答案与解析

第一章　集合与函数概念

1.1　集合

1.1.1　集合的含义与表示

课时1　集合的含义与表示

★ 课堂作业 ★

1. C

2. D 【解析】由题意知 a 应为无理数,故 a 可以为$\sqrt{7}$.

3. C 【解析】$M=\{-1,2,3\}$.

4. ①②⑤⑥

5. 2 【解析】$\sqrt{x^2}=|x|,-\sqrt[3]{x^3}=-x$.

6. $\because A=B,\therefore b=0,A=\{a,0,1\},B=\{a^2,a,0\}$.
$\therefore a^2=1$,得 $a=\pm1,a=1$ 时,$A=\{1,0,1\}$不满足互异性,舍去;$a=-1$ 时,满足题意.$\therefore a^{2013}+b^{2014}=-1$.

7. $\because 5\in A$,且 $5\notin B$,
$\therefore\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\a+3\neq5,\end{cases}$即$\begin{cases}a=-4\text{ 或 }a=2,\\a\neq2.\end{cases}\therefore a=-4$.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】①③正确;②中 $-0\notin\mathbf{N}^*$,但 $0\notin\mathbf{N}^*$,④中方程 $x^2+9=6x$ 的解集为$\{3\}$.

2. C

3. C 【解析】由题意知 $x^2+x=2$,即 $x^2+x-2=0$.解得 $x=-2$或 $x=1$.

4. D 【解析】因集合中的元素全不相同,故三角形的三边各不相同.所以该三角形不可能是等腰三角形.

5. D 【解析】当 $x>0,y>0,z>0$ 时,代数式的值为4,所以 $4\in M$,故选 D.

6. D 【解析】对于 A,$[a*(b*a)]*(a*b)=b*(a*b)=a$,故 A 正确;对于 B,$b*(b*b)=b$,显然成立,故 B 正确;对于 C,令 $a*b=c$,则 $c*(b*c)=b$ 成立,故 C 正确;对于 D,$a*(b*a)=b$ 的 a 和 b 互换,得到 $b*(a*b)=a$,在此式的两端分别进行$(a*b)*$运算,得到$(a*b)*[b*(a*b)]=(a*b)*a$,左端是选项 C 中等式的左端,所以$(a*b)*a=b$,故 D 不恒成立.

7. 1 【解析】这样的三角形只有1个,是两腰长为6,底边长为3的等腰三角形.

8. 2 或 4

9. $\{0,1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ 【解析】因为集合中的元素具有互异性,故集合中的元素互不相同,即$\begin{cases}x-1\neq x^2-1,\\x-1\neq2,\\x^2-1\neq2.\end{cases}$解得 $x\neq0$ 且 $x\neq1$ 且 $x\neq3$ 且 $x\neq\pm\sqrt{3}$.

10. ③④ 【解析】①违背了元素的互异性,②$\mathbf{R}=\{$实数$\}$,花括号已是全体的意思了,表示实数集时,不能再在花括号中写“全体”二字;④中集合$\{x-5>0\}$只有一个元素.此元素为不等式 $x-5>0$.

11. 若 $-3\in A$,则 $a-2=-3$ 或 $2a^2+5a=-3$.若 $a-2=-3$,则 $a=-1$,此时 $2a^2+5a=2\times1-5=-3$,集合 $A=\{-3,-3,10\}$,这违背了集合元素的互异性,所以 $a=-1$ 应舍去;若 $2a^2+5a=-3$,可解得 $a=-\frac{3}{2}$或 $a=-1$(舍去),当 $a=-\frac{3}{2}$时,$a-2=-\frac{7}{2}$,此时集合 $A=\left\{-\frac{7}{2},-3,10\right\}$符合要求,所以 $a=-\frac{3}{2}$.

12. (1)由于2的倒数为$\frac{1}{2}$不在集合 A 中,故集合 A 不是可倒数集.
(2)若 $a\in A$,则必有$\frac{1}{a}\in A$,现已知集合 A 中含有3个元素,故必有一个元素有 $a=\frac{1}{a}$,即 $a=\pm1$,故可以取集合 $A=\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$或$\left\{-1,2,\frac{1}{2}\right\}$或$\left\{1,3,\frac{1}{3}\right\}$等.

13. (1)$\because 2\in S,\therefore\frac{1}{1-2}\in S$,即 $-1\in S$.$\therefore\frac{1}{1-(-1)}\in S$,即$\frac{1}{2}\in S$.故 $-1,\frac{1}{2}$均是集合 S 中的元素.
(2)$\because a\in S,\therefore\frac{1}{1-a}\in S,\therefore\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}\in S$,故 $1-\frac{1}{a}\in S$.
(3)不能只有一个.理由:假设 S 中只有一个元素,则 $a=\frac{1}{1-a}$,即 $a^2-a+1=0$,由于 $\Delta=1-4=-3<0$,故方程无实数解,$\therefore$集合 S 中不能只有一个元素.

课时2　集合的表示法

★ 课堂作业 ★

1. B

2. B

3. B

4. ②③⑤

5. $\{0,1,3\}$ 【解析】$\because y=|x|,x\in A,\therefore y=1,0,3,\therefore B=\{0,1,3\}$.

6. (1)$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$　(2)$\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$

(3) $\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}x>0,\\y<0\end{array}\right\}$

7. $\{2\}$

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】首先元素与集合关系只能用符号“$\in$”与“$\notin$”表示. 集合中元素意义不同的不能用“$=$”连接，再有 $a=\sqrt{24}>\sqrt{23}$，a 不是集合 M 的元素，故 $a\notin M$. 另外 $\{a|a=2\sqrt{6}\}$ 中只有一个元素 $2\sqrt{6}$ 与集合 M 中元素不相同. 故 D 错误.

2. B 【解析】依据题目条件直接计算. 由题意可知，集合 $M=\{5,6,7,8\}$，共 4 个元素.

3. C 【解析】A 中 M，N 都是点集，但不是同一个点；B 中 M 是点集，N 是数集；D 中 M 是数集，N 是点集，故选 C.

4. C 【解析】坐标轴上的点的横、纵坐标至少有一个为 0，故选 C.

5. D 【解析】将各选项中的点分别代入二次函数 $y=3x^2-2x-5$ 和反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 中进行验证.

6. B 【解析】集合 M 表示以定点 A 为圆心，3 为半径的圆上的点的集合，由 $|BA|=2$，知点 B 在圆 M 内.

7. $\notin$　$\in$　【解析】$-7=4\times(-2)+1\in A$.

令 $4k+1=-1$，则 $k=-\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$. $\therefore -1\notin A$.

8. (1) $\notin$　(2) $\notin$　(3) $\in$　(4) $\notin$

9. $\{x|-2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 4\}$

10. $\{-1,2,3,4\}$　【解析】$5-m$ 能整除 6，则 $5-m=1,2,3,6$，从而 $m=4,3,2,-1$.

11. (1) $\because |x|\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}$，

$\therefore -2\leqslant x\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x=-2,-1,0,1,2$.

$\therefore A=\{-2,-1,0,1,2\}$.

(2) $\because$ 1 和 2 是方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的根，

$\therefore B=\{1,2\}$.

(3) $\because x+y=4, x\in\mathbf{N}^*, y\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore \begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

$\therefore M=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

12. $\because \{x|x^2+ax+b=0\}=\{2\}$，$\therefore$ 方程 $x^2+ax+b=0$ 有两相等实根. 由根与系数的关系得 $a=-(2+2)=-4$，$b=2\times2=4$.

13. (1) 因为 $0=0+0\cdot\sqrt{2}$，所以 $0\in A$.

(2) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=1+1\cdot\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\in A$.

(3) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1\cdot\sqrt{2}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\notin A$.

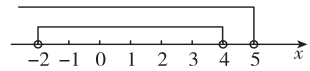
1.1.2　集合间的基本关系

★ 课堂作业 ★

1. D

2. D

3. A 【解析】



第 3 题图

故选 A.

4. (1) $\in$　(2) $\subseteq$　(3) $\supseteq$

5. 3 个　【解析】由“若 $x\in A$，则 $5-x\in A$”可知，1 和 4，2 和 3 成对的出现在 A 中，且 $A\neq\varnothing$. 故集合 A 的个数等于集合 $\{1,2\}$ 的非空子集的个数，即 3 个.

6. $a\leqslant -1$　【解析】数形结合，端点处单独验证.

7. 因为 $B\subseteq A$，所以 B 中元素 $1, a^2-a+1$ 都是 A 中的元素，故分两种情况.

(1) $a^2-a+1=3$，解得 $a=-1$ 或 2，经检验满足条件.

(2) $a^2-a+1=a$，解得 $a=1$，此时 A 中元素重复，舍去.

综上所述，$a=-1$ 或 $a=2$.

【解析】对于第 2 种情况求得 $a=1$ 后不检查是否符合互异性，容易导致错误答案.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】集合 M 是点集，即 $M=\{(3,-2)\}$，集合 N 是数集，二者代表元素的类型不同，所以集合 M，N 无公共元素.

2. B 【解析】结合数轴可知. 若 $A\subsetneqq B$，则 $a>2\,015$.

3. C 【解析】设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，

$\because a\neq 0$，$\therefore a+b=0, a=-b$. $\therefore \dfrac{b}{a}=-1$. $\therefore a=-1, b=1$. $\therefore b-a=2$.

4. B 【解析】由 $N=\{x|x^2+x=0\}$，得 $N=\{-1,0\}$，而 $M=\{-1,0,1\}$，故 $N\subsetneqq M$.

5. B 【解析】令 $n=2m, m\in\mathbf{Z}$，则 $(2n+1)\pi=(4m+1)\pi$，此时，就是 $(4k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$，$\therefore Y\subseteq X$，又当 $n=2m+1$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，则 $(2n+1)\pi=(4m+3)\pi\notin Y$，$\therefore Y\subsetneqq X$，故选 B.

6. B 【解析】对于集合 A 有：$x=\dfrac{6m+1}{6}, m\in\mathbf{Z}$；对于集合 B 有：$x=\dfrac{3(n-1)+1}{6}, n\in\mathbf{Z}$；对于集合 C 有：$x=\dfrac{3p+1}{6}, p\in\mathbf{Z}$.

通过对三个集合元素的拆分，不难看出，集合 A 中元素的特征：分子是整数 6 倍加 1；集合 B 和集合 C 中元素的特征：分子都是整数 3 倍加 1. 故 $A\subsetneqq B=C$.

7. 8 【解析】集合 $\{-1,0,1\}$ 的子集有 $\varnothing$，$\{-1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{-1,0\}$，$\{-1,1\}$，$\{0,1\}$，$\{-1,0,1\}$ 共 8 个，也可用公式 $2^3=8$ 计算得出. .

8. $N\subsetneqq M$

9. $\{0,1,3\}$　【解析】当 $B=\varnothing$ 时，$m=0$；当 $1\in B$ 时，$m=3$；当 $3\in B$ 时，$m=1$. 综上可知 $m=0$ 或 1 或 3.

10. $A\subsetneqq B$　【解析】由符号“$\subseteq$”的定义知，B 中的元素为 A 的子集，而 A 的子集有 4 个，即 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，所

以集合$B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. 因此 $A\subsetneqq B$.

11. 假设$\begin{cases} m+d=mq, & ① \\ m+2d=mq^2 & ②,\end{cases}$ 则由②−①得,$d=m\cdot(q^2-q)$. ③ 由 $m\neq 0$,将③代入①中,整理得,$q^2-2q+1=0$,即 $q=1$. 于是 $m=mq=mq^2$,与集合元素的互异性矛盾. 所以假设不成立. 故只有$\begin{cases} m+d=mq^2, \\ m+2d=mq,\end{cases}$ 解得 $q_1=-\dfrac{1}{2}$,$q_2=1$(舍去). 经检验,$q=-\dfrac{1}{2}$符合题意.

12. (1)由 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$,得 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.
$\because B\subseteq A$,$\therefore$ ①若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1$,即 $m<2$,此时满足 $B\subseteq A$;②若 $B\neq\varnothing$,则$\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ -2\leqslant m+1, \\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$. 由①②得,$m\leqslant 3$.

(2)若 $A\subseteq B$,则依题意应有$\begin{cases} 2m-1>m-6, \\ m-6\leqslant -2, \\ 2m-1\geqslant 5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases} m>-5, \\ m\leqslant 4, \\ m\geqslant 3,\end{cases}$ 故 $3\leqslant m\leqslant 4$.

13. $\because A=\{x\mid x^2+4x=0\}=\{0,-4\}$;又因为 $B\subseteq A$,所以存在 $B=\varnothing$,$\{0\}$,$\{-4\}$,$\{0,-4\}$这四种可能.

①当 $B=\varnothing$时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无解,从而 $\Delta=[2(a+1)]^2-4(a^2-1)=8a+8<0$,解得 $a<-1$;

②当 $B=\{0\}$时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个等根,从而应有$\begin{cases} \Delta=8a+8=0, \\ a^2-1=0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$;

③当 $B=\{-4\}$时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个等根,从而应有$\begin{cases} \Delta=8a+8=0, \\ a^2-8a+7=0,\end{cases}$ 此时 a 无解;

④当 $B=\{0,-4\}$时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个不等根,从而应有$\begin{cases} \Delta=8a+8>0, \\ a^2-8a+7=0, \\ a^2-1=0,\end{cases}$ 所以 $a=1$.

综上可得,实数 a 的取值集合是$\{a\mid a\leqslant -1$,或 $a=1\}$.

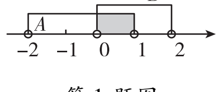
【解析】因为 $B\subseteq A$,故应该注意 $B=\varnothing$时的情况. 本题要注意运用分类讨论的思想,先将 A 的子集写出来,然后进行逐个讨论. 同时也要注意一元二次方程的根与判别式的关系.

1.1.3 集合的基本运算

课时1 交集与并集

★ 课堂作业 ★

1. D **【解析】**



第1题图

故选 D.

2. C **【解析】**$\because A=\{1,2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$,$\therefore B=\{3\}$或$\{1,3\}$或$\{2,3\}$或$\{1,2,3\}$,故选 C.

3. C

4. 1

5. 4 **【解析】**由已知得 $A\subseteq(B\cap C)=\{0,2\}$,$\therefore A$ 有 $2^2=4$ 个.

6. 由条件知 $4\in P$,$6\notin P$,$10\in P$,$8\notin P$,$\therefore P=\{4,10\}$.

7. (1)$\because A\cup B=B$,$A\subseteq B$,
$\therefore a>-3$.
(2)$\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$.
$\therefore a\leqslant -3$.

★ 课后作业 ★

1. C **【解析】**由题意可知,集合 $N=\{-1,0\}$,所以 $M\cup N=M$.

2. D **【解析】**$\because A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,$A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$. $\therefore\begin{cases} a^2=16, \\ a=4.\end{cases}$ $\therefore a=4$.

3. B **【解析】**$\because$ 集合 $M=\{-2,-1,0,1\}$,集合 $N=\{-1,0,1,2,3\}$,$\therefore M\cap N=\{-1,0,1\}$.

4. C **【解析】**$A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$为偶数集,$B=\{y\mid y=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$为奇数集,$\therefore A\cap B=\varnothing$.

5. D **【解析】**$S=\left\{x\mid x>-\dfrac{1}{2}\right\}$,$T=\left\{x\mid x<\dfrac{5}{3}\right\}$,在数轴上表示出 S 和 T,可知选 D.

6. B

7. ②③④ **【解析】**①是错误的,$a\in(A\cup B)$时可推出 $a\in A$ 或 $a\in B$,不一定推出 $a\in A$.

8. 2 **【解析】**①②都等价.

9. 2 **【解析】**$A\cap B$ 中含 1 个元素.

10. 8 **【解析】**由条件知,每名同学至多参加两个小组,故不可能出现一名同学同时参加数学、物理、化学课外探究小组. 设参加数学、物理、化学小组的人数构成的集合分别为 A,B,C,则 $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=0$,$\mathrm{card}(A\cap B)=6$,$\mathrm{card}(B\cap C)=4$. 由公式 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$,易知 $36=26+15+13-6-4-\mathrm{card}(A\cap C)$,故 $\mathrm{card}(A\cap C)=8$,即同时参加数学和化学小组的有 8 人.

11. $\because B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$,$A\cup B=\mathbf{R}$,
$\therefore\begin{cases} 2a<-1, \\ a+8\geqslant 5,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a<-\dfrac{1}{2}$.

第 11 题图

12. $\because A\cap B=A$,$\therefore A\subseteq B$. 又$\because A$ 为非空集合,$\therefore$ 可以利用数轴表示它们的包含关系,由数轴得$\begin{cases} a+1\leqslant 2a-3, \\ a+1\geqslant 2, \\ 2a-3\leqslant 9.\end{cases}$ 解得

$4\leqslant a\leqslant 6$.

13. (1) $\because A\cap B=\{a_1,a_4\}$, $\therefore a_1,a_4\in B$. $\therefore a_1\geqslant 0,a_4>0$. $\therefore a_1,a_4$ 为平方数，且 $a_1,a_4\in \mathbf{Z}$. 又 $\because a_1+a_4=10$, $\therefore a_1=1,a_4=9$.

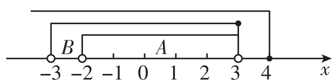
(2) $\because 9\in B$, $\therefore 3\in A$. 由(1)知, $9\in A$, $\therefore 81\in B$. $\because 1<a_2<a_3<9<a_5$, $\therefore 1<a_2^2<a_3^2<81<a_5^2$. $\therefore 224-(1+3+9+81)=130$, $\therefore 81<a_5^2<130$，若 $a_5=11$，则 $a_5^2+a_5=121+11=132>130$，不合题意，舍去. $\therefore$ 经检验知, $a_5=10$.

(3) 设集合 A 中另一未知元素为 x，则 $x+x^2=224-(3+10+1+9+81+100)=20$, $\therefore$ 经检验知, $x=4$ ($x=-5$ 不合题意，舍去). $\therefore$ 集合 $A=\{1,3,4,9,10\}$.

课时 2　全集与补集

★ 课堂作业 ★

1. C
2. D
3. B
4. $\{1,2,4\}$　【解析】因为 $\complement_U Q=\{1,4\}$，所以 $P\cup(\complement_U Q)=\{1,2,4\}$.
5. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　【解析】由于 $\complement_U B=\{x|x\leqslant 1\}$，因此 $A\cap(\complement_U B)=\{x|0<x\leqslant 1\}$.
6. 如图, $\complement_U A=\{x|x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$, $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$,



第 6 题图

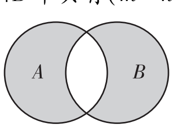
$\complement_U(A\cap B)=\{x|x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$,

$(\complement_U A)\cap B=\{x|-3<x\leqslant -2$ 或 $x=3\}$.

7. $\complement_U A=\{5\}$ 包含两层意义，①$5\notin A$；②U 中除 5 以外的元素都在 A 中. $\therefore |a-5|=3$，解得 $a=2$ 或 8.

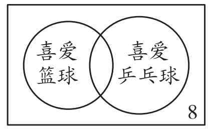
★ 课后作业 ★

1. C　【解析】$A=\{x|-2<x<2\}$, $\complement_U B=\{x|x\leqslant a\}$，在数轴上把 A、B 表示出来.
2. A　【解析】集合 M 是非空集合，对集合 M 中任一元素 x, $x\in M$. $\because M\subseteq N\subseteq U$, $\therefore x\in N$. $\therefore x\notin \complement_U N$. 又若 $y\in \complement_U N$，则 $y\notin N$. $\because M\subseteq N$, $\therefore y\notin M$. $\therefore M\cap(\complement_U N)=\varnothing$.
3. C　【解析】①②③都等价.
4. A
5. C
6. D　【解析】如图，由 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，知图中阴影为 $\complement_U(A\cap B)$，其中有 n 个元素. 又 $A\cup B$ 中共有 m 个元素，所以 $A\cap B$ 中共有 $(m-n)$ 个元素.



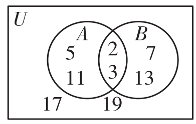
第 6 题图

7. $\{a|a\geqslant 2\}$
8. $\{x|x<-1\}$　【解析】$\because M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $\therefore \complement_{\mathbf{R}}M=\{x|x>2$，或 $x<-1\}$. $\therefore (\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=\{x|x>2$，或 $x<-1\}\cap\{x|x<1\}=\{x|x<-1\}$.
9. 12　【解析】设喜爱篮球但不喜爱乒乓球的人数为 x，由图知, $x+10+8=30$, $\therefore x=12$(人).



第 9 题图

10. 答案不唯一，如 $\{5\}$ 或 $\{2,5\}$ 或 $\{2,4,5\}$……　【解析】由题意, $5\in A$，且 A 中是否再含 B 中的元素则不影响等式 $A-B=\{5\}$，因此 $A=\{5\}$ 或 $\{2,5\}$ 或 $\{2,4,5\}$……
11. $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，作出 Venn 图如图所示, $A=\{2,3,5,11\}$, $B=\{2,3,7,13\}$.



第 11 题图

12. $\because x=a^2+4a+1=(a+2)^2-3\geqslant -3$,

$\therefore P=\{x|x\geqslant -3\}$.

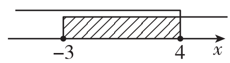
又 $\because y=-b^2+2b+3=-(b-1)^2+4\leqslant 4$,

$\therefore Q=\{y|y\leqslant 4\}$.

