答案与解析

第一章　空间几何体

1.1　空间几何体的结构

第 1 课　柱、锥、台、球的结构特征

★ 课堂作业 ★

1. D　【解析】棱柱的结构特征有三方面：有两个面互相平行；其余各面是平行四边形；这些平行四边形面中，每相邻两个面的公共边都互相平行. 当一个几何体同时满足这三方面的结构特征时，这个几何体才是棱柱. 很明显，几何体②④⑤⑥均不符合，仅有①③符合.

2. C　【解析】圆柱的轴截面是矩形，圆锥的轴截面是等腰三角形，圆台的轴载面是等腰梯形，球的轴截面是圆面.

3. A　【解析】①以直角梯形垂直于底边的一腰为轴旋转一周可得到圆台；②它们的底面为圆面；③用平行于圆锥底面的平面截圆锥，可得到一个圆锥和一个圆台.

4. 平行四边　三角　梯　【解析】根据棱柱、棱锥、棱台的概念及其结构特征可知.

5. 12　【解析】n 棱柱有 $2n$ 个顶点，由于此棱柱有 10 个顶点，那么此棱柱为五棱柱. 又棱柱的侧棱长都相等，五条侧棱长的和为 60cm，可知每条侧棱长为 12cm.

6.【解析】底面正三角形中，边长为 3，高为 $3\times\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，中心到顶点的距离为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\sqrt{3}$，则棱锥的高为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.

★ 课后作业 ★

1. D

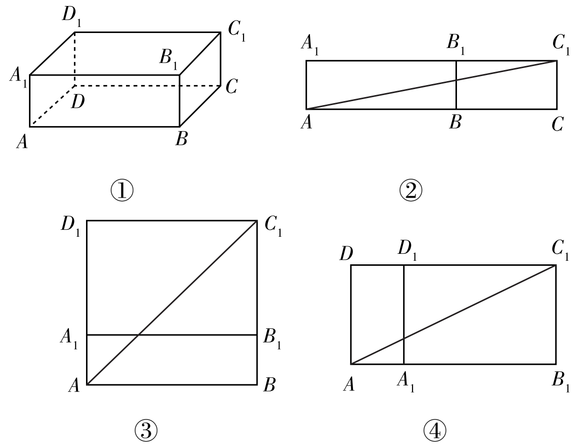
2. C　【解析】图(1)不是由棱锥截来的，所以(1)不是棱台；图(2)上、下两个面不平行，所以(2)不是圆台；图(4)前后两个面平行，其他面是平行四边形，且每相邻两个四边形的公共边平行，但它不是凸多面体，是组合体，所以(4)不是棱柱；很明显(3)是棱锥.

3. D　【解析】由母线的定义知(2)(4)正确.

4. C　【解析】求表面上最短距离可把几何体展成平面图形，如图①所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3$，$BC=2$，$BB_1=1$.

如图②所示，将侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 展开，则有 $AC_1=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，即经过侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 时的最短距离是 $\sqrt{26}$；

如图③所示，将侧面 ABB_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开，则有 $AC_1=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，即经过侧面 ABB_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 时的最短距离是 $3\sqrt{2}$；

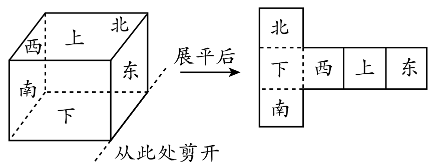


第 4 题图

如图④所示，将侧面 ADD_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开，则有 $AC_1=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，即经过侧面 ADD_1A_1 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 时的最短距离是 $2\sqrt{5}$.

由于 $3\sqrt{2}<2\sqrt{5}$，$3\sqrt{2}<\sqrt{26}$，所以由 A 到 C_1 沿长方体表面的最短距离为 $3\sqrt{2}$.

