\cdot\lg 5$

$=(\lg 2+\lg 5)[(\lg 2)^2-\lg 2\cdot\lg 5+(\lg 5)^2)]+3\lg 2\cdot\lg 5$

$=(\lg 2)^2+2\lg 2\cdot\lg 5+(\lg 5)^2$

$=(\lg 2+\lg 5)^2=(\lg 10)^2=1.$

7. $\because a=0.3^2=0.09$，$b=2^{0.3}>2^0=1$ 且 $b=2^{0.3}<2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，$c=\log_{\sqrt{2}}2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$，$\therefore c>b>a$.

8. 利用计算器，可列表如下：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
$y=\log_2 x$	0	1	1.6	2	2.3	2.6	2.8	3	3.2	3.3
$y=x^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

指数函数成倍增长，增长最快，其次是幂函数，对数函数增长最慢.

9. $\because f(x)=a^x+b$ 过 $(0,-2)$、$(2,0)$ 两点，

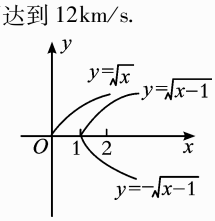
$\therefore \begin{cases}a^0+b=-2,\\ a^2+b=0(a>0).\end{cases}$ $\therefore a=\sqrt{3}$，$b=-3$.

10. $2\ 000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)=12\ 000$，$\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)=6$，

$1+\dfrac{M}{m}=e^6$，$\dfrac{M}{m}=e^6-1\approx 403.43-1=402.43.$

故当燃料质量是火箭质量的 (e^6-1) 倍，即约 402.43 倍时，火箭的最大速度可达到 12km/s.

11. $y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{x-1}$，$y=-\sqrt{x-1}$ 的图象如答图 42 所示. 把 $y=\sqrt{x}$ 的图象向右平移 1 个单位得 $y=\sqrt{x-1}$ 的图象，再作所得图象关于 x 轴对称的图象，得 $y=-\sqrt{x-1}$ 的图象.



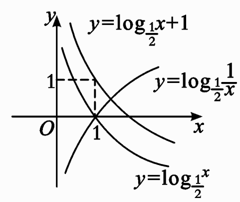
答图 42

12. 图象如答图 43 所示：

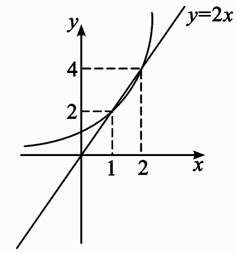
(1) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的图象可由函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象沿 y 轴向上平移 1 个单位得到.

(2) $\because$ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}=\log_{\frac{1}{2}}x^{-1}=-\log_{\frac{1}{2}}x$，

$\therefore$ 其图象可由函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象作关于 x 轴的对称图象得到.



答图 43



答图 44

13. 如答图 44.

由图可知，方程 $f(x)-g(x)=0$ 的根为 1，2.

14. 设 $f(x)=3tx^2+(3-7t)x+4$，则

$\begin{cases}3t>0,\\ f(0)>0,\\ f(1)<0\\ f(2)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3t<0,\\ f(0)<0,\\ f(1)>0,\\ f(2)<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}t>0,\\ 4>0,\\ -4t+7<0,\\ -2t+10>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t<0,\\ 4<0,\\ -4t+7>0,\\ -2t+10<0,\end{cases}$

$\therefore \dfrac{7}{4}<t<5$. $\therefore t$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{7}{4},5\right)$.

15. (1) 由 $\begin{cases}1+x>0,\\ 1-x>0\end{cases}$ 得 $y=f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，它关于原点对称.

$\because f(-x)=\lg(1-x)+\lg(1+x)=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

$f(x)=\lg(1-x)(1+x)=\lg(1-x^2)$，

设 $u=1-x^2$，$u\in(0,1]$.

$\because u=1-x^2$ 在 $(-1,0]$ 上是增函数，在 $[0,1)$ 上是减函数，

而 $y=\lg u$ 在 $u\in(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore y=f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上增函数，在 $[0,1)$ 上是减函数.

(2) 设 $y=f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，

由 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$ 得 $(x+1)(x-1)<0$，即 $-1<x<1$，

$\therefore$ 函数的定义域为 $\{x\mid -1<x<1\}$.

又 $f(-x)+f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

$=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\times\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\ln 1=0$，

$\therefore$ 函数为奇函数.

令 $u=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{x+1}$，可知此函数在定义区间 $(-1,1)$ 上为减函数，而函数 $y=\ln u$ 为增函数，

$\therefore$ 函数 $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$在区间$(-1,1)$上为减函数.

16. 设 $x=a^{\log_c b}$, $y=b^{\log_c a}$,对这两个等式的两边取以 c 为底数的对数,得 $\log_c x=\log_c b\log_c a$, $\log_c y=\log_c a\log_c b$,

所以 $\log_c x=\log_c y$,即 $x=y$. 所以 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$.

17. 由题意,$f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数,在$(-\infty,0]$上是减函数,且有$f(1)=f(-1)$.