利用数轴，如图可知 $P\cap Q=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$

又 $\because \complement_{\mathbf{R}}Q=\{y|y>4\}$,

$\therefore P\cup(\complement_{\mathbf{R}}Q)=\{x|x\geqslant -3\}$.



第 12 题图

13. 设 x_1,x_2 是 $x^2-5x+q=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=5$, $\because x_1\neq x_2$，否则 $x_1=x_2=\dfrac{5}{2}\notin U$，这与 $A\subseteq U$ 矛盾，而由 $A\subseteq U$ 知 $x_1,x_2\in U$. 又 $1+4=2+3=5$, $\therefore q=4$ 或 6.

$\therefore \complement_U A=\{2,3,5\}$ 或 $\complement_U A=\{1,4,5\}$.

1.1.4　集合(习题课)

★ 课堂作业 ★

1. A
2. A　【解析】$P=\{x|x=1+(a-2)^2,a\in\mathbf{N}^*\}$，当 $a=2$ 时, $x=1$，而 M 中无元素 1, P 比 M 多一个元素.
3. B
4. $\{2\ 010,2\ 011\}$
5. $\notin$　$\in$　【解析】$\because B\cap M=\varnothing$, $\therefore -4\notin M,2\notin M$.

又 $A\cap M\neq\varnothing$ 且 $2\notin M$, $\therefore 3\in M$.

6. 由 $A\cap B=\{3\}$，知 $3\in M$，得 $p=8$. 由此得 $M=\{3,5\}$，从而 $N=\{3,2\}$，由此得 $a=5,b=-6$.

★ 课后作业 ★

1. A
2. D　【解析】由交集定义可知，3 既是集合 S 中的元素，也

是集合 M 中的元素. 亦即是方程 $x^2-px+15=0$ 与 $x^2-5x+q=0$ 的公共解,把 3 代入两方程,可知 $p=8,q=6$,则 $p+q$ 的值为 14.

3. C 【解析】$A=\{1,2,-2\}$,而 B 的补集是 $\{y|y<0\}$,故两集合的交集是 $\{-2\}$,选 C.

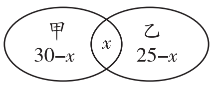
4. C

5. A

6. B 【解析】设两项都参加的有 x 人,则只参加甲项的有 $(30-x)$ 人,只参加乙项的有 $(25-x)$ 人,如图所示.

$\because (30-x)+x+(25-x)=50, \therefore x=5.$

$\therefore$ 只参加甲项的有 25 人,只参加乙项的有 20 人,$\therefore$ 仅参加一项的有 45 人. 故选 B.



第 6 题图

7. C 【解析】方程 $x^2-3x-a^2+2=0$ 的根的判别式是 $\Delta=1+4a^2>0$,方程有两个不相等的实数根,故 M 中有 2 个元素. 所以集合 M 有 $2^2=4$ 个子集. 故选 C.

8. $\{\varnothing,\{2\}\}$ 【解析】$P=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,$Q=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{3,2\}\}$,$P\cap Q=\{\varnothing,\{2\}\}$.

9. $\pm\sqrt{3}$或 0 【解析】由 $A\cup B=\{1,3,x\}$,$B\subsetneqq A$,

$\therefore x^2\in A. \therefore x^2=3$ 或 $x^2=x$,

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$或 $x=0$,$x=1$(舍).

10. $\{1,3,x^2-2=0\}$ 【解析】在全集 U 中除去 A 中的元素后所组成的集合即为$\complement_U A$,故$\complement_U A=\{1,3,x^2-2=0\}$.

11. $B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$,由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$与 $A\cap C=\varnothing$同时成立可知,3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解,将 3 代入方程得 $a^2-3a-10=0$,解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时,$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,此时 $A\cap C=\{2\}$,与题设 $A\cap C=\varnothing$矛盾,故不适合. 当$a=-2$ 时,$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$,此时$A\cap B\supsetneqq\varnothing$与 $A\cap C=\varnothing$同时成立,则满足条件的实数$a=-2$.

12. $\because A\cap \mathbf{R}_+=\varnothing$,

$\therefore$ 方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 没有正实数解,故 A 集合有两种情况:

①若 $A=\varnothing$,则 $\Delta=(p+2)^2-4<0$,即 $-4<p<0$;

②若 $A\neq\varnothing$,则方程有两个非正数解,而且 0 不是其解,

于是有$\begin{cases}(p+2)^2-4\geqslant 0,\\-(p+2)<0,\end{cases}$解得 $p\geqslant 0$.

综上所述,$p>-4$.

13. (1)如 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{2,5,6,7,8\}$,则$A-B=\{1,3,4\}$,$B-A=\{6,7,8\}$.

(2)由(1)知:$A-B$ 与 $B-A$ 不一定相等.

(3)因为 $A-B=\{x|x\geqslant 6\}$,所以 $A-(A-B)=\{x|4<x<6\}$.

又 $B-A=\{x|-6<x\leqslant 4\}$,所以 $B-(B-A)=\{x|4<x<6\}$.

由此得出结论 $A-(A-B)=B-(B-A)$.

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念

★ 课堂作业 ★

1. B

2. D 【解析】由 $1-x^2\geqslant 0$,知 $-1\leqslant x\leqslant 1$,$\therefore M=[-1,1]$,$\therefore \complement_R M=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

3. C

4. (1)$[1,+\infty)$ (2)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (3)$\{1\}\cup[2,8]$

5. $\frac{1}{2}$或 2

6. (1)不是 (2)不是 (3)是

7. (1)$\because y=\frac{3x+2}{x-2}=\frac{3x-6+8}{x-2}=3+\frac{8}{x-2}$,其中$\frac{8}{x-2}\neq 0$,$\therefore y\neq 3$. $\therefore y=\frac{3x+2}{x-2}$的值域是$\{y|y\in\mathbf{R}$,且$y\neq 3\}$.

(2)$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,其图象是开口向下的抛物线,顶点坐标为$(-1,4)$.

$\therefore x\in[-5,-2]$在抛物线对称轴 $x=-1$ 的左边取值.

$\therefore x\in[-5,-2]$时,抛物线上升.

$\therefore$ 当 $x=-5$ 时,$y_{\min}=-12$;当 $x=-2$ 时,$y_{\max}=3$.

$\therefore y=-x^2-2x+3(-5\leqslant x\leqslant -2)$的值域是$[-12,3]$.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】②若函数有意义,则$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x\leqslant 1,\end{cases}$得定义域为$\varnothing$,则②不是函数,其他都符合函数的概念.

2. C 【解析】由题意知,$-2\leqslant 3x-2\leqslant 4$,$\therefore 0\leqslant x\leqslant 2$,即定义域为$[0,2]$.

3. B 【解析】A 项中,当 $0<x\leqslant 2$ 时,每一个 x 都没有 y 与它对应,故不可能是函数的图象;B 项中,$-2\leqslant x\leqslant 2$ 时,每一个 x 都有唯一的 y 值与它对应,故它是函数的图象且是 $f(x)$ 的图象;C 项中,$-2\leqslant x<2$ 时,每一个 x 都有两个不同的 y 值与它对应,故它不是函数的图象;D 项中,$-2\leqslant x\leqslant 2$ 时,每一个 x 都有唯一的 y 值与它对应,故它是某个函数的图象,但函数的值域不是 $N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$,故它是某个函数的图象但不是 $f(x)$ 的图象.

4. C 【解析】$\because f(1)=0,f(2)=0$,$\therefore \begin{cases}1+p+q=0,\\4+2p+q=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}p=-3,\\q=2.\end{cases}$ $\therefore f(x)=x^2-3x+2. \therefore f(-1)=6.$

5. D

6. B 【解析】由题意知,$(1,2)\otimes(p,q)=(p-2q,2p+q)=(5,0)$,$\therefore \begin{cases}p-2q=5,\\2p+q=0.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}p=1,\\q=-2.\end{cases}$ $\therefore (1,2)\oplus(p,q)=(1,2)\oplus(1,-2)=(2,0)$.

7. $\{-1,1,5,11\}$

8. 6 【解析】解法 1：$g(x+1)=(x+1)^2+2$，$\therefore g(x)=x^2+2$. 解法 2：$g(2)=g(1+1)=1^2+2\times1+3=6$. 故 $g(2)=6$.

9. $(-\infty,4]$ 【解析】令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-t^2(t\geqslant0)$，$y=2x+4\sqrt{1-x}=2-2t^2+4t=-2(t-1)^2+4$，$\therefore y\leqslant4$. 故函数值域为 $(-\infty,4]$.

10. $y=-x^2+\dfrac{a}{2}x\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$

11. $A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|x<a\}$.

(1)若 $B\subsetneqq A$，则 $a<3$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\{a|a<3\}$；

(2)若 $A\subsetneqq B$，则 $a>3$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\{a|a>3\}$.

12. $\because ax+1\geqslant0$，$a<0$，

$\therefore x\leqslant-\dfrac{1}{a}$，即定义域为 $\left\{x\left|x\leqslant-\dfrac{1}{a}\right.\right\}$

$\because$ 函数在区间 $(-\infty,1]$ 上有意义，

$\therefore(-\infty,1]\subseteq\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right]$.

$\therefore -\dfrac{1}{a}\geqslant1$ 而 $a<0$.

$\therefore -1\leqslant a<0$，即 a 的取值范围是 $[-1,0)$.

13. $\because x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，$\therefore$ 令 $x=y=\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(\pi)+f(0)=2f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. 又令 $x=y=0$，则 $2f(0)=2f^2(0)$. $\because f(0)\neq0$，$\therefore f(0)=1$. $\therefore f(\pi)=2\times0^2-1=-1$. 令 $x=y=\pi$，$\therefore f(2\pi)+f(0)=2f^2(\pi)$. $\therefore f(2\pi)=2\times(-1)^2-1=1$.

1.2.2 函数的表示法

课时 1 函数的表示法

★ 课堂作业 ★

1. B

2. B

3. D 【解析】$t=0$ 时，学生在家，离学校的距离 $d\neq0$，因此排除 A，C；学生先跑后走，因此 d 随 t 的变化是先快后慢.

4. 1

5. 1 或 3 【解析】因 $f(3)=1$，

当 $x=1$ 时，$f(f(x))=f(f(1))=f(2)=3>1=f(3)$.

当 $x=2$ 时，$f(f(x))=f(f(2))=f(3)=1=f(3)$.

当 $x=3$ 时，$f(f(x))=f(f(3))=f(1)=2>1=f(3)$.

综上，$x=1$ 或 3.

6. 设 $f(x)=ax+b(a\neq0)$，

$\therefore f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

$\therefore a^2x+ab+b=4x+3$.

$\therefore\begin{cases}a^2=4,\\ab+b=3.\end{cases}\therefore\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-3.\end{cases}\therefore f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

7. 由 $f(x)=x$ 有唯一解，即 $\dfrac{x}{ax+b}=x$ 有唯一解，亦即 $ax^2+(b-1)x=0$ 有唯一解. 故 $\Delta=(b-1)^2-4a\cdot0=0$，$\therefore b=1$. 又 $f(2)=1$. $\therefore a=\dfrac{1}{2}$. $\therefore f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+1}=\dfrac{x}{1+x^2}=f(x)$.

2. B 【解析】由题意知，$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$，$\therefore f(x)=x^2+2$.

3. D 【解析】$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{x-1+1-x}{x+1}=\dfrac{0}{x+1}=0$.

4. B 【解析】由图象知，当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$y=\dfrac{3}{2}x$；当 $1<x\leqslant2$ 时，$y=3-\dfrac{3}{2}x$.

5. C

6. D 【解析】由 $y=f(x)$ 图象知 $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 时 $f(x)>0$，$x\in(1,3)$ 时 $f(x)<0$；由 $y=g(x)$ 图象知 $x\in(-\infty,-1)\cup(2,4)$ 时，$g(x)<0$，$x\in(-1,2)\cup(4,+\infty)$ 时，$g(x)>0$. 故 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)\geqslant0$，且 $g(x)>0$；$x\in(4,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，且 $g(x)>0$；$x\in(2,3]$ 时，$f(x)\leqslant0$，且 $g(x)<0$. 因此不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0$ 的解集为 $(-1,1]\cup(2,3]\cup(4,+\infty)$.

7. -1 【解析】在 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ ①中，以 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x 得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$ ②.

①②联立消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得 $f(x)=\dfrac{2}{x}-x$，$f(2)=-1$.

8. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+4$ 【解析】$\because f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$，$\therefore f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4$.

9. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$f(\sqrt{2})=2a-\sqrt{2}$，$f(f(\sqrt{2}))=a(2a-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$，$\therefore a(2a-\sqrt{2})^2=0$. 又 $a>0$，$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 1 2 【解析】$\because g(1)=3$，$\therefore f(g(1))=f(3)=1$.

$f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 与 x 相对应的值如下表所示.

x	1	2	3
$f(g(x))$	1	3	1
$g(f(x))$	3	1	3

$\therefore f(g(x))>g(f(x))$ 的解为 $x=2$.

11. (1) $\because f(2x+1)=3x-2=\dfrac{3}{2}(2x+1)-\dfrac{7}{2}$，

$\therefore f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{2}$.

$\because f(a)=4$，即$\dfrac{3}{2}a-\dfrac{7}{2}=4$.

$\therefore a=5$.

(2)$\because f(0)=c=0$，

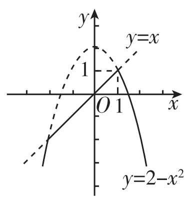
$\therefore f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b$，

$f(x)+x+1=ax^2+bx+x+1=ax^2+(b+1)x+1$.

$\therefore \begin{cases}2a+b=b+1,\\ a+b=1,\end{cases}\therefore \begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

12. 在同一坐标系中画出函数$y=2-x^2$，$y=x$的图象，如图所示，根据题意知图中实线部分即为函数$y=f(x)$的图象，由图象可知，当$x=1$时，$f(x)$有最大值，且$f(x)_{\max}=f(1)=1$.



第12题图

13. $\because f(x+y)=f(x)+2y(x+y)$对任意$x,y\in\mathbf{R}$都成立，可令$x=0,y=1$，得$f(1)=f(0)+2\times1\times(0+1)$，又$f(1)=1$，解得$f(0)=-1$，再令$x=0,y=x$，得$f(x)=f(0)+2x(0+x)=-1+2x^2$，即$f(x)=2x^2-1$.

课时2　分段函数与映射

★ 课堂作业 ★

1. B　【解析】由分段函数的定义知①②正确，③不正确，故应选B.

2. B　【解析】$\because -4<0$，$\therefore f(-4)=(-4)+4=0$.

$\therefore f(f(-4))=f(0)=1$.

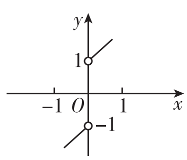
于是$f(f(f(-4)))=f(1)=1^2+3=4$. 故选B.

3. B　【解析】其中(1)(3)均满足函数定义.

4. 2

5. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\in[-1,0],\\ -\dfrac{1}{2}x, x\in(0,2].\end{cases}$

6. $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}x+1, x>0,\\ x-1, x<0,\end{cases}$其图象如图所示.



第6题图

7. $f(x)=\begin{cases}2x, 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2, 1<x<2,\\ 3, x\geqslant2.\end{cases}$

★ 课后作业 ★

1. B　【解析】对于②取$x=2$，$f(2)=3$或4，对于③取$x=1$，$f(1)=5$或1，所以②、③都不合题意.

2. C　【解析】$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$，$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$.

3. C　【解析】C中，当$x=4$时，$y=\dfrac{8}{3}\notin Q$，即P中的元素4在Q中无对应元素，故C不表示从P到Q的映射.

4. C　【解析】由题意知，$b=0$，$a=1$，则$a+b=1$.

5. B　【解析】$x<0$时，$\varphi(x)=-x^2<0$，$\therefore f(\varphi(x))=-x^2$.

6. C　【解析】当$x\geqslant0$时，$\because x+1=2$，$\therefore x=1$. 当$x<0$时，$\because \dfrac{1}{|x|}=2$，$\therefore |x|=\dfrac{1}{2}$. $\therefore x=-\dfrac{1}{2}$. 故$x$的值为1或$-\dfrac{1}{2}$.

7. $\{x\mid x\leqslant1\}$　【解析】原不等式等价于$\begin{cases}x\geqslant0,\\ x+x\leqslant2,\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\ -x+x\leqslant2,\end{cases}$解得$0\leqslant x\leqslant1$或$x<0$，即$x\leqslant1$.

8. $(-3,1)$　【解析】$\because f:(x,y)\to(x-y,x+y)$，

$\therefore f:(-1,2)\to(-3,1)$.

9. $f:x\to x+7$　【解析】答案可不唯一. 只要满足映射的概念，即对B中任一元素在A中都有唯一确定的元素与之对应即可.

10. ②与③　【解析】由于纵坐标表示八年来前t年产品生产总量，②③正确.

11. 当$x<-1$时，$f(x)=-(x-2)-[-(x+1)]=3$.

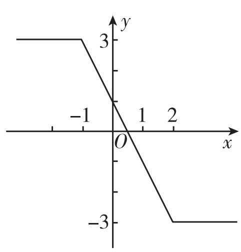
当$-1\leqslant x\leqslant2$时，

$f(x)=-(x-2)-(x+1)=-2x+1$.

当$x>2$时，$f(x)=(x-2)-(x+1)=-3$，

$\therefore f(x)=\begin{cases}3, x<-1,\\ -2x+1, -1\leqslant x\leqslant2,\\ -3, x>2.\end{cases}$

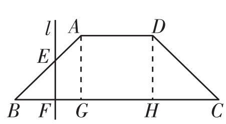
$f(x)$的图象如图所示.



第11题图

由函数图象知，函数的值域为$[-3,3]$.

12. 如图所示，过点A,D分别作$AG\perp BC$，$DH\perp BC$，垂足分别是G,H.



第12题图

因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

底角为 $45°$，$AB=2\sqrt{2}$ cm，

所以 $BG=AG=DH=HC=2$ cm.

又 $BC=7$ cm，所以 $AD=GH=3$ cm.

当点 F 在 BG 上时，即 $x\in(0,2]$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2$；

当点 F 在 GH 上时，即 $x\in(2,5]$ 时，

$y=\frac{1}{2}\times2\times2+2(x-2)=2x-2$；

当点 F 在 HC 上时，即 $x\in(5,7]$ 时，

$y=S_{五边形ABFED}=S_{梯形ABCD}-S_{\mathrm{Rt}\triangle CEF}$

$=\frac{1}{2}(7+3)\times2-\frac{1}{2}(7-x)^2$

$=-\frac{1}{2}(x-7)^2+10$.

综上，

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, x\in(0,2],\\ 2x-2, x\in(2,5],\\ -\frac{1}{2}(x-7)^2+10, x\in(5,7].\end{cases}$$

13. (1) $f\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{7}{4}+2=\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$，$\therefore f\left(f\left(f\left(-\frac{7}{4}\right)\right)\right)=1$. (2) 当 $a\leqslant-1$ 时，$f(a)=a+2\leqslant1$，$\therefore f(a)=3$ 无解. 当 $-1<a<2$ 时，$f(a)=2a$，$\therefore -2<f(a)<4$. $f(a)=2a=3$，解得 $a=\frac{3}{2}$. 当 $a\geqslant2$ 时，$f(a)=\frac{a^2}{2}$，$f(a)\geqslant2$. $\therefore f(a)=3$，即 $\frac{a^2}{2}=3$，解得 $a=\sqrt{6}$. 综上所述 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=\sqrt{6}$. (3) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由(2)易知，值域为 $\mathbf{R}$.

1.2.3　函数及其表示(习题课)

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】①在对应关系 f 下，A 中不能被 3 整除的数在 B 中没有象，所以不能确定 y 是 x 的函数. ②在对应关系 f 下，A 中的数在 B 中有两个数与之对应，所以不能确定 y 是 x 的函数. ③在对应关系 f 下，A 中的数(除去 5 与 -5 外)在 B 中有两个数与之对应，所以不能确定 y 是 x 的函数. ⑤A 不是数集，所以不能确定 y 是 x 的函数. ④⑥显然满足函数的特征，y 是 x 的函数，故选 D.

2. D 【解析】A 中 $f:x\to2|x|+1$，是从 M 到 N 的映射；B 中如 $M=\mathbf{R}$，$N=\{1\}$，$f:x\to1$，就是从 M 到 N 的映射；C 中 $f:a\to1$ 是从 M 到 N 的映射，$f;a\to2$ 是 M 到 N 的另一个映射. 故选 D.

3. B 【解析】因为 $f(x)=x^2-3x+1$，所以 $f(a)-f(-a)=(a^2-3a+1)-[(-a)^2-3(-a)+1]=a^2-3a+1-(a^2+3a+1)=-6a$. 故选 B.

4. $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ 【解析】$\because f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，$-2\leqslant x\leqslant3\Rightarrow-1\leqslant x+1\leqslant4$，即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$，由 $-1\leqslant2x-1\leqslant4\Rightarrow0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$.

$\therefore f(2x-1)$ 的定义域是 $\left[0,\frac{5}{2}\right]$.

5. $(0,+\infty)$ 【解析】本题考查对区间概念的理解，对于区间 $[a,b]$，规定 a 必须小于 b，故由 $a<2a$ 得 $a>0$，注意不能取等号.