5. B　【解析】如图所示.



第 5 题图

6. D　【解析】根据相似性，若截面面积与底面面积之比为 $1:2$，则对应小棱锥与原棱锥高之比为 $1:\sqrt{2}$，那么被截面分成的两段之比为 $1:(\sqrt{2}-1)$.

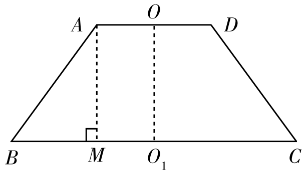
7. 圆锥　【解析】等腰三角形底边上的高是该旋转体的轴，绕此轴旋转一周，形成圆锥，等腰三角形的底边是此圆锥的底面直径，等腰三角形底边上的高是圆锥的高.

8. 18　【解析】取上底面上一点 A，则下底面中能和 A 形成体对角线的只有三点，共组成 3 条体对角线，上底面有 6 个顶点，则体对角线共有 6×3 条.

9. 63 cm^2　【解析】画出轴截面，如图，过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，则 $BM=5-2=3(cm)$，$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=9(cm)$，$S=\frac{(4+10)\times9}{2}=63(cm^2)$.

10. ①　【解析】利用球的结构特征判断，①正确；②不正确，因为直径必过球心；③不正确，因为得到的是一个圆面.

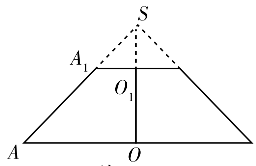
11.【解析】设圆柱的底面半径为 r，则圆柱轴截面(正方形)的边长为 $2r$，$\therefore (2r)^2=S.\therefore r=\frac{\sqrt{S}}{2}$.



第 9 题图

即圆柱的底面半径是$\frac{\sqrt{S}}{2}$.

12.【解析】圆台的轴截面如图所示.



第 12 题图

设圆台上、下底面半径分别为 x cm 和 $3x$ cm,

延长 AA_1 交 OO_1 的延长线于 S.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SOA$ 中,$\angle ASO=45°$,

则 $\angle SAO=45°$.

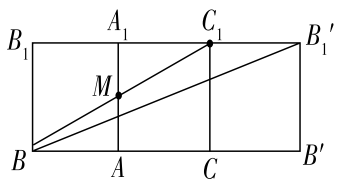
所以 $SO=AO=3x$,$OO_1=2x$.

又$\frac{1}{2}(6x+2x)\cdot 2x=392$,解得 $x=7$.

所以圆台的高 $OO_1=14$ cm,母线长 $AA_1=\sqrt{2}OO_1=14\sqrt{2}$cm,

而底面半径分别为 7cm 和 21cm.

13.【解析】沿侧棱 BB_1 将正三棱柱的侧面展开,得到一个矩形 $BB_1B_1'B'$(如图).



第 13 题图

(1)矩形 $BB_1B_1'B'$的长 $BB'=6$,宽 $BB_1=2$,所以三棱柱侧面展开图的对角线长为 $\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

(2)由侧面展开图可知,当 B,M,C_1 三点共线时,由点 B 经点 M 到点 C_1 的路线最短,所以最短路线长为 $BC_1=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

显然 $\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1C_1M$,

所以 $A_1M=AM$,即$\frac{A_1M}{AM}=1$.

第 2 课　简单组合体的结构特征

★ 课堂作业 ★

1. C
2. D
3. B

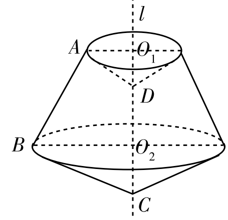
4. $\sqrt{6}$　【解析】设长方体长、宽、高分别为 a,b,c.

则$\begin{cases}ab=\sqrt{2},\\bc=\sqrt{3}\\ac=\sqrt{6},\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=1,\\c=\sqrt{3},\end{cases}$ 体对角线长为

$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{1+2+3}=\sqrt{6}$.

5. (1)F　(2)C 或 E　(3)A 或 F

6.【解析】如图所示,过 A,B 分别作 $AO_1\perp CD$,$BO_2\perp CD$,垂足分别为 O_1,O_2,则直角三角形 CBO_2 绕 l 旋转一周所形成的面围成的几何体是圆锥,直角梯形 O_1ABO_2 绕 l 旋转一周所形成的面所围成的几何体是圆台,直角三角形 ADO_1 绕 l 旋转一周所形成的面围成的几何体是圆锥. 综上,所得几何体下面是一个圆锥,上面是一个圆台挖去了一个以圆台上底面为底面的圆锥.