由此$f(1)<f(\lg x)$等价于

$\begin{cases}\lg x\geqslant 0,\\ f(1)<f(\lg x)\end{cases}$ 或$\begin{cases}\lg x<0,\\ f(-1)<f(\lg x),\end{cases}$

即$\begin{cases}\lg x\geqslant 0,\\ 1<\lg x\end{cases}$ 或$\begin{cases}\lg x<0,\\ -1>\lg x,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x>10\end{cases}$ 或$\begin{cases}0<x<1,\\ 0<x<\frac{1}{10},\end{cases}$

$\therefore x>10$ 或 $0<x<\frac{1}{10}$.

$\therefore x$ 的取值范围是$(0,\frac{1}{10})\cup(10,+\infty)$.

18. 由于A、B是过原点O的直线与函数$y=\log_8 x$的图象的交点,故可设$A(x_1,\log_8 x_1)$,$B(x_2,\log_8 x_2)$,且$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}\Rightarrow\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{\log_2 x_2}{x_2}$.

(1)根据题意,C、D两点的坐标可以设为$C(x_1,\log_2 x_1)$,$D(x_2,\log_2 x_2)$.

$\because\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{\log_2 x_2}{x_2}$,$\therefore O$、$C$、$D$三点共线.

(2)当$BC/\!/x$轴时,有$\log_8 x_2=\log_2 x_1$,$\therefore x_2=x_1^3$,

$\therefore\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{\log_2 x_1^3}{x_1^3}$,即$x_1^2=3$. 又$x_1>0$,

$\therefore x_1=\sqrt{3}$,$\log_8 x_1=\frac{1}{2}\log_8 3$.

$\therefore$ 点A的坐标为$(\sqrt{3},\frac{1}{2}\log_8 3)$.

本章测试(P112)

1. -2 【解析】$(-2)^5=-32$.

2. $<$ 【解析】$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$是减函数,$\therefore\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.9}$.

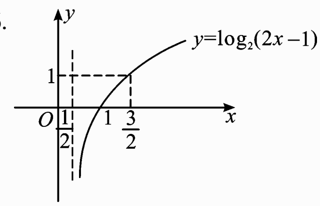
3. $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$ 【解析】$3-4x>0$ 得 $x<\frac{3}{4}$.

4. $1\ 000\times1.05^x$

5. 2 【解析】当$a>1$时,$f(x)_{\max}=f(1)$,$f(x)_{\min}=f(0)$即$a+1=3$得$a=2$;

当$0<a<1$时,$f(x)_{\max}=f(0)=1$,$f(x)_{\min}=f(1)=a$即$a+1=3$,$a=2$但$0<a<1$,故不合题意.

6.



答图 45

7. D 【解析】A 在$(0,+\infty)$上是增函数;B 在$(0,+\infty)$上是增函数;C 在$(0,+\infty)$上是增函数.

8. A 【解析】由$f(2)>f(3)$得$0<a<1$.

9. B 【解析】当$x=0$时,y有最大值 1.

10. D 【解析】令$10^x=t$则$x=\lg t$,$\therefore f(t)=\lg t$即$f(5)=\lg 5$.

11. (1)因为$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=9$,即$a+\frac{1}{a}+2=9$,

所以$a+a^{-1}=7$.

(2)$a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=49-2=47$.

(3)因为$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=5$,所以$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{5}$,所以原式$=\frac{7}{\pm\sqrt{5}}=\pm\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

12. (1)原式$=\lg 25+\lg 2(\lg 50+\lg 2)=\lg 25+2\lg 2=\lg 100=2$.

(2)原式$=3+4+4=11$.

13. (1)函数$f(x)=2^x+x-5$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增函数.

(2)因为$f(1)=-2<0$,$f(2)=1>0$,所以$f(1)f(2)<0$,函数$f(x)=2^x+x-5$在区间$(1,2)$上有零点,故方程$2^x+x-5=0$在区间$(1,2)$上有实数根.

14. (1)图略. (2)依题意,不妨设$a<b$,因为$|\lg a|=|\lg b|$,由图象可知$0<a<1$,$b>1$,所以$-\lg a=\lg b$,可得$\lg a+\lg b=0$,即$\lg ab=0$,故$ab=1$.

15. (1)因为$f(x)$是奇函数,所以$1-\frac{m}{5^{-x}+1}=-(1-\frac{m}{5^x+1})$对于$x\in\mathbf{R}$恒成立,化简后得$(m-2)(5^x+1)=0$,故$m-2=0$,即$m=2$.

(2)设x_1,x_2为任意两个实数,且$x_1<x_2$,则$5^{x_1}<5^{x_2}$. 因为$f(x_1)-f(x_2)<0=-\frac{2}{5^{x_1}+1}+\frac{2}{5^{x_2}+1}=\frac{2(5^{x_1}-5^{x_2})}{(5^{x_1}+1)(5^{x_2}+1)}<0$,所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.

(3)因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,所以$x\in[-1,2)$时,

$f(-1)\leqslant f(x)<f(2)$. 又因为$f(-1)=-\frac{2}{3}$,$f(2)=\frac{12}{13}$,所以当$x\in[-1,2)$时,$f(x)$的值域为$\left[-\frac{2}{3},\frac{12}{13}\right)$.