6. (1) 由 $x^2-3x+2\neq0$，得 $x\neq1$，$x\neq2$. $\therefore f(x)=\frac{6}{x^2-3x+2}$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq1$ 且 $x\neq2\}$.

(2) 由 $\begin{cases}3x-1\geqslant0,\\1-2x\geqslant0,\end{cases}$ 得 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)=\sqrt{3x-1}+\sqrt{1-2x}+4$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】由 $\begin{cases}1-x\geqslant0,\\1-\sqrt{1-x}\neq0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\leqslant1,\\x\neq0,\end{cases}$ 即 $x\leqslant1$ 且 $x\neq0$，故选 B.

2. C 【解析】A 项中两函数的定义域不同；B 项中对应关系不同；D 项中也是两函数对应关系不同，故选 C.

3. C 【解析】解法一：令 $1-2x=t$，则 $x=\frac{1-t}{2}(t\neq1)$，

$\therefore f(t)=\frac{4}{(t-1)^2}-1$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=16-1=15$.

解法二：令 $1-2x=\frac{1}{2}$，得 $x=\frac{1}{4}$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=16-1=15$.

4. D 【解析】该分段函数的三段各自的值域为 $(-\infty,1]$，$[0,4)$，$[4,+\infty)$，而 $3\in[0,4)$，

$\therefore f(x)=x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$，而 $-1<x<2$，$\therefore x=\sqrt{3}$.

5. B 【解析】设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$，

$\because 2f(2)-3f(1)=5$，$2f(0)-f(-1)=1$，

$\therefore\begin{cases}k-b=5,\\k+b=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}k=3,\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore f(x)=3x-2$.

6. C 【解析】$y=\frac{5x+4}{x-1}=\frac{5(x-1)+9}{x-1}=5+\frac{9}{x-1}$，

$\because\frac{9}{x-1}\neq0$，$\therefore y\neq5$，即函数值域为 $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$.

7. C 【解析】住房率是每天房价的函数关系，这种关系在题中是用表格的形式表示出来的，而每天的收入 $y=$ 房价 $\times$ 住房率 $\times$ 间数(100)，我们也可以列出相应的表格：

每间房定价	100 元	90 元	80 元	60 元
住房率	65%	75%	85%	95%
收入	6 500	6 750	6 800	5 700

从表格很清楚地看到，每天的房价定在 80 元时，每天的

收入最高.

8. $\{-1,0,3,8\}$ 【解析】$\because -2\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{Z}$, $\therefore x$ 取 -2, $-1,0,1,2,3,4$. 可知 y 的取值为:$8,3,0,-1,0,3,8$, $\therefore$ 值域为$\{-1,0,3,8\}$.

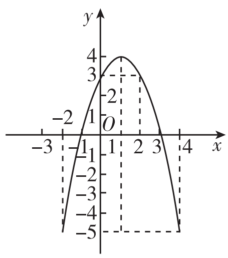
9. 1　1 【解析】$f(g(1))=f(3)=1$;
$g(f(x))=2$, $\therefore f(x)=2$,
$\therefore x=1$.

10. $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ 【解析】当 $x+2\geqslant 0$, 即 $x\geqslant -2$ 时, $f(x+2)=1$, 则 $x+x+2\leqslant 5$, $-2\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$;
当 $x+2<0$, 即 $x<-2$ 时, $f(x+2)=-1$, 则 $x-x-2\leqslant 5$ 恒成立, 即 $x<-2$,
$\therefore \left\{x\,\middle|\, x\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$.

11. 因为函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 列表:

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	0	3	4	3	0	-5	$\cdots$

描点,连线,得函数图象如图:



第 11 题图

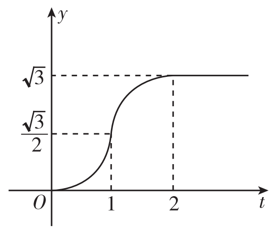
(1) 根据图象,容易发现 $f(0)=3$, $f(1)=4$, $f(3)=0$, 所以 $f(3)<f(0)<f(1)$.
(2) 根据图象,容易发现当 $x_1<x_2<1$ 时, $f(x_1)<f(x_2)$.
(3) 根据图象,可以看出函数的图象是以$(1,4)$为顶点,开口向下的抛物线,因此,函数的值域为$(-\infty,4]$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$, $x\in[1,b]$, 且 $b>1$,
则 $f(1)=\dfrac{1}{2}(1-1)^2+1=1$, $f(b)=\dfrac{1}{2}(b-1)^2+1$,
$\therefore$ 函数值域为$\left[1,\dfrac{1}{2}(b-1)^2+1\right]$.
由已知得$\dfrac{1}{2}(b-1)^2+1=b$,
解得 $b=3$($b=1$ 舍去).

13. $\because \triangle ABO$ 是正三角形,且边长为 2,
$\therefore$ 题图中各点坐标为 $A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$, $D(t,0)$, 而 C 点纵坐标 y_c 可以利用 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中有一个角 $\angle COD=60°$, 而求得 $y_c=\sqrt{3}t(0\leqslant t\leqslant 1)$. 而 $1<t\leqslant 2$ 时, $|DA|=2-t$, 同理 $y_c=\sqrt{3}(2-t)$.
$\therefore$ 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $y=f(t)=\dfrac{1}{2}|OD|\cdot|DC|=\dfrac{1}{2}t\cdot\sqrt{3}t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$.
当 $1<t\leqslant 2$ 时, $y=f(t)=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle CDA}=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\cdot(2-t)\cdot\sqrt{3}(2-t)=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3}$.
再注意到,当 $t<0$ 时,显然有 $y=0$, 当 $t>2$ 时,有 $y=\sqrt{3}$.

$$\therefore y=f(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2, 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3}, 1<t\leqslant 2,\\ \sqrt{3}, t>2.\end{cases}$$

此函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为$[0,\sqrt{3}]$. 图象如图所示.



第 13 题图

1.3　函数的基本性质

1.3.1　单调性与最大(小)值

课时 1　函数的单调性

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】A. $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$上单调递减;
B. $y=2x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
C. $y=1-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;
D. $y=(2x-1)^2$ 在$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$上为减函数,在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上为增函数.
故选 B.

2. D 【解析】因为 $y=(2k+1)x+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上为减函数,所以 $2k+1<0$, 即 $k<-\dfrac{1}{2}$, 故选 D.

3. B 【解析】$\because f(x)=2x^2-mx+3$ 在$(-\infty,-2]$上为减函数,在$[-2,+\infty)$上为增函数, $\therefore$ 对称轴$\dfrac{m}{4}=-2$.
$\therefore m=-8$.
$\therefore f(x)=2x^2+8x+3$.
$\therefore f(1)=2+8+3=13$, 故选 B.

4. $(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$

5. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

6. 证明:任取 $1<x_1<x_2$, $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2}{x_1-1}-\dfrac{2}{x_2-1}=$

$\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$.

$\because 1<x_1<x_2$，$\therefore x_2-x_1>0$，$x_1-1>0$，$x_2-1>0$.

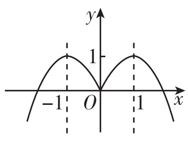
$\therefore \frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)=\frac{2}{x-1}$在$(1,+\infty)$上是减函数.

7. $y=-x^2+2|x|=\begin{cases}-x^2+2x, x\geqslant 0,\\ -x^2-2x, x<0.\end{cases}$

图象如图所示.



第 7 题图

递减区间是$[-1,0]$和$[1,+\infty)$.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】$\because f(x)$关于 $x=2$ 对称，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，

且 $f(1)=f(3)$.

$\because f(2)<f(3)<f(4)$，

$\therefore f(2)<f(1)<f(4)$，故选 B.

2. D 【解析】$\because a^2+1-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore a^2+1>a$. 又 $f(x)$为减函数，$\therefore f(a^2+1)<f(a)$.

3. A 【解析】$\because a+b>0$，$\therefore a>-b$，$b>-a$，$\therefore f(a)>f(-b)$，$f(b)>f(-a)$，$\therefore f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$.

4. B

5. A

6. D

7. $(-\infty,-3]$ 【解析】函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$的定义域是 $x^2+2x-3\geqslant 0$，即 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 1$. 而该函数可看成 $y=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=x^2+2x-3$ 复合而成. 在 $u\in[0,+\infty)$上，$y=\sqrt{u}$是增函数，而 $u=\varphi(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 在$(-\infty,-3]$上是减函数，在$[1,+\infty)$上是增函数，由复合函数单调性规律，知原函数的递减区间是$(-\infty,-3]$.

8. $\left[-\frac{3}{4},0\right)$和$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$

9. $a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant 5$ 【解析】对称轴 $x=-a$，要使 $f(x)$在$[-5,5]$上单调需满足 $a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant 5$.

10. ① 【解析】对于②，设 $f(x)=x$，则 $f(x)$为增函数，但 $g(x)=\frac{1}{x}$在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内不是减函数，如 $x_1=-1$，$x_2=1$，则 $x_1<x_2$，但 $g(x_1)=-1<g(x_2)=1$；③不正确，如令 $f(x)=x$，$g(x)=2x$，在$(-\infty,0)$上均为增函数，而 $f(x)\cdot g(x)=2x^2$ 在$(-\infty,0)$上是减函数；同理，④也不正确，只有①正确.

11. (1)减区间为$(-\infty,1]$；

(2)减区间为$(-\infty,3]$，增区间为$[3,+\infty)$；

(3)递减区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$，没有递增区间.

12. ①$a=0$ 时，$f(x)=x$ 在$[1,+\infty)$上是增函数.

②$a\neq 0$ 时，$\because f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数，

$\therefore \begin{cases}a>0,\\ \frac{3a-1}{2a}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

综上 $0\leqslant a\leqslant 1$.

13. 设 $-1<x_1<x_2<1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=\frac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$.

$\because -1<x_1<x_2<1$，$\therefore x_2-x_1>0$，

$x_1^2-1<0$，$x_2^2-1<0$，$x_1x_2+1>0$，

当 $a>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，此时，$f(x)$为减函数；

当 $a<0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，此时，$f(x)$为增函数.

综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)=\frac{ax}{x^2-1}$在$(-1,1)$上为减函数；当 $a<0$ 时，$f(x)=\frac{ax}{x^2-1}$在$(-1,1)$上为增函数.

课时 2 函数的最值

★ 课堂作业 ★

1. D

2. B

3. D

4. 10 6

5. 1 【解析】易证 $y=\frac{1}{x-2}$在$[3,4]$上递减，

所以 $y_{\max}=\frac{1}{3-2}=1$.

6. 设 $-4\leqslant x_1<x_2\leqslant -2$，

$\because f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

又 $x_1+1<0$，$x_2+1<0$，$x_1-x_2<0$，

$\therefore \frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)=\frac{x}{x+1}$在$[-4,-2]$上单调递增.

$\therefore y_{\max}=f(-2)=2$，$y_{\min}=f(-4)=\frac{4}{3}$.

7. (1)$a=-1$ 时，

$f(x)=x^2-2x+2$ 在$[-5,1]$上单调递减，

在$[1,5]$上单调递增.

$\therefore y_{\min}=f(1)=1$，$y_{\max}=f(-5)=37$.

(2) $f(x)$ 是以 $x=-a$ 为对称轴，开口向上的抛物线，

$\because f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上单调，

$\therefore -a\geqslant 5$ 或 $-a\leqslant -5$.

$\therefore a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant 5$.

★ 课后作业 ★

1. B

2. D 【解析】由于 $y=\dfrac{3}{x+2}$ 在 $[0,5]$ 上为减函数，因此，x 取 0 时，$y_{最大}=\dfrac{3}{2}$，x 取 5 时，$y_{最小}=\dfrac{3}{7}$，故选 D.

3. D

4. D 【解析】$f(x)=\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\leqslant\dfrac{4}{3}$.

5. A 【解析】$\because y=x+\sqrt{2x-1}$ 在定义域 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数，

$\therefore y\geqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，即函数最小值为 $\dfrac{1}{2}$，无最大值，故选 A.

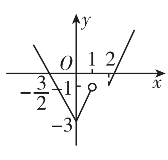
6. B 【解析】令 $f(x)=t$，$t\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$. 问题转化为求函数 $y=t+\dfrac{1}{t}$，$t\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$ 的值域，于是由函数 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上递减，在 $[1,3]$ 上递增，得 $y\in\left[2,\dfrac{10}{3}\right]$，故选 B.

7. $(0,2)$.

8. $\dfrac{3}{2}$　0 【解析】$y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上为增函数，

$\therefore y_{\min}=0$，$y_{\max}=\dfrac{3}{2}$.

9. $[0,1)\cup[2,+\infty)$　-3 【解析】作出函数图象，如图所示.



第 9 题图

由图象知，函数单调递增区间是 $[0,1)\cup[2,+\infty)$，最小值是 -3.

10. 3 m 【解析】设隔墙长度为 x m，场地面积为 S m^2，

则 $S=x\cdot\dfrac{24-4x}{2}=12x-2x^2$

$=-2(x-3)^2+18$.

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，S 有最大值 18 m^2.

11. 对函数 y 配方，得 $y=-3(x-1)^2+\dfrac{3}{2}$，所以该二次函数的对称轴是 $x=1$，顶点坐标是 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

$\because 2\leqslant x\leqslant 5$，而 $x=1$ 不在此范围内，

$\therefore$ 二次函数 $y=-3x^2+6x-\dfrac{3}{2}(2\leqslant x\leqslant 5)$ 的图象是抛物线 $y=-3x^2+6x-\dfrac{3}{2}$ 的一部分，不含顶点，这部分在对称轴的右侧.

$\because a=-3<0$，$\therefore$ 抛物线开口向下，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y_{\max}=-3\times 2^2+6\times 2-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}$;

当 $x=5$ 时，$y_{\min}=-3\times 5^2+6\times 5-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{93}{2}$.

12. (1) 任取 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$f(x)=x+\dfrac{3}{x}+2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{3}{x_1x_2}\right)$.

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$.

又 $\because x_1\geqslant 2$，$x_2>2$，$\therefore x_1x_2>4$，$1-\dfrac{3}{x_1x_2}>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有最小值，即 $f(2)=\dfrac{11}{2}$.

(2) $\because f(x)$ 最小值为 $f(2)=\dfrac{11}{2}$，

$\therefore f(x)>a$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min}>a$，即 $a<\dfrac{11}{2}$.

【解析】运用函数单调性求最值是求函数最值的重要方法，特别是当函数图象不容易作或作不出来时，单调性几乎成为首选方法. $f(x)>a$ 恒成立，等价于 $f(x)_{\min}>a$，$f(x)<a$ 恒成立，等价于 $f(x)_{\max}<a$.

13. $f(x)=(x-1)^2+1$，其对称轴为 $x=1$.

当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，区间 $[t,t+1]$ 在对称轴的左侧，$f(x)$ 在此区间上是减函数.

所以此时 $g(t)=f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)+2=t^2+1$.

当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，对称轴 $x=1$ 在此区间内，又函数开口向上.

所以此时 $g(t)=f(1)=1^2-2+2=1$.

当 $t>1$ 时，区间 $[t,t+1]$ 在对称轴的右侧，$f(x)$ 在此区间上是增函数.

所以此时 $g(t)=f(t)=t^2-2t+2$.

综上得 $g(t)=\begin{cases}t^2+1, & t<0,\\ 1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ t^2-2t+2, & t>1.\end{cases}$

1.3.2　奇偶性

★ 课堂作业 ★

1. D

2. A 【解析】利用奇函数的性质 $f(-x)=-f(x)$ 求解.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，$\therefore f(1)=1^2+\dfrac{1}{1}=2$. $\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-1)=-f(1)=-2$.

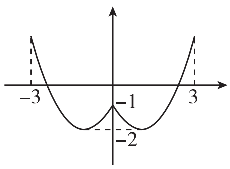
3. A 【解析】$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(-3)=f(3)$，$f(-1)=$

$f(1)$. 又 $f(3)>f(1)$, $\therefore f(-3)>f(-1)$, $f(3)>f(-1)$ 都成立.

4. -3

5. $(-\pi,\pi)$ 【解析】若 $a\geqslant 0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数, 且 $f(\pi)<f(a)$, 得 $a<\pi$, 即 $0\leqslant a<\pi$.
若 $a<0$, $\because f(\pi)=f(-\pi)$, 则由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数, 得知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数.
由于 $f(-\pi)<f(a)$, 得到 $a>-\pi$.
即 $-\pi<a<0$. 由上述两种情况知 $a\in(-\pi,\pi)$.

6. (1) $\because f(-x)=(-x)^2-2|x|-1=f(x)$,
$\therefore f(x)$ 为偶函数.
(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1,(0\leqslant x\leqslant 3),\\x^2+2x-1,(-3\leqslant x<0).\end{cases}$



第 6 题图

如图所示, 单调递减区间为 $[-3,-1]$, $[0,1]$, 单调递增区间为 $[-1,0]$, $[1,3]$.
(3) $[-2,2]$.

7. $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x)=-f(x)$.
即 $\dfrac{p(-x)^2+2}{3(-x)+q}=-\dfrac{px^2+2}{3x+q}$.
即 $\dfrac{px^2+2}{-3x+q}=\dfrac{px^2+2}{-3x-q}$.
$\therefore -3x+q=-3x-q$, 解得 $q=0$.
$\therefore f(x)=\dfrac{px^2+2}{3x}$. 又 $\because f(2)=\dfrac{5}{3}$, $\therefore \dfrac{4p+2}{6}=\dfrac{5}{3}$.
$\therefore 4p+2=10$, 得 $p=2$.
综上, $p=2$, $q=0$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】$f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-2)=f(2)$, $f(-\pi)=f(\pi)$. 又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数, $\therefore f(2)<f(3)<f(\pi)$. $\therefore f(-2)<f(3)<f(-\pi)$.

2. D 【解析】当 $-4\leqslant x\leqslant -1$ 时, $1\leqslant -x\leqslant 4$.
$\because 1\leqslant x\leqslant 4$ 时, $f(x)=x^2-4x+5$.
$\therefore f(-x)=x^2+4x+5$, 又 $f(x)$ 为奇函数,
$\therefore f(-x)=-f(x)$, $\therefore f(x)=-x^2-4x-5=-(x+2)^2-1$.
当 $x=-2$ 时, 取最大值 -1.

3. C 【解析】由 $f(-x)=-f(x)$ 得 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 互为相反数, $\therefore$ 只有 C 成立.

4. A 【解析】由 $f(x)$ 是偶函数知 $b=0$, $\therefore g(x)=ax^3+cx$ 是奇函数.

5. C 【解析】$\because y=f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-1)=f(1)$. $\because$ 由图得 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,
$\therefore f(1)<f(2)$, 即 $f(-1)<f(2)$, $\therefore f(-1)-f(2)<0$.

6. D

7. -5 【解析】由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,
得 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(-2)=-f(2)$, 而 $f(2)=2^2+1=5$.
$\therefore f(-2)=-5$.

8. $\dfrac{1}{x^2-1}$ $\dfrac{x}{x^2-1}$ 【解析】$\because f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, ①
$\therefore f(-x)+g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}$.
又 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数,
$\therefore f(x)-g(x)=\dfrac{1}{-x-1}$. ②
① + ②得 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, ① − ②得 $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

9. 0

10. $(-5,0)\cup(5,+\infty)$ 【解析】先求出函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式, 然后分段求解不等式 $f(x)>x$, 即得不等式的解集.
设 $x<0$, 则 $-x>0$, 于是 $f(-x)=(-x)^2-4(-x)=x^2+4x$, 由于 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $-f(x)=x^2+4x$, 即 $f(x)=-x^2-4x$, 且 $f(0)=0$, 于是 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-4x,x<0.\end{cases}$ 当 $x>0$ 时, 由 $x^2-4x>x$ 得 $x>5$;
当 $x<0$ 时, 由 $-x^2-4x>x$ 得 $-5<x<0$, 故不等式的解集为 $(-5,0)\cup(5,+\infty)$.

11. 当 $x>0$ 时, $-x<0$,
$\because$ 当 $x<0$ 时, $f(x)=x(1-x)$, $\therefore f(-x)=-x(1+x)$.
又 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x)=-f(x)$.
$\therefore -f(x)=-x(1+x)$, $\therefore f(x)=x(1+x)$.
又 $f(0)=f(-0)=-f(0)$, $\therefore f(0)=0$.
$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x(1+x)$.
【解析】解决本题的关键是利用 $x<0$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 将 $x>0$ 时, $f(x)$ 的解析式的求解转化到 $x<0$ 上.

12. $\because F(x)$ 有最大值 8,
$\therefore af(x)+bg(x)+2\leqslant 8$, 即 $af(x)+bg(x)\leqslant 6$.
又 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数,
$\therefore f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$.
于是 $F(-x)=af(-x)+bg(-x)+2=-[af(x)+bg(x)]+2\geqslant -6+2=-4$.
即 $F(-x)$ 的最小值为 -4.
【解析】利用奇偶性可把 $F(-x)$ 转化为 $F(x)$.