第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. D

2. A　【解析】因为简单组合体为一个圆台和一个圆锥所组成的,因此平面图形应由一个直角三角形和一个直角梯形构成,可排除 B、D,再由圆台上、下底的大小比例关系可排除 C,∴ 选 A.

3. B　【解析】剩余部分是四棱锥 $A'-BB'C'C$.

4. B　【解析】与上、下底面等距离的截面是中截面,截面圆半径为$\frac{1}{2}\times(1+7)=4$,故截面圆面积为 $\pi\cdot 4^2=16\pi(\mathrm{cm}^2)$.

5. D　【解析】将它折叠起来,D 中有两个正方形重叠在一起.

6. B　【解析】2,3,5 的最小公倍数为 30,由 2,3,5 组成的棱长为 30 的正方体的一条对角线穿过的小长方体为整数个,所以由 2,3,5 组成棱长为 90 的正方体的一条对角线穿过的小长方体的个数应为 3 的倍数.

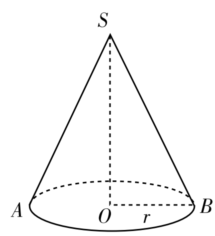
7. 一个四棱台上面放着一个球

8. $2\sqrt{2}$　【解析】如图,设圆锥的底面半径为 r,则圆锥的高是 $\sqrt{16-r^2}$.

$\because \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\sqrt{16-r^2}=8$,

$\therefore r=2\sqrt{2}$,

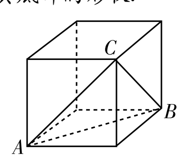
$\therefore$ 高为 $\sqrt{16-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.



第 8 题图

9. ①③　【解析】当截面经过圆柱的轴时,所截得的图形是图①. 当截面不经过圆柱的轴时,所截得的图形是图③. 判断时图③容易出现错误,注意其底部的形状.

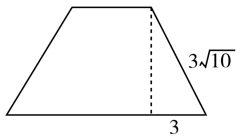
10. 60°　【解析】折叠后形成的正方体如图,$\triangle ABC$ 是以正方体的面对角线为边的等边三角形,故$\angle ABC=60°$.



第 10 题图

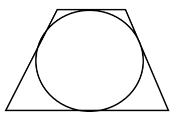
11.【解析】示意图如图,圆台的轴截面是等腰梯形,其上底长为 4,下底长为 10,据此可求得等腰梯形的高为

$\sqrt{(3\sqrt{10})^2-3^2}=9$，据此可从而该梯形的面积 $S=\frac{1}{2}\times(4+10)\times9=63$.



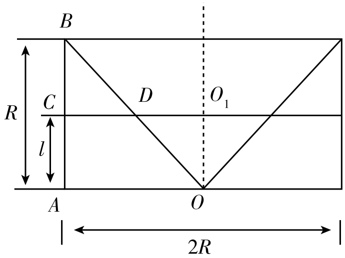
第 11 题图

12.【解析】圆台的轴截面为等腰梯形，如图，与过球心的圆相切，由此得梯形腰长为 $(R+r)$，梯形的高即球的直径，为 $\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\cdot\sqrt{rR}$，所以球的半径为 $\sqrt{rR}$.



第 12 题图

13.【解析】过轴作截面，如图.



第 13 题图

被平行于下底面的平面所截得的圆柱的截面圆的半径 $O_1C=R$，圆锥的截面圆的半径 O_1D 设为 x.

$\because OA=AB=R$，

$\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形.

又 $CD\,/\!/\,OA$，则 $CD=BC$.

故 $x=l$.

$\therefore$ 截面面积 $S=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$.