13. $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是偶函数, 则由 $f(1-m)<f(m)$, 可得 $f(|1-m|)<f(|m|)$.
$\because$ 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)$ 为减函数, 故
$\begin{cases}|1-m|\leqslant 2,\\|m|\leqslant 2,\\|1-m|>|m|,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<\dfrac{1}{2}$.
$\therefore m$ 的取值范围为 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

1.3.3 函数的基本性质(习题课)

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】函数的单调性的定义是指定义在区间 I 上任意两个值 x_1,x_2,强调的是任意,从而①不对;② $y=x^2$ 在 $x\geqslant0$ 时是增函数,$x<0$ 时是减函数,从而 $y=x^2$ 在整个定义域上不具有单调性;③ $y=-\frac{1}{x}$ 在整个定义域内不是单调递增函数. 如 $-3<5$ 而 $f(-3)>f(5)$;④ $y=\frac{1}{x}$ 的单调递减区间不是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$,注意写法.

2. A 【解析】因为 $a<0$,所以一次函数在区间 $[0,2]$ 上是减函数,当 $x=0$ 时,函数取得最大值 1;当 $x=2$ 时,函数取得最小值为 $2a+1$.

3. C 【解析】$\because x\neq0,\therefore f(-x)=\frac{1}{\sqrt{(-x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=f(x)$,
$\therefore f(x)$ 是偶函数.

4. -2 【解析】$f(-1)=-f(1)=-1\times(1+\sqrt[3]{1})=-2$.

5. $f(-2)<f(1)<f(0)$ 【解析】$\because f(x)=(m-1)x^2+6mx+2$ 是偶函数,$\therefore m=0,\therefore f(x)=-x^2+2.\therefore f(0)=2,f(1)=1,f(-2)=-2,\therefore f(-2)<f(1)<f(0)$.

6. 证明:设 $x_1>x_2>-1$,
则 $y_1-y_2=\frac{x_1+2}{x_1+1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$,
$\because x_1>x_2>-1,\therefore x_2-x_1<0,x_1+1>0,x_2+1>0$,
$\therefore \frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$. 即 $y_1-y_2<0,y_1<y_2$,
$\therefore y=\frac{x+2}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】$\because x\in[1,2]$ 时,$f(x)_{\max}=2\times2+6=10$,$f(x)_{\min}=2\times1+6=8$;$x\in[-1,1]$ 时,$f(x)_{\max}=1+7=8,f(x)_{\min}=-1+7=6,\therefore f(x)_{\max}=10,f(x)_{\min}=6$.

2. A 【解析】$F(-x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-F(x)$,符合奇函数的定义.

3. D 【解析】根据单调性定义,所取两个自变量是同一单调区间内的任意两个变量,才能由该区间上的函数单调性来比较函数值的大小.

4. D 【解析】由于奇函数的图象关于原点成中心对称,故奇函数的图象在对称区间上具有相同的单调性,且一侧的最小值对应另一侧的最大值,故选 D.

5. A 【解析】因为 $y=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,所以必有 $a<0$,而 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,则 $b<0$,所以 $f(x)=bx+a$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数且 $f(0)=a<0$,故选 A.

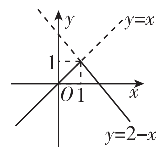
6. B 【解析】因为偶函数的图象关于 y 轴对称,但不一定与 y 轴相交,所以①错误;②正确;奇函数的图象关于原点对称,但不一定经过原点,所以③错误;如果 $f(x)$ 既是奇函数,又是偶函数,函数可以表示为 $f(x)=0$,但定义域不一定要 $x\in\mathbf{R}$,所以④错误,故选 B.

7. C 【解析】$a^2+2a+\frac{5}{2}=(a+1)^2+\frac{3}{2}\geqslant\frac{3}{2}$,
$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant f\left(a^2+2a+\frac{5}{2}\right)$. 故选 C.

8. $(-\infty,40]\cup[64,+\infty)$ 【解析】对称轴 $x=\frac{k}{8}$,则 $\frac{k}{8}\leqslant5$ 或 $\frac{k}{8}\geqslant8$,得 $k\leqslant40$ 或 $k\geqslant64$.

9. 0 【解析】由 $g(x)=g(-x)$ 可知 $g(x)$ 为偶函数,其图象关于 y 轴对称,则其与 x 轴的交点每两个关于 y 轴对称. 设其为 $x_1,-x_1,x_2,-x_2$,所以 $x_1+(-x_1)+x_2+(-x_2)=0$,即四根之和为 0.

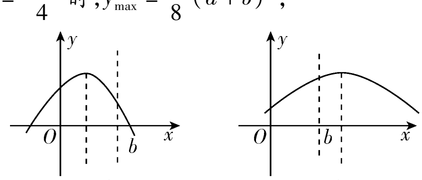
10. $(-\infty,1]$ 【解析】由题意知 $x\odot(2-x)$ 表示 x 与 $2-x$ 两者中的较小者,借助 $y=x$ 与 $y=2-x$ 的图象,不难得出 $f(x)$ 值域为 $(-\infty,1]$.



第 10 题图

11. (1) 由题可知函数定义域为 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$,不关于原点对称.
该函数既不是奇函数也不是偶函数.
(2) 由题可知函数定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称.
$f(1)=2,f(-1)=0$,
$\therefore f(-1)\neq-f(1),f(-1)\neq f(1)$,
故其既不是奇函数也不是偶函数.
(3) 函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1\}$,不关于原点对称. 所以函数 $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数.

12. 用割补法,将四边形 $EFGH$ 的面积转化为特殊图形——矩形和直角三角形的面积问题.
(1) $\because \triangle AEH\cong\triangle CFG,\triangle EBF\cong\triangle GDH$,
$\therefore y=S_{矩形ABCD}-2S_{\triangle AEH}-2S_{\triangle EFB}$
$=ab-2\times\frac{1}{2}x^2-2\times\frac{1}{2}(a-x)(b-x)$
$=-2x^2+(a+b)x(0<x\leqslant b)$.
(2) $y=-2\left(x-\frac{a+b}{4}\right)^2+\frac{1}{8}(a+b)^2$.
①如图(1),当 $b\geqslant\frac{a+b}{4}$,即 $a>b\geqslant\frac{a}{3}$ 时,
当 $x=\frac{a+b}{4}$ 时,$y_{\max}=\frac{1}{8}(a+b)^2$;



第 12 题图

②如图(2)，当 $0<b<\frac{a+b}{4}$，即 $0<b<\frac{a}{3}$ 时，y 在区间 $(0,b]$ 上是增函数，当 $x=b$ 时，$y_{\max}=(a-b)b$.

13. (1)∵$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即$\frac{-ax+b}{1+x^2}=\frac{-ax-b}{1+x^2}$.

$\therefore b=-b,b=0$.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$，$\therefore \frac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{4}}=\frac{2}{5}$，$\therefore a=1$.

∴ 函数解析式为$f(x)=\frac{x}{1+x^2}(-1<x<1)$.

(2)证明：任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}$

$=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$.

$\because -1<x_1<x_2<1$，

$\therefore x_1-x_2<0,1-x_1x_2>0,(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上为增函数.

(3)$\because f(t-1)+f(t)<0$，$\therefore f(t-1)<-f(t)$.

$\because f(-t)=-f(t)$，$\therefore f(t-1)<f(-t)$.

$\because f(x)$为$(-1,1)$上的增函数，

$\therefore \begin{cases}-1<t-1<1,\\-1<-t<1,\\t-1<-t.\end{cases}$ 解得 $0<t<\frac{1}{2}$.

∴ 不等式的解集为$\left\{t\,\middle|\,0<t<\frac{1}{2}\right\}$.

单元评估检测

1. C 【解析】集合 A 是不等式 $3-3x>0$ 的解集，很明显 $3,1$ 不满足不等式，而 $0,-1$ 满足不等式.

2. D 【解析】注意到题目中的对应法则，将 A 中的元素 -1代入得 -3，A 中元素 3 代入得 5，A 中元素 5 代入得 9，故选 D.

3. C 【解析】$\because f(-x)=-f(x)$，且定义域为 $\mathbf{R}$，$\therefore f(x)$是奇函数，图象关于原点对称.

4. B 【解析】阴影部分表示的集合为 $B\cap(\complement_U A)$. $\because \complement_U A=\{4,6,7,8\}$，$\therefore B\cap(\complement_U A)=\{4,6\}$.

5. B 【解析】因为 $F(-x)=F(x)$，所以 $F(x)$是偶函数，因而在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上 $F(x)$一定单调递减.

6. B 【解析】$P=\{x|y=\sqrt{x+1}\}=[-1,+\infty)$，$Q=\{y|y=\sqrt{x-1}\}=[0,+\infty)$，所以 $Q\subsetneqq P$.

7. C 【解析】$\because f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$，$\therefore f(3)=9+2=11$.

8. D 【解析】$f(5)=\frac{1}{f(3)}=f(1)=-5$，$f(-5)=\frac{1}{f(-3)}=f(-1)=\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{5}$.

9. C 【解析】$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(-\pi)=f(\pi)$，$f(-4)=f(4)$. 又$\because f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，$\therefore f(3)<f(\pi)<f(4)$，$\therefore f(3)<f(-\pi)<f(-4)$.

10. B 【解析】$x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-[-(-x)+1]=-x-1$.

11. C 【解析】由题意知，P 中的元素有$(1,7),(7,1),(1,8),(8,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$，共9个.

12. D 【解析】设 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1$. $\because x_2-x_1>0$，又已知 $x>0$ 时，$f(x)>1$，$\therefore f(x_2-x_1)>1$. $\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_1)<f(x_2)$. $\therefore f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. $\because f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)-1=f(1)+[f(1)+f(1)-1]-1=3f(1)-2=4$. $\therefore f(1)=2$.

13. 4 【解析】B 可能为$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，共有 4 个.

14. 8 【解析】函数 $y=x+2\sqrt{x}$在其定义域上是增函数，所以 $x=0$ 时有最小值 $N=0$，$x=4$ 时有最大值 $M=8$，$M+N=8$.

15. 25 【解析】设都优秀的人数为 x 人，则 $40+31-x=50-4$，$\therefore x=25$.

16. $[0,1)$ 【解析】由题意知$\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 2,\\x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<1$.

17. (1)当 $a=1$ 时，$B=\{x|x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|x<-2\}$，$A\cup B=\{x|x>2$ 或 $x\leqslant 1\}$. (2)$a\geqslant 2$.

18. (1)由题意可得$\begin{cases}2a+b=2,\\(b-1)^2=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=1.\end{cases}$ $\therefore f(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x+1}=\frac{2x}{x+2}$. (2)$f(-3)=\frac{-6}{-3+2}=6$，$f(6)=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$，

$\therefore f(f(-3))=\frac{3}{2}$.

19. $\because A\cap B=\{9\}$，$\therefore 9\in A$，$\therefore x^2=9$ 或 $2x-1=9$.

(1)由 $x^2=9$ 得 $x=\pm 3$. 当 $x=3$ 时，$A=\{9,5,-4\}$，$B=\{-2,-2,9\}$，其中集合 B 中有两个相同的元素 -2，由集合元素的互异性知不合题意. 当 $x=-3$ 时，$A=\{9,-7,-4\}$，$B=\{-8,4,9\}$，此时 $A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

(2)由$2x-1=9$ 得 $x=5$. 当 $x=5$ 时，$A=\{25,9,-4\}$，$B=\{0,-4,9\}$，此时 $A\cap B=\{-4,9\}$，与题设矛盾. 综上所述，$A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

20. $f(3)=f(3-2)+f(3-1)=f(1)+f(2)=1+2=3$，
$f(4)=f(4-2)+f(4-1)=f(2)+f(3)=2+3=5$，
$f(5)=f(5-2)+f(5-1)=f(3)+f(4)=3+5=8$，
$f(6)=f(6-2)+f(6-1)=f(4)+f(5)=5+8=13$.

21. (1)由月产量为 x 台，则总成本为 $20\,000+100x$，从而所获利润与月产量的函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+300x-20\,000(0\leqslant x\leqslant 400),\\60\,000-100x(x>400).\end{cases}$ (2)当 $0\leqslant x\leqslant$

400 时,$f(x)=-\frac{1}{2}(x-300)^2+25\ 000$,当 $x=300$ 时,$f(x)$有最大值 25 000;当 $x>400$ 时,$f(x)=60\ 000-100x$ 是减函数,$f(x)<60\ 000-100\times400<25\ 000$,所以,当 $x=300$ 时,$f(x)$有最大值 25 000. 即当月产量为 300 台时,公司所获利润最大,最大利润是 25 000 元.

22. (1)证明:令 $x=y=0$,则有 $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$.
令 $y=-x$,则有 $f(0)=f(x)+f(-x)$,
即 $f(-x)=-f(x)$,
$\therefore f(x)$是奇函数.
(2)任取 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0\Rightarrow f(x_2-x_1)<0$.
且 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)=-f(x_2-x_1)>0$.
$\therefore f(x_1)>f(x_2)$. $\therefore y=f(x)$在 **R** 上为减函数.
$\therefore f(3)$为函数的最小值,$f(-3)$为函数的最大值.
$f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=-6$,$f(-3)=-f(3)=6$,
$\therefore$ 函数最大值为 6,最小值为 -6.

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

2.1 指数函数

2.1.1 指数与指数幂的运算

★ 课堂作业 ★

1. C
2. D
3. B
4. $-(-a)^{\frac{3}{2}}$
5. (1)8 (2)1
6. (1)10 (2)$a+b$
7. (1)$a+a^{-1}=2$;
(2)$a^2+a^{-2}=2$;
(3)$a^3+a^{-3}=2$.

★ 课后作业 ★

1. D
2. A
3. D
4. D
5. C
6. D
7. -1
8. 31
9. -23
10. $-\sqrt{3}-2$
11. (1)$7\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{3}}$

$=7\cdot\sqrt[3]{3}-6\cdot\sqrt[3]{3}-2\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}$

$=(7-6-2+1)\cdot\sqrt[3]{3}=0$.

(其中 $\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{3}}=(3^{\frac{1}{3}}\cdot3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$)

(2)$(0.062\ 5)^{-\frac{1}{4}}-\left[-2\times\left(\frac{7}{3}\right)^0\right]^2\times[(-2)^3]^{\frac{4}{3}}+10(2-\sqrt{3})^{-1}-\left(\frac{1}{300}\right)^{-0.5}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{4\times(-\frac{1}{4})}-[-2\times1]^2\times(-2)^{3\times\frac{4}{3}}+\frac{10(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}-300^{\frac{1}{2}}$

$=2-4\times2^4+20+10\sqrt{3}-10\sqrt{3}=-42$.

12. (1)原式 $=-4a^{-2-1}b^{-3+1}\div(12a^{-4}b^{-2}c)$

$=-\frac{1}{3}a^{-3-(-4)}b^{-2-(-2)}c^{-1}$

$=-\frac{1}{3}ac^{-1}=-\frac{a}{3c}$.

(2)原式 $=2a^{\frac{1}{3}}\div4a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot3b^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}\cdot3b^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}$.

(3)原式 $=\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a^{-1}-b^{-1})}{a^{-1}+b^{-1}}+(-b^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}})^2$

$=a^{-1}-b^{-1}-a+b^{-1}=\frac{1}{a}-a=\frac{1-a^2}{a}$.

13. $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2}{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}$

$=\frac{(x+y)-2(xy)^{\frac{1}{2}}}{x-y}$. ①

$\because x+y=12$,$xy=9$, ②

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12^2-4\times9=108$.

$\because x<y$,$\therefore x-y=-6\sqrt{3}$. ③

将②③式代入①式得

$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{12-2\times9^{\frac{1}{2}}}{-6\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】“整体代入”的方法在条件求值中非常重要,也是高中数学的一种重要的解题思想,它反映了我们“把握全局”的能力. 解题过程中不宜求出 x、y 后再代入,而应考虑把 $x+y$ 及 xy 整体代入求值.

2.1.2 指数函数及其性质

★ 课堂作业 ★

1. C **【解析】**先化简集合 A,B,再借助数轴进行集合的交集运算.
$A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant1\right.\right\}=\{x|x\geqslant0\}$,$B=\{x|x^2-6x+8\leqslant0\}=\{x|2\leqslant x\leqslant4\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<2$ 或 $x>4\}$,于是 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$.
2. C
3. D
4. $\sqrt{3}$

5. $\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$ 【解析】$\because$ 不论 a 取何值 $y=a^x$ 在$[1,2]$上都是单调的,

$\therefore \frac{a}{2}=|f(1)-f(2)|=|a-a^2|$.

解得 $a=\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$.

6. (1)函数图象经过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,

所以 $a^{2-1}=\frac{1}{2}$,则 $a=\frac{1}{2}$.

(2)$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}(x\geqslant 0)$,

由 $x\geqslant 0$,得 $x-1\geqslant -1$.

于是 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$.

所以函数的值域为$(0,2]$.

7. (1)$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x)$且$x\in\mathbf{R}$,$\therefore$ 函数$f(x)=2^x+2^{-x}$是偶函数.

(2)由(1)知,函数的单调区间为$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$,且$[0,+\infty)$是单调增区间.

设$0\leqslant x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}-2^{x_2}-2^{-x_2}$

$=2^{x_1}-2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_1}}-\frac{1}{2^{x_2}}$

$=2^{x_1}-2^{x_2}+\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}2^{x_2}}$

$=(2^{x_1}-2^{x_2})\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}}$.

$\therefore 0\leqslant x_1<x_2$,$\therefore 2^{x_2}>2^{x_1}$,$2^{x_1+x_2}>1$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

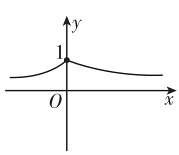
$\therefore$ 函数在$[0,+\infty)$上单调递增,

即函数的单调增区间为$[0,+\infty)$.

★ 课后作业 ★

1. D
2. A
3. C
4. A
5. B

6. A 【解析】$f(x)=\begin{cases}3^{-x}(x>0),\\3^x(x<0).\end{cases}$作出$f(x)$的图象,从而$f(x)\in(0,1]$.



第 6 题图

7. $[3,+\infty)$
8. $(2,4)$
9. 2
10. $(0,+\infty)$

11. (1)$\because 1.8^{2.2}$,1.8^3 可以看做函数 $y=1.8^x$ 的两个函数值,

又$1.8>1$,$\therefore y=1.8^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,$\therefore 1.8^{2.2}<1.8^3$.

(2)$\because y=0.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,又$\because -0.3>-0.4$,$\therefore 0.7^{-0.3}<0.7^{-0.4}$.

(3)$\because 1.9^{0.4}>1.9^0=1$,$0.9^{2.4}<0.9^0=1$,$\therefore 1.9^{0.4}>0.9^{2.4}$.

(4)取中间量$\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{8}{9}\right)^0=1$,$\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\because y=\left(\frac{9}{10}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,又$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$,

$\therefore \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$,$\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$.

【解析】对于同底数幂,可利用指数函数的单调性,对于底数不相同的幂,不能直接利用函数单调性进行大小比较,一般是构建“中间量”,让两个数都与中间量相比较.

12. (1)设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,$x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(a-\frac{2}{2^{x_1}+1}\right)-\left(a-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.

由于指数函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,且 $x_1<x_2$,所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$,即 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$. 又由 $2^x>0$,得 $2^{x_1}+1>0$,$2^{x_2}+1>0$,所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

因为此结论与 a 的取值无关,所以对于 a 取任意实数,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

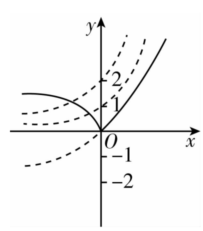
(2)若$f(x)$为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,即 $a-\frac{2}{2^{-x}+1}=-\left(a-\frac{2}{2^x+1}\right)$,变形得 $2a=\frac{2\cdot 2^x}{(2^{-x}+1)\cdot 2^x}+\frac{2}{2^x+1}=\frac{2(2^x+1)}{2^x+1}=2$,解得 $a=1$,所以,当 $a=1$ 时,$f(x)$为奇函数.

13. (1)函数$f(x)=|2^{x+1}-2|$的图象可按如下变换得到:

$f(x)=2^x\xrightarrow[\text{平移 1 个单位}]{\text{沿 } x \text{ 轴向左}}f(x)=2^{x+1}\xrightarrow[\text{平移 2 个单位}]{\text{沿 } y \text{ 轴向下}}$

$f(x)=2^{x+1}-2\xrightarrow[\text{将 } x \text{ 轴下方图象翻折到 } x \text{ 轴上方}]{\text{保留 } x \text{ 轴上方图象}}$

$f(x)=|2^{x+1}-2|$,如图所示:



第 13 题图

(2)由图象知,函数的单调增区间是$[0,+\infty)$,单调减区间是$(-\infty,0)$.

(3)由图象知,函数的值域是$[0,+\infty)$.

提示：本题可以先去绝对值符号，将函数 $f(x)$ 转化为 $f(x)=\begin{cases}2^{x+1}-2(x\geqslant 0),\\ 2-2^{x+1}(x<0).\end{cases}$ 然后依据图象的平移变换、对称变换而得到.

2.1.3　指数函数（习题课）

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】把根式化成有理数指数幂，运用有理数指数幂的运算性质进行化简，$[\sqrt[3]{(-5)^2}]^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[3]{5^2})^{\frac{3}{4}}=(5^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$. 故选 B.

2. C 【解析】$\because y=(|a|+2)^{-x}=\left(\frac{1}{|a|+2}\right)^x$，$|a|+2\geqslant 2$，

$\therefore 0<\frac{1}{|a|+2}\leqslant\frac{1}{2}$，符合指数函数定义.

3. A 【解析】因为 $f(x)=(x-5)^0+(x-2)^{-\frac{1}{2}}=(x-5)^0+\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}=(x-5)^0+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$，所以 $\begin{cases}x-2>0,\\ x\neq 5\end{cases}\Rightarrow x>2$，且 $x\neq 5$.

4. 6 【解析】$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})=6$.

5. $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 【解析】令 $t=\frac{1}{x-1}$，则 $y=2^t$，易知 $t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此函数值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

6. $\left(2\frac{3}{5}\right)^0+2^{-2}\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-(0.01)^{0.5}$

$=1+\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=1+\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}-\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$=1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{10}$

$=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{10}$

$=\frac{16}{15}$.

7. (1) $f(a)+f(1-a)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+2}$

$=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-a}\cdot 4^a}{(4^{1-a}+2)\cdot 4^a}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^a}$

$=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{2}{4^a+2}=\frac{4^a+2}{4^a+2}=1$.

(2) 设 $S=f\left(\frac{1}{1\,001}\right)+f\left(\frac{2}{1\,001}\right)+f\left(\frac{3}{1\,001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1\,000}{1\,001}\right)$……①

则 $S=f\left(\frac{1\,000}{1\,001}\right)+f\left(\frac{999}{1\,001}\right)+f\left(\frac{998}{1\,001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{1\,001}\right)$……②

①+②得［由(1)结论］

$2S=1\,000$，$S=500$.

故所求值为 500.

8. (1) 依题意，对一切 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(-x)=f(x)$，

即 $\frac{1}{ae^x}+ae^x=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$.

$\therefore\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)=0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

则 $a-\frac{1}{a}=0$，$\therefore a=\pm 1$.

$\because a>0$，$\therefore a=1$；

(2) 由(1)知 $a=1$，则 $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$，设 $0<x_1<x_2$，则

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}-e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}$

$=(e^{x_2}-e^{x_1})\left(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1\right)$.

由 $0<x_1<x_2$，又 e^x 为增函数，得 $e^{x_2}>e^{x_1}$，$\therefore e^{x_2}-e^{x_1}>0$，

又 $x_1+x_2>0$，$\therefore e^{x_1+x_2}>1$，$\therefore\frac{1}{e^{x_1+x_2}}<1$，$\therefore\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^{-2x}$ 向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得 $y=2^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=2^{1-2x}$.

2. B 【解析】$\because$ 选项 B 中定义域为 $\mathbf{R}$，$1-x\in\mathbf{R}$，$\therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}>0$.

3. C 【解析】$\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}}=\sqrt{a^{-1}\cdot(a^{-1})^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}}=(a^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{3}{4}}$.

4. C 【解析】将 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=m$ 平方得 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=m^2$，即 $a-2+a^{-1}=m^2$，所以 $a+a^{-1}=m^2+2$，即 $a+\frac{1}{a}=m^2+2\Rightarrow\frac{a^2+1}{a}=m^2+2$.

5. C 【解析】当 $x=-1$ 时显然 $f(x)=0$，因此图象必过点 $(-1,0)$，故选 C.

6. C 【解析】依据特殊点的函数值，用排除法求解.

由 $3^x-1\neq 0$ 得 $x\neq 0$，$\therefore$ 函数 $y=\frac{x^3}{3^x-1}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，可排除选项 A；当 $x=-1$ 时，$y=\frac{(-1)^3}{\frac{1}{3}-1}=\frac{3}{2}>0$，可排除选项 B；当 $x=2$ 时，$y=1$，当 $x=4$ 时，$y=\frac{64}{80}$，但从选项 D 的函数图象可以看出函数在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数，两者矛盾，可排除选项 D. 故选 C.

7. D 【解析】因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故可知

$$\begin{cases}a>1,\\4-\dfrac{a}{2}>0,\\4-\dfrac{a}{2}+2\leqslant a,\end{cases}$$ 解得 $4\leqslant a<8$.

8. 2 【解析】因为 $2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，所以原方程可化为 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=-x^2+3$. 方程的解为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=-x^2+3$ 交点的横坐标，所以方程解的个数与两个函数图象交点的个数相同，不难作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=-x^2+3$ 的图象，由图象可知交点的个数为 2，所以方程实数解的个数为 2.

9. 2 【解析】由于函数在 $[1,2]$ 上必定单调，因此最大值和最小值都在端点处取得，于是必定有 $a+a^2=6$，又 $a>0$，解得 $a=2$.

10. $f(b^x)\leqslant f(c^x)$ 【解析】$\because f(1+x)=f(1-x)$，$f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，故 $\frac{b}{2}=1$，$b=2$，又 $f(0)=3$，

$\therefore c=3$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

若 $x\geqslant0$，则 $3^x>2^x\geqslant1$，$f(3^x)>f(2^x)$；

若 $x<0$，则 $3^x<2^x<1$，$f(3^x)>f(2^x)$；

若 $x=0$，则 $f(3^x)=f(2^x)$，综上，$f(c^x)\geqslant f(b^x)$.

11. (1) $\because 8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3$

$=(2^x+2^{-x})[(2^x)^2-2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2]$

$=3[(2^x+2^{-x})^2-3\cdot2^x\cdot2^{-x}]$

$=3\times(3^2-3)=18$.

(2) $\because a\neq0$，$a-27b\neq0$，

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(3b^{\frac{1}{3}})^2}{a^{\frac{1}{3}}(a-27b)}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$

$=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^3-(3b^{\frac{1}{3}})^3}{a^{\frac{2}{3}}(a-27b)}=a^{-\frac{2}{3}}$

$=\left(-\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

12. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$，令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$，则 $y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，对称轴为 $t=\frac{1}{2}$.

因为 $x\in[-3,2]$，所以 $\frac{1}{4}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant8$，即 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant8$.

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=\frac{3}{4}$；当 $t=8$ 时，$y_{\max}=57$.

$\therefore$ 函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$ 在 $x\in[-3,2]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{4},57\right]$.

13. (1) $2^x-1\neq0$，得 $x\neq0$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 由于函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，

$f(-x)=\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)\cdot(-x)^3=-\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right)x^3=\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)\cdot x^3=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 证明：当 $x>0$ 时，$\frac{1}{2^x-1}>0$，$x^3>0$，

$\therefore f(x)>0$，

又 $\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore x<0$ 时，$f(x)>0$，

综上所述，对于定义域内的任意 x 都有 $f(x)>0$.

2.2 对数函数

2.2.1 对数与对数运算

课时 1 对数的概念、指数式与对数式的互化

★ 课堂作业 ★

1. B
2. D
3. D
4. 3

5. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】原式 $=4^{\log_4\sqrt{12}}-9^{\log_9\sqrt{27}}+25^{\log_{25}\sqrt{\frac{1}{3}}}$

$=\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{\frac{1}{3}}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. (1) $\because \log_2 16=4$，$\therefore 2^4=16$；

(2) $\because \log_{\frac{1}{3}}27=-3$，$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$；

(3) $\because \log_{\sqrt{3}}x=6$，$\therefore (\sqrt{3})^6=x$；

(4) $\because 4^3=64$，$\therefore \log_4 64=3$；

(5) $\because 3^{-2}=\frac{1}{9}$，$\therefore \log_3\frac{1}{9}=-2$；

(6) $\because \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$，$\therefore \log_{\frac{1}{4}}16=-2$.

7. (1)3 (2)0 (3)−3 (4)4

★ 课后作业 ★

1. A
2. B
3. B
4. D
5. B
6. D

7. $\sqrt{2}$ 【解析】由条件知 $\log_{0.5}(\log_2 x)=1=\log_{0.5}0.5$，得 $\log_2 x=\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$，从而 $x=\sqrt{2}$.

8. $\{1,2,5\}$ 【解析】由 $A\cap B=\{2\}$，知 $\log_2(a+3)=2$，得

$a=1$，由此知 $b=2$. 故 $A\cup B=\{1,2,5\}$.

9. $(2,3)\cup(3,5)$

【解析】由题知 $\begin{cases}5-a>0,\\ a-2>0,\\ a-2\neq 1.\end{cases}\Rightarrow 2<a<3$，或 $3<a<5$.

10. 89 【解析】由题知 $\begin{cases}\log_3(\log_4 x)=1,\\ \log_4(\log_2 y)=1,\\ \log_2(\log_3 z)=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}\log_4 x=3,\\ \log_2 y=4,\\ \log_3 z=2.\end{cases}$

$\therefore x=4^3, y=2^4, z=3^2$,

$\therefore x+y+z=64+16+9=89$.

11. (1) $x^{-1}=\sqrt{2}-1$，$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

(2) $x=4^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

(3) $\log_2(\log_5 x)=0$，$\therefore \log_5 x=1$，$\therefore x=5$.

(4) $\log_3(\lg x)=1$，$\therefore \lg x=3$，$\therefore x=10^3=1\ 000$.

(5) $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore 2^{\log_3 x}=2^{-2}$，$\therefore \log_3 x=-2$，$\therefore x=3^{-2}$，

$\therefore x=\dfrac{1}{9}$.

12. $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{(2^x-2^{-x})(2^{2x}+1+2^{-2x})}{2^x-2^{-x}}=2^{2x}+1+2^{-2x}=\dfrac{91}{9}$.

13. (1) $\dfrac{23}{60}$；(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{4}$.

课时2 对数运算

★ 课堂作业 ★

1. C
2. C
3. D
4. 2
5. 11
6. (1) 3 (2) 1

7. 解法一：原式 $=\left(\log_2 5^3+\dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{\log_5 4}{\log_5 25}+\dfrac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$

$=\left(3\log_2 5+\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\dfrac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\dfrac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)$

$=\left(3+1+\dfrac{1}{3}\right)\log_2 5\cdot(3\log_5 2)=13\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=13$.

解法二：原式 $=\left(\dfrac{\lg125}{\lg2}+\dfrac{\lg25}{\lg4}+\dfrac{\lg5}{\lg8}\right)\left(\dfrac{\lg2}{\lg5}+\dfrac{\lg4}{\lg25}+\dfrac{\lg8}{\lg125}\right)$

$=\left(\dfrac{3\lg5}{\lg2}+\dfrac{2\lg5}{2\lg2}+\dfrac{\lg5}{3\lg2}\right)\left(\dfrac{\lg2}{\lg5}+\dfrac{2\lg2}{2\lg5}+\dfrac{3\lg2}{3\lg5}\right)$

$=\left(\dfrac{13\lg5}{3\lg2}\right)\left(3\times\dfrac{\lg2}{\lg5}\right)=13$.

★ 课后作业 ★

1. C
2. B
3. B
4. B
5. B

6. C 【解析】设 $\lg x=t$，则 $t^2+(\lg 2+\lg 3)t+\lg 2\lg 3=0$，

据 $\begin{cases}t_1=\lg x_1,\\ t_2=\lg x_2,\end{cases}$ 又 $t_1+t_2=-\lg 2-\lg 3=\lg x_1+\lg x_2$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{1}{6}$.

7. $\dfrac{23}{4}$ 【解析】原式 $=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\log_{0.25}0.25+9\log_5 5^{\frac{1}{2}}-0=\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{2}=\dfrac{23}{4}$.

8. $3a$

9. 2

10. $\sqrt{3}$

11. (1) 4 (2) -1

12. (1) 原式 $=\left(\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3 2\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\log_2 3+\dfrac{1}{3}\log_2 3\right)=\dfrac{3}{2}\log_3 2\times\dfrac{5}{6}\log_2 3=\dfrac{5}{4}$.

(2) 原式 $=\dfrac{5}{3}\log_3 2\times\dfrac{3}{6}\log_2 3+\dfrac{1}{2}\log_3 2\times\dfrac{1}{2}\log_2 3^{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\log_3 2\times\dfrac{3}{4}\log_2 3=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{29}{24}$.

13. (1) 设 $3^x=4^y=6^z=t(t>1)$，

则 $x=\log_3 t$，$y=\log_4 t$，$z=\log_6 t$，

从而 $\dfrac{1}{x}=\log_t 3$，$\dfrac{1}{y}=\log_t 4$，$\dfrac{1}{z}=\log_t 6$，

所以 $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\log_t 6-\log_t 3=\log_t 2=\dfrac{1}{2}\log_t 4=\dfrac{1}{2y}$.

(2) $\because 3x-4y=3\log_3 t-4\log_4 t$

$=\dfrac{3\lg t}{\lg3}-\dfrac{4\lg t}{\lg4}$

$=\lg t\left(\dfrac{3\lg4-4\lg3}{\lg3\cdot\lg4}\right)$

$=\dfrac{\lg t}{\lg3\cdot\lg4}(\lg4^3-\lg3^4)$，

而 $\lg t>0$，$\lg3>0$，$\lg4>0$，$\lg4^3<\lg3^4$，

$\therefore 3x<4y$.

又 $\because 4y-6z=2(2\log_4 t-3\log_6 t)$

$=2\left(\dfrac{2\lg t}{\lg4}-\dfrac{3\lg t}{\lg6}\right)$

$=\dfrac{2\lg t(2\lg6-3\lg4)}{\lg4\cdot\lg6}$

$=\dfrac{2\lg t(\lg6^2-\lg4^3)}{\lg4\cdot\lg6}$.

而 $\lg t>0$，$\lg4>0$，$\lg6>0$，$\lg6^2<\lg4^3$，$\therefore 4y<6z$.

故有 $3x<4y<6z$.

2.2.2 对数函数及其性质

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】$\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq1,\\3-x^2>0,\end{cases}$ 得 $1<x<\sqrt{3}$,故选 A.

2. A 【解析】$\because y=\log_a(x+5)$ 过定点 $(-4,0)$ 且单调递减,$\therefore$ 不过第一象限,选 A.

3. C 【解析】互为反函数的两个函数定义域与值域存在对应关系,即原函数的定义域、值域分别是反函数的值域、定义域. 故 $f^{-1}(x)$ 的定义域即 $f(x)$ 的值域.

$\because x\geqslant1,\therefore \log_{\frac{1}{2}}x\leqslant0.\therefore f(x)\leqslant3.$

$\therefore f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty,3]$,故选 C.

4. $(3,3)$

5. $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$ 【解析】$\begin{cases}2x-1>0,\\-x+5>0,\\2x-1<-x+5,\end{cases}$ 得 $\frac{1}{2}<x<2$.

6. (1) 由 $1-x>0$ 得 $x<1$,

$\therefore$ 所求函数定义域为 $\{x|x<1\}$.

(2) 由 $\log_2x\neq0$,得 $x\neq1$,又 $x>0$,

$\therefore$ 所求函数定义域为 $\{x|x>0$,且 $x\neq1\}$.

(3) 由 $\log_{0.5}(4x-3)\geqslant0=\log_{0.5}1$,得 $0<4x-3\leqslant1$,解得 $\frac{3}{4}<x\leqslant1$,$\therefore$ 所求函数定义域为 $\left\{x\left|\frac{3}{4}<x\leqslant1\right.\right\}$.

7. (1) $(0,1]$.

(2) $x-4x^2=-4\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{16}$

$=-4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{16}$,

又 $x-4x^2$ 是真数,$\therefore 0<x-4x^2\leqslant\frac{1}{16}$.

又 $\because y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 是减函数,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x-4x^2)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4.$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4x^2)$ 的值域为 $[4,+\infty)$.

★ 课后作业 ★

1. A

2. A

3. A

4. D 【解析】由 $\begin{cases}a>0,\\\log_2a<\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $0<a<\sqrt{2}$.

由 $\begin{cases}a\leqslant0,\\2^a<\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $a<-1$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,\sqrt{2})$.

5. D 【解析】结合对数的运算性质进行整理,利用对数函数的性质求解.

$a=\log_36=\log_33+\log_32=1+\log_32$,

$b=\log_510=\log_55+\log_52=1+\log_52$,

$c=\log_714=\log_77+\log_72=1+\log_72$,

$\because \log_32>\log_52>\log_72,\therefore a>b>c$,故选 D.

6. D 【解析】$\because \log_a\frac{2}{3}<1=\log_aa$,

当 $a>1$ 时,$\begin{cases}a>1,\\\frac{2}{3}<a,\end{cases}$ 得 $a>1$.

当 $0<a<1$ 时,$\begin{cases}0<a<1,\\\frac{2}{3}>a,\end{cases}$ 得 $0<a<\frac{2}{3}$. 综上,选 D.

7. $\ln5$

8. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$ 【解析】当 $0<a<1$ 时,有 $\log_a3-\log_a5=1$,解得 $a=\frac{3}{5}$;当 $a>1$ 时,有 $\log_a5-\log_a3=1$,解得 $a=\frac{5}{3}$.

9. $[0,4)$

10. 1 【解析】由题知 $x=\log_3\left(\frac{4}{4}+2\right)=1$.

11. $\log_a(4x-3)\geqslant0$. (*)

当 $a>1$ 时,(*)可化为 $\log_a(4x-3)\geqslant\log_a1$,

$\therefore 4x-3\geqslant1,x\geqslant1.$

当 $0<a<1$ 时,(*)可化为 $\log_a(4x-3)\geqslant\log_a1$,

$\therefore 0<4x-3\leqslant1,\frac{3}{4}<x\leqslant1.$

综上所述,当 $a>1$ 时,函数定义域为 $[1,+\infty)$,

当 $0<a<1$ 时,函数定义域为 $\left(\frac{3}{4},1\right]$.

12. (1) $2^{0.7}>2^0=1$;$0<\log_54<\log_55=1$;$\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}3=-1$;

$\log_3\frac{1}{4}<\log_3\frac{1}{3}=-1$;$-1=\log_4\frac{1}{4}<\log_4\frac{1}{3}<0$.

又 $\log_{\frac{1}{3}}5=\log_3\frac{1}{5}<\log_3\frac{1}{4}$,

$\therefore 2^{0.7}>\log_54>\log_4\frac{1}{3}>\log_3\frac{1}{4}>\log_{\frac{1}{3}}5.$

(2) 由 $\log_m7<\log_n7<0$ 得 $\frac{1}{\log_7m}<\frac{1}{\log_7n}<0$,

$\therefore \log_7m<0,\log_7n<0.$

不等式的两边同乘 $\log_7m\cdot\log_7n$ 得

$\log_7n<\log_7m<0=\log_71$,所以 $n<m<1$.

13. $\because 2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+7\log_{\frac{1}{2}}x+3\leqslant0$,

$\therefore 2(\log_2x)^2-7\log_2x+3\leqslant0$,得 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2x\leqslant3$.

又 $\because y=\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\log_2\frac{x}{4}\right)$

$=(\log_2x)^2-3\log_2x+2$

$=\left(\log_2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,令 $t=\log_2x$,

$\therefore y=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 函数在$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$上递减,在$\left[\frac{3}{2},3\right]$上递增.

$\therefore y_{\max}=f(3)=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$.

2.2.3 对数函数(习题课)

★ 课堂作业 ★

1. D

2. A 【解析】$\because y=\frac{1}{\sqrt{x}}$定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)=\ln x$定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)=\frac{1}{x}$定义域为$\{x|x\neq0\}$,$f(x)=|x|$定义域为$\mathbf{R}$,$f(x)=e^x$定义域为$\mathbf{R}$,故选A.

3. A

4. $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 【解析】原不等式等价于$\begin{cases}x+2>0,\\x+2<1-x.\end{cases}$

5. $(0,2]$ 【解析】$t=-x^2+4x$的递增区间为$(-\infty,2]$.但当$x\leqslant0$时$t\leqslant0$.故只能取$(0,2]$.即为$f(x)$的递减区间.

6. $\log_4(3x+1)=\log_4[x(3+x)]$,

$\therefore\begin{cases}3x+1>0,\\x>0,\\3+x>0,\\3x+1=x(3+x),\end{cases}$ 解得$x=1$.

★ 课后作业 ★

1. C

2. A

3. D 【解析】利用一元二次不等式的解法及指数不等式的解法求解.由题意知,一元二次不等式$f(x)>0$的解集为$\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$,而$f(10^x)>0$,$\therefore -1<10^x<\frac{1}{2}$,解得$x<\lg\frac{1}{2}$,即$x<-\lg2$.

4. B

5. B 【解析】由$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$可知函数$f(x)$为奇函数,因此$f(-a)=-f(a)=-\frac{1}{2}$.

6. C 【解析】由于无论当$0<a<1$或$a>1$时,$y=a^x$和$y=\log_a(x+1)$同为增函数或同为减函数,因此$f(x)=a^x+\log_a(x+1)$必定在定义域内为单调函数,因此在$[0,1]$上的最大值与最小值都应在区间端点处取得,因此得方程$f(0)+f(1)=a$,即$1+a+\log_a2=a$,即$\log_a2=-1$,解得$a=\frac{1}{2}$,故选C.

7. $(-2,0)$ 【解析】$\because y=\log_at$的图象恒过$(1,0)$,

$\therefore$令$\frac{2x+1}{x-1}=1$,得$x=-2$,$\therefore$该函数过$(-2,0)$.

8. 4 【解析】$\because\log_2x\leqslant2$,$\therefore 0<x\leqslant4$.

又$\because A\subseteq B$,$\therefore a>4$,$\therefore c=4$.

9. ②③

10. (1)$\begin{cases}1-x>0,\\x+3>0,\end{cases}$ $\therefore$定义域为$\{x|-3<x<1\}$.

$f(x)=\log_a(-x^2-2x+3)$,

令$t=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,

$\because x\in(-3,1)$,$\therefore t\in(0,4]$.

$\therefore f(t)=\log_at$,$t\in(0,4]$.

当$0<a<1$时,$y_{\min}=f(4)=\log_a4$,

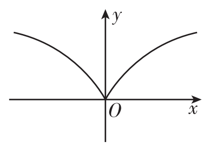
值域为$[\log_a4,+\infty)$.

当$a>1$时,值域为$(-\infty,\log_a4]$.

(2)$y_{\min}=-2$,由(1)得

$\begin{cases}0<a<1,\\\log_a4=-2,\end{cases}$ 得$a=\frac{1}{2}$.

11. 函数图象如图所示,其图象可由如下变换得到:函数$y=\log_2x$的图象先向左平移1个单位得到函数$y=\log_2(x+1)$的图象,再将所得图象y轴右侧部分保留,左侧不要,然后将y轴右侧图象关于y轴对称而得到图象的另一部分.



第11题图

12. 函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$在$(-\infty,1-\sqrt{3})$上递增,则$(-\infty,1-\sqrt{3})$需是其增区间的一个子区间.

设$f(x)=x^2-ax-a=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a$,对称轴为$x=\frac{a}{2}$,且必须$f(1-\sqrt{3})>0$使函数$y$有意义.

$\therefore\begin{cases}1-\sqrt{3}\leqslant\frac{a}{2},\\f(1-\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})^2-a(1-\sqrt{3})-a>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a\geqslant2(1-\sqrt{3}),\\a<2.\end{cases}$

$\therefore 2-2\sqrt{3}\leqslant a<2$,即$a$的取值范围为$[2-2\sqrt{3},2)$.

2.3 幂函数

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】由幂函数定义知$y=x^2$与$y=x^0$为幂函数.

2. C 【解析】本题考查了函数的定义域.A项中,$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.B项中,$y=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$,定义域为$[0,+\infty)$.C项中,$y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$,定义域

为 **R**. D 项中，$y=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$，它的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 故选 C.

3. D 【解析】由幂函数的性质知函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在第一象限为减函数，且它的定义域为 $\{x|x>0\}$. 故选 D.

4. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$，则有 $3^{\alpha}=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

5. ②④ 【解析】由奇偶性的定义知 $y=x^2$ 为偶函数，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 既不是奇函数也不是偶函数. 由幂函数的单调性知 $y=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故填②④.

6. $y=(x-1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$，定义域为 $x\neq1$.

令 $t=x-1$，则 $y=t^{-\frac{2}{3}}$，$t\neq0$，为偶函数.

因为 $\alpha=-\frac{2}{3}<0$，所以 $y=t^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 又 $t=x-1$ 单调递增，故 $y=(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

7. $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$，由图象知 $x\in(0,+\infty)$ 时为减函数，又 $f(a+1)<f(10-2a)$，

$\therefore\begin{cases}a+1>0,\\10-2a>0,\\a+1>10-2a.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>-1,\\a<5,\\a>3.\end{cases}$ $\therefore 3<a<5$.

★ 课后作业 ★

1. C

2. A 【解析】$\because y=x^{\frac{2}{5}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，

$\therefore\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，即 $a>c$.

$\because y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ 在 **R** 上是减函数，且 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，

$\therefore\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，即 $b<c$.

$\therefore b<c<a$，故选 A.

3. A

4. D 【解析】由题意得 $\begin{cases}m-2<0,\\m^2-3m+3=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m<2,\\m=1\text{ 或 }m=2,\end{cases}$ $\therefore m=1$.

5. B

6. B

7. $5^a<0.5^a<5^{-a}$ 【解析】$5^{-a}=\left(\frac{1}{5}\right)^{a}$，因为 $a<0$ 时，$y=x^a$ 单调递减，且 $\frac{1}{5}<0.5<5$，所以 $5^a<0.5^a<5^{-a}$.

8. $(-3,1)$ 【解析】$\because(3-2x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$ 有意义，

$\therefore$ 由 $-x^2-2x+3>0$，得 $-3<x<1$.

9. $p<1$

10. $\frac{1}{2\ 013}$

11. $\because 0.5<0.6$，$\therefore 1<1.2^{0.5}<1.2^{0.6}$，$0.5^{1.2}<0.6^{1.2}<1$，

$\therefore 0.5^{1.2}<0.6^{1.2}<1.2^{0.5}<1.2^{0.6}$.

12. $\because$ 函数在 $(0,+\infty)$ 上递减，

$\therefore 3m-9<0$，解得 $m<3$，又 $m\in\mathbf{N}^*$，$\therefore m=1,2$.

又函数图象关于 y 轴对称，$\therefore 3m-9$ 为偶数，故 $m=1$，

$\therefore(a+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2a)^{-\frac{1}{3}}$.

又 $\because y=x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上均递减，

$\therefore a+1>3-2a>0$ 或 $0>a+1>3-2a$ 或 $a+1<0<3-2a$，解得 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$ 或 $a<-1$.

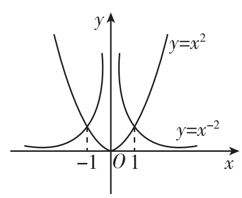
【解析】(1) 解决与幂函数有关的综合题时，一定要考虑幂函数的定义. (2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$，由于 α 的值不同，单调性和奇偶性也就不同.

13. 设 $f(x)=x^{\alpha}$，则由题意得 $2=(\sqrt{2})^{\alpha}$，

$\therefore\alpha=2$，即 $f(x)=x^2$. 又设 $g(x)=x^{\beta}$，则由题意得 $\frac{1}{4}=(-2)^{\beta}$，

$\therefore\beta=-2$，$g(x)=x^{-2}$.

在同一平面直角坐标系中作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象，如图所示，由图象可知：



第 13 题图

(1) 当 $x>1$，或 $x<-1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(2) 当 $x=\pm1$ 时，$f(x)=g(x)$；

(3) 当 $-1<x<1$ 且 $x\neq0$ 时，$f(x)<g(x)$.

【解析】应用数形结合，切入分类讨论的分界点，从而寻找出大小关系.

单元评估检测

1. A 【解析】$\sqrt{2\ 012^2x^2y^2}=2\ 012|xy|=\begin{cases}2\ 012xy,xy>0,\\-2\ 012xy,xy<0.\end{cases}$

2. A 【解析】由指数函数、对数函数、幂函数的性质可得 $a<0$，$0<b<1$，$c>1$.

3. D 【解析】由幂函数的定义知选 D.

4. C 【解析】$\because M=\{x|x<0\}$，$N=\{x|x\neq-1\}$，$\therefore M\cap N=\{x|x<0\text{且 }x\neq-1\}$.

5. D 【解析】当 $x>0$ 时，$y=\frac{xa^x}{|x|}=a^x$. 又 $0<a<1$，可排除 A、C；当 $x<0$ 时，$y=\frac{xa^x}{|x|}=-a^x$. 又 $0<a<1$，可排除 B.

6. A 【解析】由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $f(0)=a^0+b=0$，$\therefore b=-1$. 又由 $f(1)=-f(-1)=-(a^{-1}+b)=\frac{1}{2}$，得 $a=2$，$\therefore f(2)=-f(-2)=-(a^{-2}+b)=-\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{4}$.

7. D 【解析】当 $x<4$ 时，$f(\log_2 3)=f(\log_2 3+3)=f(\log_2 24)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 24}=2^{-\log_2 24}=\frac{1}{24}$.

8. B 【解析】$\because f(1)=a, f(-1)=1-(-1)=2$，$\therefore a=2$.

9. B 【解析】依题意，$a>0$ 且 $a\neq 1$，所以 $2-ax$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，因此 $\begin{cases}a>1,\\2-a>0,\end{cases}$ 解得 $1<a<2$，选 B.

10. A 【解析】要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，需满足 $\begin{cases}0<a<1,\\3a-1<0,\\3a-1+4a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$，故选 A.

11. B 【解析】由题意可知，$x<0$ 时的图象是抛物线，$x\geqslant 0$ 时的图象是指数函数 $y=2^x$ 的图象向下平移一个单位长度，故选 B.

12. B 【解析】由 $f(0)=0\Rightarrow a=-1$，$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow\frac{1+x}{1-x}>1\Rightarrow x\in(0,1)$.

13. $\left(\frac{2}{3},1\right]$ 【解析】$\because 0<3x-2\leqslant 1$，$\therefore\frac{2}{3}<x\leqslant 1$.

14. 2 【解析】由分段函数代入求值得 $f(8)=\log_3(8+1)=\log_3 9=2$.

15. $\{x|1<x<2\}$ 【解析】令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$，所以 $f(\log_2 x)<0$，即 $f(\log_2 x)<f(1)$. 因为 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，所以 $\begin{cases}\log_2 x<1,\\\log_2 x>0,\\x>0,\end{cases}$ 故 $1<x<2$.

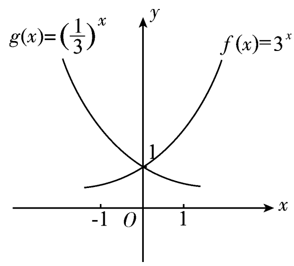
16. ②④⑤ 【解析】由已知 $\log_2 a=\log_3 b$，在同一坐标系中作出 $y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$ 的图象，当纵坐标相等时，可以得到相应横坐标的大小关系，从而得出②④⑤.

17. (1)原式 $=\frac{\lg 2+\lg 5-3\lg 2}{\lg 5+1-(\lg 4+1)}=\frac{\lg 5-2\lg 2}{\lg 5-2\lg 2}=1$.

(2) $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=9$，$\therefore x+x^{-1}=7$，$(x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}=49$. $\therefore x^2+x^{-2}=47$，$(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1})=3\times(7-1)=18$，$\therefore$ 原式 $=\frac{18+2}{47+3}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

18. $\because \lg a+\lg b=2\lg(a-2b)$. $\therefore \lg ab=\lg(a-2b)^2$. $\therefore ab=(a-2b)^2$，$\therefore a^2+4b^2-5ab=0$，$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\frac{a}{b}+4=0$，解之得 $\frac{a}{b}=1$ 或 $\frac{a}{b}=4$. $\because a>0, b>0$，若 $\frac{a}{b}=1$，则 $a-2b<0$，$\therefore\frac{a}{b}=1$ 舍去. $\therefore\frac{a}{b}=4$.

19. (1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如图所示. (2) $f(1)=3^1=3$，$g(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$；$f(\pi)=3^\pi$，$g(-\pi)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}=3^\pi$；$f(m)=3^m$，$g(-m)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-m}=3^m$. 从以上计算的结果看，两个函数当自变量取值互为相反数时，其函数值相等，即当指数函数的底数互为倒数时，它们的图象关于 y 轴对称.



第 19 题图

20. (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore m^2-2m-3<0$，解得 $-1<m<3$. 又 $\because m\in\mathbf{Z}$，$\therefore m$ 的可能取值为 0,1,2. 又 $\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore m^2-2m-3$ 应为偶数，当 $m=0$ 或 $m=2$ 时，$m^2-2m-3=-3$，不是偶数，舍去. 当 $m=1$ 时，$m^2-2m-3=-4$，此时 $f(x)=x^{-4}$，符合题意，$\therefore f(x)=x^{-4}$. (2)由(1)知 $F(x)=a\sqrt{x^{-4}}-\frac{b}{x\cdot x^{-4}}=\frac{a}{x^2}-bx^3$，当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时，$F(x)$ 为非奇非偶函数，当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，$F(x)=-bx^3$ 为奇函数，当 $a\neq 0$ 且 $b=0$ 时，$F(x)=\frac{a}{x^2}$ 为偶函数，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，$F(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

21. (1) $f(x)=\log_a(x+1)-\log_a(1-x)$，则 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<1$. 故所求定义域为 $\{x|-1<x<1\}$. (2) $f(x)$ 为奇函数. 证明如下：由(1)知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-1<x<1\}$，$f(-x)=\log_a(-x+1)-\log_a(1+x)=-[\log_a(x+1)-\log_a(1-x)]=-f(x)$. 故 $f(x)$ 为奇函数. (3)当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在定义域 $\{x|-1<x<1\}$ 内是增函数；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在定义域 $\{x|-1<x<1\}$ 内是减函数.

22. (1)当 $a=1$ 时，$f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$，对称轴为 $x=1$，图象开口向下. 因为 $x\in[-2,2]$，所以当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 最小，此时 $f(-2)=-9$. (2) $f(x)=-x^2+2ax-1=-(x-a)^2+a^2-1$，对称轴为 $x=a$，要使函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是减函数，则有 $a\leqslant -2$，故实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -2$. (3)当 $a\leqslant -2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上单调递减，此时函数的最大值为 $f(-2)=-5-4a$，即 $g(a)=-5-4a(a\leqslant -2)$. 当 $-2<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(a)=a^2-1$，即 $g(a)=a^2-1$，当 $a\geqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上

单调递增,此时函数的最大值为 $f(2)=4a-5$,即 $g(a)=4a-5$,综上 $g(a)=\begin{cases}-5-4a, a\leqslant -2,\\ a^2-1, -2<a<2,\\ 4a-5, a\geqslant 2.\end{cases}$ 由图象可知 $g(a)$ 的最小值为 -1.

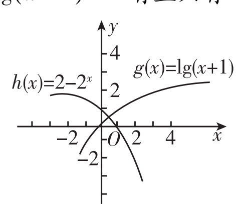
第三章　函数的应用

3.1　函数与方程

3.1.1　方程的根与函数的零点

★ 课堂作业 ★

1. B
2. C
3. B 【解析】$\because f(1)=\log_3 1-8+2=-6<0$,$f(2)=\log_3 2-8+4=\log_3 2-4<0$,$f(3)=\log_3 3-8+6=-1<0$,$f(4)=\log_3 4-8+8=\log_3 4>0$,
$\therefore f(3)\cdot f(4)<0$. 故函数的零点一定位于区间 $(3,4)$.
4. $m<1$ 【解析】由条件得方程 $2(m+1)x^2-1=4mx-2m$ 有两个不等的实数根,即 $2(m+1)x^2-4mx+2m-1=0$ 有两个不等的实数根,即 $\Delta=16m^2-8(m+1)(2m-1)>0$,解得 $m<1$.
5. $\frac{1}{2}<k<\frac{2}{3}$ 【解析】由 $\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)>0\end{cases}$ 可得.
6. (1) 由 $f(x)=4x-3=0$,得 $x=\frac{3}{4}$,所以函数的零点是 $\frac{3}{4}$;
(2) 由于 $f(x)=-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$,因此方程 $f(x)=0$ 的根为 $-3,1$,故函数的零点是 $-3,1$;
(3) 由于 $f(x)=x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$,
由 $f(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$,故函数的零点是 $1,-1$.
7. 方法一:$\because f(0)=1+0-2=-1<0$, $f(2)=4+\lg 3-2>0$,
由根的存在性定理,知 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上必定存在实根,
又显然 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,故 $f(x)$ 有且只有一个零点.
方法二:在同一坐标系下作出 $h(x)=2-2^x$ 和 $g(x)=\lg(x+1)$ 的图象.
由图象知 $y=\lg(x+1)$ 和 $y=2-2^x$ 有且只有一个交点,即 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 有且只有一个零点.



第 7 题图

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】$\log_5(x-1)=0$,解得 $x=2$,$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_5(x-1)$ 的零点是 $x=2$,故选 C.
2. C 【解析】若 $a=0$,则 $f(x)=bx+c$ 是一次函数,由 $f(1)\cdot f(2)<0$ 得零点只有一个;若 $a\neq 0$,则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为二次函数,如有两个零点,则必有 $f(1)\cdot f(2)>0$,与已知矛盾. 故选 C.
3. D 【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(0)=0$,且在 $(0,+\infty)$ 内的零点有 1 003 个,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的零点有 1 003 个. 因此 $f(x)$ 的零点共有 $1\,003+1\,003+1=2\,007$ 个.
4. D 【解析】$\because f(x)=\frac{x-1}{x}$,$\therefore f(4x)=\frac{4x-1}{4x}=x$,解得 $x=\frac{1}{2}$.
5. A 【解析】计算出函数在区间端点处的函数值并判断符号,再利用零点的存在条件说明零点的位置.
$\because f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$,
$\therefore f(a)=(a-b)(a-c)$,$f(b)=(b-c)(b-a)$,$f(c)=(c-a)(c-b)$,
$\because a<b<c$,$\therefore f(a)>0$,$f(b)<0$,$f(c)>0$,
$\therefore f(x)$ 的两个零点分别位于区间 (a,b) 和 (b,c) 内.
6. B 【解析】由 $|\log_2|x|-1|=0$,$\log_2|x|=1$,$\therefore x=\pm 2$,共两个实根,$\therefore$ 原函数有 2 个零点.
7. 3 【解析】$\because$ 二次函数 $y=x^2+mx+m+3$ 的一个零点在原点,则 $m+3=0$,$\therefore m=-3$. $\therefore$ 二次函数为 $y=x^2-3x$. 令 $x^2-3x=0$,得 $x_1=0$,$x_2=3$,$\therefore$ 该函数的另一个零点为 3.
8. 0 和 2 【解析】由 $f(x)=x^2-1$,得 $y=f(x-1)=(x-1)^2-1=x^2-2x$,$\therefore$ 由 $x^2-2x=0$,解得 $x_1=0$,$x_2=2$,因此,函数 $f(x-1)$ 的零点是 0 和 2.
9. 2 【解析】设 $y_1=\ln x$,$y_2=x-2$,在同一坐标系下作图象(略)可知,它们有两个交点,$\therefore$ 函数 $f(x)=\ln x-x+2$ 的零点个数为 2.
10. $0,-\frac{1}{2}$ 【解析】由 $2a+b=0$,得 $b=-2a$,$g(x)=bx^2-ax=-2ax^2-ax$,令 $g(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=-\frac{1}{2}$,$\therefore g(x)=bx^2-ax$ 的零点为 $0,-\frac{1}{2}$.
11. (1) 设函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$,
由 $\begin{cases}c=-8,\\ a+b+c=-5,\\ 9a+3b+c=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=-8.\end{cases}$
$\therefore f(x)=x^2+2x-8$.
(2) 令 $f(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=-4$,
$\therefore$ 零点是 $x_1=2$,$x_2=-4$.
(3) $f(2)f(4)=0$,
$f(-1)f(3)=-9\times 7=-63<0$,$f(-5)f(1)=-35<0$,$f(3)f(-6)=112>0$.
12. ①若 $a=0$,则 $f(x)=-x-1$,为一次函数,易知函数仅有一个零点;
②若 $a\neq 0$,则函数 $f(x)$ 为二次函数,若其只有一个零

点，则方程 $ax^2-x-1=0$ 仅有一个实数根，

故判别式 $\Delta=1+4a=0$，$a=-\dfrac{1}{4}$.

综上，当 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{1}{4}$时，函数仅有一个零点.

13. 令 $f(x)=mx^2+2(m+3)x+2m+14$.

依题意得 $\begin{cases}m>0,\\f(4)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<0,\\f(4)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}m>0,\\26m+38<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<0,\\26m+38>0,\end{cases}$

解得 $-\dfrac{19}{13}<m<0$.

3.1.2　用二分法求方程的近似解

★ 课堂作业 ★

1. D

2. C 【解析】在 $(0,2)$ 内有唯一零点，故在 $[2,16)$ 上无零点.

3. A

4. 3 【解析】设 $f(x)=x^3-x-1$，$\because b-a=1$，$\therefore b=a+1$. $\therefore$ 区间为 $(a,a+1)$，$a,b\in\mathbf{Z}$. 经验证，$f(1)=-1<0$，$f(2)=8-2-1=5>0$，$f(1)\cdot f(2)<0$，$\therefore a=1,b=2$，$a+b=3$.

5. $(2,2.5)$ 【解析】设 $f(x)=x^3-2x-5$，$\because f(2)=-1<0$，$f(3)=16>0$，又 $f(2.5)=5.625>0$，$\therefore f(2)\cdot f(2.5)<0$，因此，下一个有根区间是 $(2,2.5)$.

6. 用二分法求 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内零点的过程如下表：

(a,b)	$\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
(1,2)	1.5	0	1	−0.125
(1.5,2)	1.75	−0.125	1	0.234 375
(1.5,1.75)	1.625	−0.125	0.234 375	0.009 765 63
(1.5,1.625)	1.562 5	−0.125	0.009 765 63	−0.068 115 2
(1.562 5,1.625)	1.593 75	−0.068 115 2	0.009 765 63	−0.031 890 9

$\because |1.5625-1.625|=0.0625<0.1$，

$\therefore$ 所求零点的近似值为 $x_0=1.5625$（或 1.625），

即 $f(x)=x^3-2x^2+1$ 在区间 $(1,2)$ 内的零点为 1.5625（或 1.625）.

7. 设 $f(x)=2x^3+3x-3$.

经计算，$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，

所以函数在 $(0,1)$ 内存在零点，

即方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0,1)$ 内有解.

取 $(0,1)$ 的中点 0.5，经计算 $f(0.5)<0$，

又 $f(1)>0$，所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0.5,1)$ 内有解，如此继续下去，得到方程的一个实数解所在的区间，如下表.

区间	中点的值	中点函数近似值
(0,1)	0.5	−1.25
(0.5,1)	0.75	0.093 75
(0.5,0.75)	0.625	−0.636 718
(0.625,0.75)	0.687 5	−0.287 597

显然，精确度要求为 0.1 时可取 $x=0.7$ 作为方程的一个近似解.

【解析】考查函数 $f(x)=2x^3+3x-3$，从一个两端函数值异号的区间开始，应用二分法逐步缩小方程实数解所在区间.

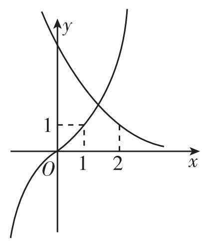
★ 课后作业 ★

1. C 【解析】观察对应值表可知，$f(1)>0$，$f(2)>0$，$f(3)<0$，$f(4)>0$，$f(5)<0$，$f(6)<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,6]$ 上的零点至少有 3 个，故选 C.

2. B 【解析】1.5 为区间 $(1,2)$ 的中点，且 $f(1)<0$，$f(1.5)>0$，$\therefore$ 方程的根 $x_0\in(1,1.5)$，又 1.25 是 $(1,1.5)$ 的中点且 $f(1.5)>0$，$f(1.25)<0$，$\therefore x_0\in(1.25,1.5)$. 故选 B.

3. B 【解析】设 $f(x)=\log_2x+x^2-2$，$\because f(1)=0+1-2=-1<0$，$f(2)=1+4-2=3>0$，$\therefore f(1)f(2)<0$，由根的存在性定理知，方程 $\log_2x+x^2=2$ 的根一定位于区间 $(1,2)$，故选 B.

4. B 【解析】数形结合可知，交点横坐标在 $(1,2)$ 内.



第 4 题图

5. C 【解析】设 $y_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$y_2=x^2$，在同一坐标系下作图象（略）可知，它们有两个交点，$\therefore$ 方程 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^2$ 有两个根. 故选 C.

6. A 【解析】$g(x)=4^x+2x-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}-2=\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}<0$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+1-2=1>0$. 设 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点为 x_0，则 $\dfrac{1}{4}<x_0<\dfrac{1}{2}$，$0<x_0-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{4}$，$\therefore \left|x_0-\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{4}$. 又 $f(x)=4x-1$ 的零点为 $x=\dfrac{1}{4}$，$f(x)=(x-1)^2$ 零点为 $x=1$，$f(x)=e^x-1$ 零点为 $x=0$，$f(x)=\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$零点为 $x=\dfrac{3}{2}$. 故选 A.

7. ①②④

8. 1.56 【解析】注意到 $f(1.5562)=-0.029$ 和 $f(1.5625)=0.003$，显然 $f(1.5562)f(1.5625)<0$，故区间的端点四舍五入可得 1.56.

9. $(2,+\infty)$ 【解析】设 $f(x)=mx^2-x-1$，$\because$ 方程 $mx^2-x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内恰有一解，$\therefore$ 当 $m=0$ 时，方程 $-x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内无解，当 $m\neq0$ 时，由 $f(0)f(1)<0$，即 $-1\cdot(m-1-1)<0$，解得 $m>2$.

10. ③⑤ 【解析】借助图象判断.

11. 对于 $f(x)=x^2-2$，其图象在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续不断的，$\because f(1)\cdot f(2)<0$，$\therefore f(x)=x^2-2$ 在 $(1,2)$ 内有一个零点，即方程 $x^2-2=0$ 在 $(1,2)$ 内有一个实数解，取 $(1,2)$ 的中点 1.5，$f(1.5)=1.5^2-2=0.25>0$，又 $f(1)<0$，所以方程在 $(1,1.5)$ 内有解，依此计算，得方程 $x^2-2=0$，正实数解所在区间如下：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	…
左端点	1	1	1.25	1.375	1.375	1.406 25	…
右端点	2	1.5	1.5	1.5	1.437 5	1.437 5	…

$\therefore$ 方程的一个正根的近似值为 1.4.

12. 原方程可化为 $3^x-\frac{1}{x+1}+1=0$，即 $3^x=\frac{1}{x+1}-1$. 在同一坐标系中，分别画出函数 $g(x)=3^x$ 与 $h(x)=\frac{1}{x+1}-1$ 的简图.

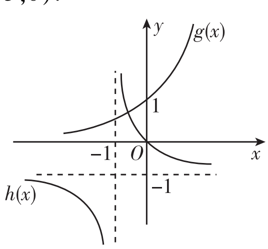
$g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象交点的横坐标位于区间 $(-1,0)$，且只有一个交点，所以原方程只有一解 $x=x_0$.

令 $f(x)=3^x+\frac{x}{x+1}=3^x-\frac{1}{x+1}+1$，

$\because f(0)=1-1+1=1>0$，

$f(-0.5)=\frac{1}{\sqrt{3}}-2+1=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<0$，

$\therefore x_0\in(-0.5,0)$.



第 12 题图

用二分法求解列表如下：

中点值	中点(端点)函数值及符号	选取区间
	$f(-0.5)<0,f(0)>0$	$(-0.5,0)$
-0.25	$f(-0.25)\approx0.4265>0$	$(-0.5,-0.25)$
-0.375	$f(-0.375)\approx0.0623>0$	$(-0.5,-0.375)$
-0.4375	$f(-0.4375)\approx-0.1594<0$	$(-0.4375,-0.375)$
-0.40625	$f(-0.40625)=-0.0442<0$	$(-0.40625,-0.375)$

$\because -0.40625\approx-0.4$，$-0.375\approx-0.4$，

$\therefore$ 原方程的近似解为 $x\approx-0.4$（精确到 0.1）.

13. 设函数 $f(x)=2x^3-6x^2+3$，因为 $f(-1)=-5<0$，$f(0)=3>0$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=-5<0$，$f(3)=3>0$，且函数 $f(x)=2x^3-6x^2+3$ 的图象是连续的曲线，所以方程 $2x^3-6x^2+3=0$ 有三个实数解. $\because f(-1)\cdot f(0)<0$，$\therefore$ 在区间 $(-1,0)$ 内有一个解. 取区间 $(-1,0)$ 的中点 $x_1=-0.5$，用计算器可算得 $f(-0.5)=1.25>0$. 因为 $f(-1)\cdot f(-0.5)<0$，所以 $x_0\in(-1,-0.5)$. 再取 $(-1,-0.5)$ 的中点 $x_2=-0.75$，用计算器可算得 $f(-0.75)<0$. 因为 $f(-0.75)\cdot f(-0.5)<0$，所以 $x_0\in(-0.75,-0.5)$. 同理，可得 $x_0\in(-0.75,-0.625)$，$x_0\in(-0.6875,-0.625)$，$x_0\in(-0.65625,-0.625)$，$x_0\in(-0.65625,-0.640625)$，$x_0\in(-0.6484375,-0.640625)$，$x_0\in(-0.64453125,-0.640625)$. 由于 $|(-0.640625)-(-0.64453125)|<0.01$，此时区间 $(-0.64453125,-0.640625)$ 的两个端点精确到 0.01 的近似值都是 -0.64，所以方程 $2x^3-6x^2+3=0$ 在区间 $(-1,0)$ 且精确到 0.01 的近似解约为 -0.64. 同理可求得方程 $2x^3-6x^2+3=0$ 在区间 $(0,1)$ 和 $(2,3)$ 内且精确到 0.01 的近似解分别为 0.83，2.81. 所以，方程 $2x^3-6x^2+3=0$ 的三个解的和为 $-0.64+0.83+2.81=3$.

注：可用韦达定理，当判断有三个实根时，设为 x_1,x_2,x_3，则有 $2x^3-6x^2+3=2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=2[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+\cdots]$

比较系数有 $x_1+x_2+x_3=3$.

3.2 函数模型及其应用

3.2.1 几类不同增长的函数模型

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】（排除法）当 $x=1$ 时，否定 B 项；当 $x=2$ 时，否定 D 项，当 $x=3$ 时，否定 A 项；故选 C.

2. B 【解析】由 $(1+x)^{10}=4$ 可得 $x=4^{\frac{1}{10}}-1$.

3. $A=h^2+2h(h>0)$ 【解析】关键是求梯形上底. 由已知得梯形上底 $2+2h$，所以 $A=\frac{1}{2}[2+(2+2h)]h=h^2+2h(h>0)$.

4. 11.11% 【解析】设商品原价为 a，需提价 x. 由题意 $a(1-10\%)(1+x)=a$，解得 $x=\frac{1}{9}\approx11.11\%$.

5. (1) 当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时，$y=4t$.

当 $t>1$ 时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}$，此时 $M(1,4)$ 在曲线上，

$\therefore 4=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}$，$\therefore a=3$，这时 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}$.

$\therefore y=f(t)=\begin{cases}4t(0\leqslant t\leqslant1),\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}(t>1).\end{cases}$

(2) $\because f(t)\geqslant0.25$，即 $\begin{cases}4t\geqslant0.25,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}\geqslant0.25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}t\geqslant\dfrac{1}{16},\\ t\leqslant 5,\end{cases}$

$\therefore \dfrac{1}{16}\leqslant t\leqslant 5.$

所以服药一次治疗疾病有效的时间为 $5-\dfrac{1}{16}=4\dfrac{15}{16}$ 个小时.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】本题主要考查函数定义域的确定,其定义域不仅要使解析式有意义,同时还要受到实际问题的限制. 由三角形任意两边之和大于第三边,得 $2x>y$ 且 $y=20-2x>0$,可得 $5<x<10$. 故选 D.

2. A 【解析】设陈先生行程为 x,则 $6+(x-2)\times 1.8+\dfrac{11.5}{6}\times 1.8=17$,解得 $x\approx 6.2$ km.

3. C 【解析】代入数据(3.0,4.04)和(4.0,7.5)检验,得选 C.

4. D

5. 1.75(万件) 【解析】由$\begin{cases}1=a\cdot(0.5)^1+b,\\ 1.5=a\cdot(0.5)^2+b,\end{cases}$解方程组得$\begin{cases}a=-2,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore y=-2\cdot(0.5)^x+2,$

所以 3 月份产量为 $y=-2\cdot(0.5)^3+2=1.75$ 万件.

6. $t=-\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N}{N_0}$ 【解析】$N=N_0e^{-\lambda t}\Rightarrow\dfrac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}\Rightarrow-\lambda t=\ln\dfrac{N}{N_0}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N}{N_0}.$

7. 16 【解析】根据题意,结合题图知 $BC=4$,$CD=5$,$AD=5$,可求 $AB=8$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4=16.$

8. 已知商品的成本为 a 元,则若月初售出,到月末共获利润为:

$y_1=100+(a+100)\times 2.4\%=0.024a+102.4$,

若月末售出,可获利 $y_2=120-5=115$(元),

$y_1-y_2=0.024a-12.6=0.024(a-525)$.

故当成本 a 大于 525 元时,月初售出好;

当成本 a 小于 525 元时,月末售出好;

当成本 a 等于 525 元时,月初、月末售出获利相同.

9. 设每件售价定为 x 元,则比原价提高了 $(x-10)$ 元,于是销售件数减少了 $\dfrac{x-10}{0.5}\times 10=20(x-10)$ 件,即每天销售件数为 $200-20(x-10)=400-20x$.

$\therefore$ 每天所获利润为 $y=(400-20x)(x-8)=-20x^2+560x-3\ 200=-20(x-14)^2+720.$

故当 $x=14$ 时,有 $y_{\max}=720$.

答:售价定为每件 14 元时,可获最大利润,其最大利润为 720 元.

3.2.2 函数模型的应用实例

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】设两年增长的人口数为 y,则 $y=64\times(1+1‰)^2-64\approx 0.128$(亿).

2. D 【解析】由题意知 $(1+10.4\%)^y=x$,所以 $y=\log_{1.104}x\ (x>1)$,图象应为 D.

3. $y=-3x+95\left(20\leqslant x\leqslant\dfrac{95}{3}\right)$ 【解析】设进、出水速度分别为 v_1 升/分,v_2 升/分,则据图象有$\begin{cases}5v_1=20,\\ 15(v_1-v_2)+20=35.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}v_1=4,\\ v_2=3.\end{cases}$ $\therefore$ 20 分钟后容器中的水量 y 与时间 x 的关系式为 $y-35=-3(x-20)$,即 $y=-3x+95$. 又 $y\geqslant 0$,$\therefore x\leqslant\dfrac{95}{3}.$

4. (1) $\because x>100$ 时,全为次品,不可能盈利,故只需考虑 $0<x\leqslant 100$ 时,$T(x)=Ax\left(1-\dfrac{1}{101-x}\right)-\dfrac{A}{3}\cdot\dfrac{x}{101-x}=A\left\{\dfrac{307}{3}-\left[(101-x)+\dfrac{404}{3(101-x)}\right]\right\}$,定义域为 $\{x\mid 0<x\leqslant 100, x\in\mathbf{N}^*\}$. (2) 令 $101-x=t\in[1,100]$,$t\in\mathbf{N}^*$,则 $T=A\left[\dfrac{307}{3}-\left(t+\dfrac{404}{3t}\right)\right]$. 要使 T 最大,则必须使 $f(t)=t+\dfrac{404}{3t}$ 最小,由定义法易得 $t\in[1,11]$ 时,$f(t)$ 为减函数,$t\in[12,100]$ 时,$f(t)$ 为增函数. 故在两段上的最小值分别为 $f(11)$ 及 $f(12)$. 又 $f(11)>f(12)$,$\therefore$ 当 $t=12$ 即 $x=89$ 时,T 取最大值.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】可画出散点图进行分析,容易看出为二次函数.

2. C 【解析】设共分裂了 x 次,则有 $2^x=4\ 096$,$\therefore 2^x=2^{12}$,即 $x=12$,又 $\because$ 每次分裂需 15 min,$\therefore$ 共 $15\times 12=180$(min),即 3 h,故选 C.

3. D 【解析】考查相同的 Δh 内 ΔV 的大小比较.

4. B 【解析】设最多用 t 分钟,则水箱内水量 $y=200+2t^2-34t$,当 $t=\dfrac{17}{2}$ 时,y 有最小值,此时共放水 $34\times\dfrac{17}{2}=289$ 升,可供 4 人洗澡.

5. 1　$12\dfrac{1}{2}$ 【解析】依题意得:$S=(4+x)\left(3-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+x+12=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+12\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$S_{最大值}=12\dfrac{1}{2}.$

6. $y=\begin{cases}0.5x,0<x\leqslant 100,\\ 0.4x+10,x>100\end{cases}$ 【解析】由题意可得 $y=\begin{cases}0.5x,0<x\leqslant 100,\\ 0.4x+10,x>100.\end{cases}$

7. ①④ 【解析】观察图中单位时间内产品产量 y 变化量

快慢，可知①④正确.

8. (1) $y=\left(a+\frac{x}{b}\right)x-\left(\frac{1}{10}x^2+5x+100\right)$

$=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{10}\right)x^2+(a-5)x-100.$

(2) 由题意，得 $\begin{cases}-\dfrac{a-5}{2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{10}\right)}=150,\\ 40=a+\dfrac{150}{b},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=45,\\ b=-30.\end{cases}$

9. 建立年销量 y（万辆）与第 x 年的函数，可知函数图象必过点 $(1,8)$，$(2,18)$，$(3,30)$.

(1) 构造二次函数型 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

将点的坐标代入，可得 $\begin{cases}a+b+c=8,\\ 4a+2b+c=18,\\ 9a+3b+c=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=7,\\ c=0,\end{cases}$

则 $f(x)=x^2+7x$，故 $f(4)=44$，与计划误差为 4.7.

(2) 构造指数函数型 $g(x)=a\cdot b^x+c$，将点的坐标代入，

可得 $\begin{cases}ab+c=8,\\ ab^2+c=18,\\ ab^3+c=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{125}{3},\\ b=\dfrac{6}{5},\\ c=-42,\end{cases}$

则 $g(x)=\frac{125}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x-42$，

故 $g(4)=\frac{125}{3}\times\left(\frac{6}{5}\right)^4-42=44.4$，与计划误差为 5.1.

由上可得，$f(x)=x^2+7x$ 模型能更好地反映该公司年销量 y（万辆）与第 x 年的关系.

单元评估检测

1. C 【解析】A、B、D 三个函数中，都存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(a)\cdot f(b)<0$，只有 C 中函数值不变号，因此函数 $f(x)=x^2-2x+1$ 不能用二分法求零点.

2. B 【解析】$f(-2)=-4<0$，$f(-1)=3>0$，故在区间 $[-2,-1]$ 内必有零点.

3. B 【解析】设平均每年应降低成本 x，原来成本为 a，则第一年投产成本为 $a-a\cdot x=a(1-x)$，第二年投产成本为 $a(1-x)-a(1-x)\cdot x=a(1-x)^2$，$\therefore a(1-x)^2=a(1-36\%)$. $\therefore x=\frac{1}{5}$ 或 $x=\frac{9}{5}$（舍去）.

4. D 【解析】原方程可化为 $3^{-|x-1|}=m$. 设 $f(x)=3^{-|x-1|}$，值域为 $(0,1]$，$\therefore$ 若使方程有解，应使 $m\in(0,1]$.

5. B 【解析】函数模型设为 $y=kx+b$，代入 $(1,800)$，$(2,1\,300)$，得 $\begin{cases}k+b=800,\\ 2k+b=1\,300.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=500,\\ b=300.\end{cases}$ $\therefore y=500x+300$. 令 $x=0$，$\therefore y=300$. 即营销人员没有销售量时的收入是 300 元.

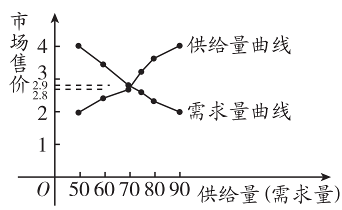
6. C 【解析】因为 $f(0)=e^0-2=-1<0$，$f(1)=e^1+1-2>0$，所以选 C.

7. C 【解析】经过比较可以发现，2 月份气温并非最高，但用电量却最大；1 月份气温最低，而用电量却不是最小，由此可以排除 A、B. 再观察 5、6、7、8 月份的气温逐步升高，而用电量也逐步升高，即知正确答案为 C.

8. B 【解析】$\because f\left(\frac{1}{e}\right)=-1-2e<0$，$f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln2-1<0$，$f(e)=1-\frac{2}{e}>0$，$f(3)=\ln3-\frac{2}{3}>0$，$f(4)=\ln4-\frac{1}{2}>0$，$\therefore$ 零点所在的大致区间为 $(2,3)$.

9. C 【解析】由题意，可知路程函数的表达式为 $s(t)=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant1),\\ 60\left(1<t\leqslant\dfrac{3}{2}\right),\\ 80t-60\left(\dfrac{3}{2}<t\leqslant\dfrac{5}{2}\right),\end{cases}$ 对比三个函数图象，可以知道满足题意的图象是图③.

10. C 【解析】建立直角坐标系，以横坐标表示供给量（需求量），纵坐标表示市场售价，利用所给数据在坐标系内描点，画出供给量曲线和需求量曲线（折线），供给量曲线与需求量曲线的交点即为市场供需平衡点. 由图可以看出市场供需平衡点应在 $(2.8,2.9)$ 内.



第 10 题图

11. A 【解析】设隔墙长度为 x m，则矩形的一边长为 x m，另一边长为 $\frac{24-4x}{2}$ m，$\therefore S=x\cdot\frac{24-4x}{2}=-2x^2+12x=-2(x-3)^2+18(0<x<6)$，$\therefore$ 当 $x=3$ 时，S 取得最大值.

12. C 【解析】如 $a=0$，则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一次函数，由已知 $f(1)\cdot f(2)<0$，得只有一个零点；若 $a\neq0$，则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为二次函数，如有两个，则应 $f(1)\cdot f(2)>0$，与已知矛盾.

13. 2，0，0，0，1

14. -3 【解析】根据函数解析式，由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{2a}{a}=-2$，即得结论.

15. 5 $\quad\frac{1}{2}$

16. 0 【解析】设三个根分别是 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_2=0$，$x_1+x_3=0$.

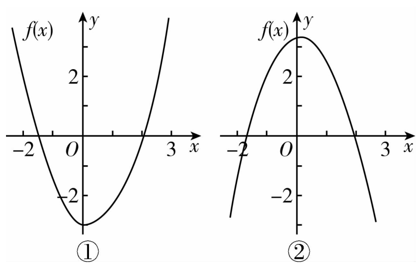
17. $f(x)=2x^3-2x-x+1=(x-1)(2x^2+2x-1)$. 令

$f(x)=0$，即$(x-1)(2x^2+2x-1)=0$，$\therefore x=1$或$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(x)$的零点是1或$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$或$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

18. 函数$f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$. 取区间$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$，$\because f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}+2}=-\dfrac{1}{7}<0$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{9}{2}+2}=\dfrac{1}{13}>0$，$\therefore$在区间$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$内函数$f(x)$至少有一个零点. $\therefore\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$就是符合条件的一个区间.

19. 设$f(x)=mx^2+(3m-2)x+2m-2$，结合二次函数$f(x)=mx^2+(3m-2)x+2m-2$的图象可得
$\begin{cases}m>0,\\f(-2)>0,\\f(0)<0,\\f(3)>0\end{cases}$（如图①）或$\begin{cases}m<0,\\f(-2)<0,\\f(0)>0,\\f(3)<0\end{cases}$（如图②），

解得$\dfrac{2}{5}<m<1$.



第 19 题图

20. (1) 设行李质量为 x kg，托运费用为 y 元，则

①若$0<x\leqslant 50$，则$y=0.25x$；

②若$50<x\leqslant 100$，则$y=12.5+0.35(x-50)$；

③若$x>100$，则$y=30+0.45(x-100)$.

所以，由①②③可知，

$$y=\begin{cases}0.25x(0<x\leqslant 50),\\12.5+0.35(x-50)(50<x\leqslant 100),\\30+0.45(x-100)(x>100).\end{cases}$$

(2) 因为 50 kg < 56 kg < 100 kg，所以 $y=12.5+6\times0.35=14.6$ 元.

21. (1) 由月产量为 x 台，则总成本为 $20\ 000+100x$，从而所获利润与月产量的函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+300x-20\ 000(0\leqslant x\leqslant 400),\\60\ 000-100x(x>400).\end{cases}$ (2) 当 $0\leqslant x\leqslant 400$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-300)^2+25\ 000$，当 $x=300$ 时，$f(x)$有最大值 25 000；当 $x>400$ 时，$f(x)=60\ 000-100x$ 是减函数，$f(x)<60\ 000-10\times400<25\ 000$. 所以当$x=300$时，$f(x)$有最大值 25 000. 即当月产量为 300 台时，公司所获利润最大，最大利润是 25 000 元.

22. (1) 设表示前 20 天每股的交易价格 P（元）与时间 t（天）的一次函数关系式为 $P=k_1t+m$，由图象得

$\begin{cases}2=k_1\times0+m,\\6=k_1\times20+m,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k_1=\dfrac{1}{5},\\m=2.\end{cases}$ 即 $P=\dfrac{1}{5}t+2$；

设表示第 20 天至第 30 天每股的交易价格 P（元）与时间 t（天）的一次函数关系式为 $P=k_2t+n$，

由图象得$\begin{cases}6=k_2\times20+n,\\5=k_2\times30+n,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-\dfrac{1}{10},\\n=8.\end{cases}$

即 $P=-\dfrac{1}{10}t+8$.

综上知 $P=\begin{cases}\dfrac{1}{5}t+2,0\leqslant t<20,\\-\dfrac{1}{10}t+8,20\leqslant t\leqslant 30\end{cases}(t\in\mathbf{N})$.

(2) 由表知，日交易量 Q 与时间 t 满足一次函数关系式，设 $Q=at+b$（a、b 为常数），将$(4,36)$与$(10,30)$的坐标代入，得$\begin{cases}4a+b=36,\\10a+b=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=40.\end{cases}$

所以日交易量 Q（万股）与时间 t（天）的一次函数关系式为 $Q=40-t$（$0\leqslant t\leqslant 30$，且 $t\in\mathbf{N}$）.

(3) 由(1)(2)可得

$$y=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}t+2\right)\times(40-t),0\leqslant t<20,\\\left(-\dfrac{1}{10}t+8\right)\times(40-t),20\leqslant t\leqslant 30\end{cases}(t\in\mathbf{N}).$$

即 $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{5}t^2+6t+80,0\leqslant t<20,\\\dfrac{1}{10}t^2-12t+320,20\leqslant t\leqslant 30\end{cases}(t\in\mathbf{N})$.

当 $0\leqslant t<20$ 时，函数 $y=-\dfrac{1}{5}t^2+6t+80$ 的图象的对称轴为直线 $t=15$，$\therefore$ 当 $t=15$ 时，$y_{\max}=125$；

当 $20\leqslant t\leqslant 30$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{10}t^2-12t+320$ 的图象的对称轴为直线 $t=60$，

$\therefore$ 该函数在$[20,30]$上单调递减，即当 $t=20$ 时，$y_{\max}=120$. 而 $125>120$，$\therefore$ 第 15 天日交易额最大，最大值为 125 万元.

期中测评试题

1. B 【解析】$A=\{x\in\mathbf{N}\mid-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}=\{0,1\}$，$\therefore 0\in A$，故选 B.

2. A 【解析】$f(-x)=\dfrac{1}{-x}-(-x)=-\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=$

$-f(x)$，因此函数为奇函数，所以图象关于原点对称.

3. B 【解析】因为函数在$(-\infty,4)$上为减函数，依题意可得函数的对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2(a-1)}{2}=1-a\geqslant 4\Rightarrow a\leqslant -3$.

4. D 【解析】由根号内非负及分母不为0可得$x-4\geqslant 0$且$\lg x\neq 1$，解得$x\geqslant 4$且$x\neq 10$. 故选 D.

5. B 【解析】本题考查零点存在性定理，直接计算可得$f(1)=\ln(1+1)-\dfrac{2}{1}=\ln 2-2=\ln 2-\ln e^2<0$，$f(2)=\ln(2+1)-\dfrac{2}{2}=\ln 3-1>0$，因此函数的零点必在区间$(1,2)$内.

6. A 【解析】当$x\leqslant -1$时，由$x+2=3$，得$x=1\notin(-\infty,-1]$. 当$-1<x<2$时，由$x^2=3$得$x=\pm\sqrt{3}$，只有$\sqrt{3}\in(-1,2)$，故选 A.

7. B 【解析】选项 A，$y\leqslant 0$，选项 C，$y\neq 0$，选项 D，$y\leqslant 0$，故选 B.

8. A 【解析】因为a,b,c均为正数，由指数函数和对数函数单调性得：

$\log_{\frac{1}{2}}a=2^a>1\Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{2}$，

$\log_{\frac{1}{2}}b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^b\in(0,1)\Rightarrow\dfrac{1}{2}<b<1$，

$\log_2 c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^c>0\Rightarrow c>1$，所以$a<b<c$，故选 A.

9. D 【解析】当$x\in[1,3]$时，$f(x)$在$[1,2]$上递减，在$[2,3]$上递增，$f(x)_{\max}=f(1)=4$，$f(x)_{\min}=f(2)=3$；根据奇函数在对称区间$x\in[-3,-1]$上的对称性得：$n=-4$，$m=-3$，则$m-n=1$，故选 D.

10. B 【解析】函数$f(x)=2^x+\log_2 x$在$(0,+\infty)$上是单调递增的，这个函数有零点，这个零点是唯一的，根据函数的单调递增性，在$(0,a)$上这个函数的函数值小于零，即$f(x_0)<0$.

11. 8 【解析】注意到集合中的元素有三个，代入即可得$2^3=8$.

12. $\dfrac{1}{5}$ 【解析】设$f(x)=x^\alpha$，则$9^\alpha=\dfrac{1}{3}$，所以$\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$f(25)=25^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5}$.

13. 3 【解析】令$x+4=t$，则$x=t-4$，$\therefore f(t)=(t-4)^3+2$，即$f(x)=(x-4)^3+2$. 当$f(x)=(x-4)^3+2=1$时，$x-4=-1$，$\therefore x=3$.

14. $(0,+\infty)$ 【解析】令$1-x=t$，则易知$t\in\mathbf{R}$，因此$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$，$y\in(0,+\infty)$，即值域为$(0,+\infty)$.

15. 1 980 元 【解析】设进价为x元，则有$x(1+20\%)=2\ 640\times 90\%$，解得$x=1\ 980$，故进价为 1 980 元.

16. 由题意可得$A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

(1)$B\cup C=\{-2,3,4,5\}$，

$A\cap(B\cup C)=\{-2,3,4,5\}$.

(2)$\complement_A(B\cup C)=\{-5,-4,-3,-1,0,1,2\}$，

$A\cap(\complement_A(B\cup C))=\{-5,-4,-3,-1,0,1,2\}$.

17. (1)由对数的运算性质以及换底公式可得

$$\log_2 15=\frac{\lg 15}{\lg 2}=\frac{\lg\left(3\times\frac{10}{2}\right)}{\lg 2}=\frac{\lg 3+\lg 10-\lg 2}{\lg 2}=\frac{b+1-a}{a}.$$

(2)$\sqrt{6\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{8^2}+0.027^{-\frac{2}{3}}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

$=\sqrt{\dfrac{5^2}{2^2}}+\sqrt[3]{(2^2)^3}+[(10^{-1}\times 3)^3]^{-\frac{2}{3}}\times(-3^{-1})^{-2}$

$=\dfrac{5}{2}+2^2+10^2\times 3^{-2}\times 3^2=106.5$.

18. (1)由已知$g(x)=f(x)-a$得，

$g(x)=1-a-\dfrac{2}{x}$，

$\because g(x)$是奇函数，$\therefore g(-x)=-g(x)$，即$1-a-\dfrac{2}{-x}=-\left(1-a-\dfrac{2}{x}\right)$，解得$a=1$.

(2)设$0<x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=1-\dfrac{2}{x_1}-\left(1-\dfrac{2}{x_2}\right)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，从而$\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$，

即$f(x_1)<f(x_2)$. 所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内是单调增函数.

19. (1)从列表中知道，3 月份售出 1.9 万件；从图象中观察到 3 月的每件销售利润为 7 元. 于是，在 3 月份销售这种商品的利润为：$7\times 1.9=13.3$(万元)；

(2)从列表中观察到，销售数量随月份增加，每月增加 0.1 万件，于是可选取一次函数$y_1=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$作为模型. 把$x=1$时，$y_1=1.7$；$x=2$时$y_1=1.8$，代入上式得，

$$\begin{cases}k_1+b_1=1.7,\\2k_1+b_1=1.8.\end{cases}$$

解得，$k_1=0.1$，$b_1=1.6$，$\therefore y_1=0.1x+1.6$.

又由图象可知，y_2与x是一次函数关系，设$y_2=k_2x+b_2(k_2\neq 0)$，观察图象可知，当$x=3$时，$y_2=7$；当$x=6$时，$y_2=6$，代入上式得，

$$\begin{cases}3k_2+b_2=7,\\6k_2+b_2=6.\end{cases}$$

$\therefore k_2=-\dfrac{1}{3}$，$b_2=8$. $\therefore y_2=-\dfrac{1}{3}x+8$.

设月销售利润为w(万元)，则

$w=y_1y_2=(0.1x+1.6)\left(-\frac{1}{3}x+8\right)=-\frac{1}{30}x^2+\frac{4}{15}x+\frac{64}{5}=-\frac{1}{30}(x-4)^2+\frac{40}{3}$.

由二次函数的性质知，当 $x=4$ 时，w 的值最大为 $\frac{40}{3}$（万元）. 故 4 月份的销售利润最大.

20. (1) $\because f(x)=ax^2+bx$ 满足 $f(x-1)=f(x)+x-1$，

$\therefore a(x-1)^2+b(x-1)=ax^2+bx+x-1$，即 $ax^2-(2a-b)x+a-b=ax^2+(b+1)x-1$，

$\therefore \begin{cases}-(2a-b)=b+1,\\ a-b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

(2) 由 $f(x)=0$ 得函数的零点为 $0,1$.

又函数 $f(x)$ 的图象是开口向下的抛物线，

$\therefore f(x)<0$ 时 $x>1$ 或 $x<0$.

$\therefore x$ 取值的集合为 $\{x|x>1$ 或 $x<0\}$.

(3) 由 $F(x)=4f(a^x)+3a^{2x}-1$（$a>0$，且 $a\neq1$），得 $F(x)=a^{2x}+2a^x-1$.

①当 $a>1$ 时，令 $u=a^x$，$\because x\in[-1,1]$，$\therefore u\in\left[\frac{1}{a},a\right]$，

令 $g(u)=u^2+2u-1=(u+1)^2-2$，$u\in\left[\frac{1}{a},a\right]$.

$\because$ 对称轴 $u=-1$，$\therefore g(u)$ 在 $\left[\frac{1}{a},a\right]$ 上是增函数.

$\therefore g(u)_{\max}=g(a)=a^2+2a-1=14$，$\therefore a^2+2a-15=0$，

$\therefore a=3$，$a=-5$（舍）.

②当 $0<a<1$ 时，令 $u=a^x$，$\because x\in[-1,1]$，$\therefore u\in\left[a,\frac{1}{a}\right]$.

$\therefore g(u)=u^2+2u-1=(u+1)^2-2$，$u\in\left[a,\frac{1}{a}\right]$，

$\because$ 对称轴 $u=-1$，$\therefore g(u)$ 在 $\left[a,\frac{1}{a}\right]$ 上是增函数.

$\therefore g_{\max}(u)=g\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{2}{a}-1=14$，

$\therefore \frac{1}{a}=3$，$\frac{1}{a}=-5$（舍），

$\therefore a=\frac{1}{3}$.

综上，$a=\frac{1}{3}$ 或 $a=3$.

21. (1) 由 $\frac{x+1}{x-1}>0$ 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$，

又 $f(-x)=\log_a\frac{-x+1}{-x-1}=\log_a\frac{x-1}{x+1}=\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=-\log_a\frac{x+1}{x-1}=-f(x)$.

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 由 (1) 及题设知，$f(x)=\log_a\frac{x+1}{x-1}$，设 $t=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，

$\therefore$ 当 $x_1>x_2>1$ 时，$t_1-t_2=\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$.

$\therefore t_1<t_2$. 当 $a>1$ 时，$\log_a t_1<\log_a t_2$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数.

同理当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

(3) ①当 $n<a-2\leqslant-1$ 时，有 $0<a<1$.

由 (2) 可知 $f(x)$ 在 $(n,a-2)$ 上为增函数，

由其值域为 $(1,+\infty)$ 知 $\begin{cases}\log_a\frac{1+n}{n-1}=1,\\ a-2=-1\end{cases}$ 无解.

②当 $1\leqslant n<a-2$ 时，有 $a>3$. 由 (2) 知 $f(x)$ 在 $(n,a-2)$ 上为减函数，

由其值域为 $(1,+\infty)$ 知 $\begin{cases}n=1,\\ \log_a\frac{a-1}{a-3}=1,\end{cases}$

得 $a=2+\sqrt{3}$，$n=1$.

期末测评试题

1. C 【解析】$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<2$ 或 $x\geqslant5\}$，$B=\{x|3x-7\geqslant8-2x\}=\{x|x\geqslant3\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|x\geqslant5\}$.

2. D 【解析】$\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}=\frac{b}{a}$.

3. D 【解析】A 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域不同；B 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同；C 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同. 故 D 正确.

4. C 【解析】由四种函数图象可知 C 正确.

5. C 【解析】令 $f(x)=x^3-x-3$，$f(1)=-3<0$，$f(2)=3>0$，则 $f(x)=0$ 的根在 $(1,2)$ 内.

6. B 【解析】由于 $a>1$，所以 $\log_{0.2}a<0$，$0<0.2^a<1$，$a^{0.2}>1$，从而 B 正确.

7. C 【解析】若 $2^x=4$，则 $x=2$；若 $\log_2 x=4$，则 $x=16$.

8. A 【解析】$f(x)$ 是偶函数，在 $[0,+\infty)$ 为增函数，则在 $(-\infty,0)$ 为减函数，又 $f(\pi)=f(-\pi)$，$-2>-3>-\pi$，则 $f(-2)<f(-3)<f(-\pi)$，从而 A 正确.

9. B 【解析】$x_1\in A$，$x_2\in B$，那么 $1+1=2$，$1+2=3$，$2+2=4$，$3+2=5$. 从而 $A*B=\{2,3,4,5\}$，所有元素之和为 14.

10. B 【解析】令 $f(x)=2ax^2-x-1$.

$\because f(0)=-1<0$，$f(1)=2a-2$，

$\therefore$ 由 $f(1)>0$ 得 $a>1$，又当 $f(1)=0$，即 $a=1$ 时，$2x^2-$

$x-1=0$ 两根 $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$ 不合题意,故选 B.

11. 5 【解析】$64^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}=4, \left(-\frac{2}{3}\right)^0=1, \lg 25+2\lg 2=\lg(25\times 4)=\lg 100=2$,从而原式 $=4-1+2=5$.

12. $(-\infty, 0]$ 【解析】设 $f(x)=x^\alpha$,则 $3^\alpha=\sqrt{3}$,则 $a=\frac{1}{2}$,从而 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}, f(x^2-2x)=\sqrt{x^2-2x}$. 依题意可知,$x^2-2x\geqslant 0$,则 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$. 令 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1$,在 $(-\infty, 1]$ 上为减函数,在 $[1,+\infty)$ 上为增函数,从而 $f(x^2-2x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0]$.

13. 3 【解析】$\because y_1=x^3$ 单调递增,$y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 单调递减,当 $x=1$ 时,$y_1=1, y_2=2, y_1<y_2$;当 $x=2$ 时,$y_1=8, y_2=1, y_1>y_2$,$\therefore$ 两函数图象交点坐标 $x_0\in(1,2)$,故 $a=1$,$b=2, a+b=3$.

14. 2 500m^2 【解析】设所围场地长为 x,则宽为 $\frac{200-x}{4}$,其中 $0<x<200$. 故场地面积 $S=x\cdot\frac{200-x}{4}=-\frac{x^2}{4}+50x=-\frac{1}{4}(x-100)^2+2\,500$,$\therefore$ 当 $x=100$ 时,$S_{\max}=2\,500(\mathrm{m}^2)$.

15. $y=(x-2)^2+1$ 或 $y=|x-2|+1$ 等.

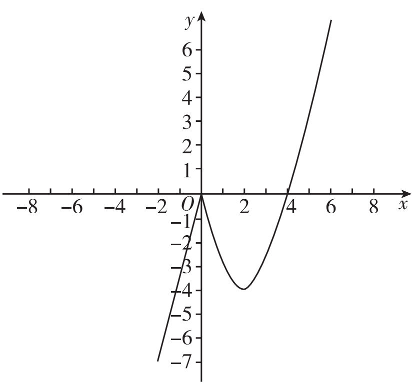
16. (1) $B=\{x\mid x\geqslant 2\}$, $\complement_U(A\cap B)=\{x|x<2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

(2) $C=\left\{x\,\middle|\, x>-\frac{a}{2}\right\}$, $B\cup C=C\Rightarrow B\subseteq C$,

$\therefore a>-4$.

17. (1) $y=\begin{cases}x(x-4), x\geqslant 0\\ -x(x-4), x<0\end{cases}$ 图象如图.

(2) 一解:$k>0$ 或 $k<-4$;二解:$k=0$ 或者 $k=-4$;三解:$-4<k<0$.



第 17 题图

18. (1) 由题意可知,用汽车运输的总支出为:

$f(x)=8x+1\,000+\left(\frac{x}{50}+2\right)\cdot 300=14x+1\,600(x>0)$.

用火车运输的总支出为:$g(x)=4x+2\,000+\left(\frac{x}{100}+4\right)\cdot 300=7x+3\,200(x>0)$.

(2) 由 $f(x)<g(x)$ 得 $x<\frac{1\,600}{7}$;由 $f(x)=g(x)$ 得 $x=\frac{1\,600}{7}$;由 $f(x)>g(x)$ 得 $x>\frac{1\,600}{7}$.

答:当 A、B 两地距离小于 $\frac{1\,600}{7}$km 时,采用汽车运输好;当 A、B 两地距离等于 $\frac{1\,600}{7}$km 时,采用汽车或火车都一样;当 A、B 两地距离大于 $\frac{1\,600}{7}$km 时,采用火车运输好.

19. (1) 令 $x=y=1$,则 $f(1)=f(1)+f(1)$,$\therefore f(1)=0$.

(2) $\because f\left(\frac{1}{3}\right)=1$,$\therefore f\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2$,

$\therefore m=\frac{1}{9}$.

(3) $f(x)+f(2-x)=f[x(2-x)]<f\left(\frac{1}{9}\right)$,

又由 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的减函数,得:

$\begin{cases}x(2-x)>\frac{1}{9},\\ x>0,\\ 2-x>0.\end{cases}$ 解之得:$x\in\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

20. (1) 由 $\begin{cases}1-x>0,\\ x+3>0,\end{cases}$ 得 $-3<x<1$,

所以函数的定义域为 $\{x|-3<x<1\}$.

$f(x)=\log_a[(1-x)(x+3)]$,

设 $t=(1-x)(x+3)=4-(x+1)^2$,

所以 $t\leqslant 4$,又 $t>0$,则 $0<t\leqslant 4$.

当 $a>1$ 时,$y\leqslant\log_a 4$,值域为 $\{y|y\leqslant\log_a 4\}$,

当 $0<a<1$ 时,$y\geqslant\log_a 4$,值域为 $\{y|y\geqslant\log_a 4\}$.

(2) 由题意及(1)知:当 $0<a<1$ 时,函数有最小值,所以 $\log_a 4=-2$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

21. (1) C_1 对应的函数为 $g(x)=x^3$,C_2 对应的函数为 $f(x)=2^x$.

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=2^x-x^3$,则 x_1, x_2 为函数 $\varphi(x)$ 的零点,

由于 $\varphi(1)=1>0, \varphi(2)=-4<0, \varphi(9)=2^9-9^3<0$, $\varphi(10)=2^{10}-10^3>0$,

所以方程 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ 的两个零点 $x_1\in(1,2)$, $x_2\in(9,10)$,

$\therefore x_1\in[1,2]$,且 $x_2\in[9,10]$.

(3) 从图象上可以看出,当 $x_1<x<x_2$ 时,$f(x)<g(x)$,

$\therefore f(6)<g(6)$.

当 $x>x_2$ 时,$f(x)>g(x)$,$\therefore g(2\,012)<f(2\,012)$,

$\because g(6)<g(2\,012)$,

$\therefore f(6)<g(6)<g(2\,012)<f(2\,012)$.