1.2 空间几何体的三视图和直观图

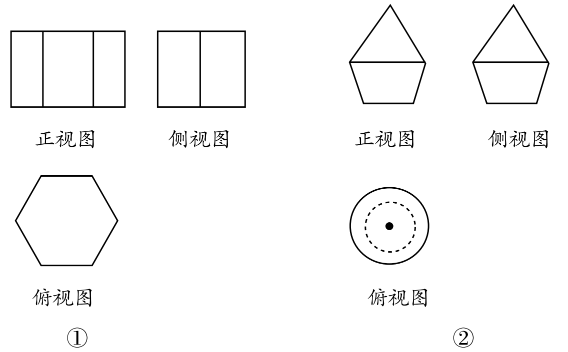
第 3 课 空间几何体的三视图

★ 课堂作业 ★

1. D
2. C
3. C
4. 圆锥 圆柱 【解析】从三视图可以看出，该组合体的上部为圆锥，下部是与圆锥同底的圆柱.
5. 正视图 俯视图 侧视图
6.【解析】图①为正六棱柱，可按棱柱的画法画出，图②为一个圆锥与一个圆台的组合体，按圆锥、圆台的三视图画出它们的组合体形状. 三视图如图所示.

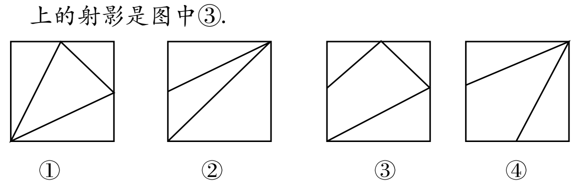
★ 课后作业 ★

1. B



第 6 题图

2. C 【解析】正视图中小长方形在左上方，对应俯视图应该在左侧，排除 B，D，侧视图中小长方形在右上方，排除 A，故选 C.
3. B 【解析】根据三视图定义.
4. D 【解析】正方体的三视图均为正方形；圆锥的三视图为两个三角形和一个圆(带圆心)；三棱台的三视图为两个梯形(不全等)和一个三角形；正四棱锥的三视图为两个三角形和一个正方形，故选 D.
5. B 【解析】A 中俯视图错误，C 中正视图，侧视图错误，D 中侧视图错误，B 中均正确.
6. D 【解析】从三视图可以看出，底面三角形的高为 $2\sqrt{3}$，侧棱长为 2，$\therefore$ 底面边长应为 4.
7. ②⑤ 【解析】线段、圆、梯形都是平面图形，且在有限范围内，投影都可能为线段；长方体是三维空间图形，其投影不可能是线段；直线的投影只能是直线或点.
8. $6\sqrt{2}$ 【解析】正方体的体对角线在各个面上的投影是正方体各个面上的对角线，因而其长度都是 $\sqrt{2}$，所以其和为 $6\sqrt{2}$.
9. 7 【解析】由几何体的三视图知，几何体由 7 块小正方体木块搭成.
10. ①②③ 【解析】要画出四边形 $AGFE$ 在该正方体的各个面上的射影，只需画出四个顶点 A、G、F、E 在每个面上的射影，再顺次连接即得在该面上的射影，并且在两个平行面上的射影是相同的. 可得在面 $ABCD$ 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的射影是图中①；在面 ADD_1A_1 和面 BCC_1B_1 上的射影是图中②；在面 ABB_1A_1 和面 DCC_1D_1 上的射影是图中③.



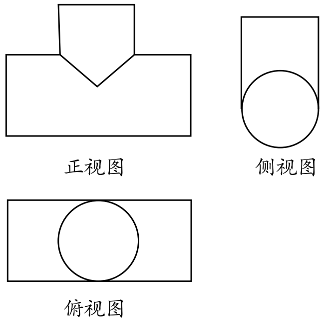
第 10 题图

11.【解析】三视图如图.

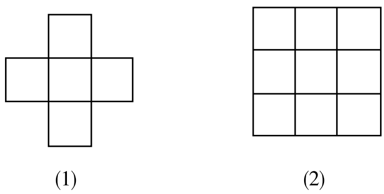
12.【解析】由于俯视图是梯形，则底面是梯形，而正视图、侧视图是矩形，故此立体图形为底面是梯形的一个直棱柱. 故该几何体是底面是梯形的直棱柱.

13.【解析】(1) 所需要的正方体的个数可以是 7 个、8 个、9 个、10 个、11 个，共 5 种.

(2) 所需正方体个数最少的几何体的俯视图如图(1)，所需正方体个数最多的几何体的俯视图如图(2).



第 11 题图



第 13 题图

【点评】由于俯视图没有确定,所以最底层的小正方体的个数不惟一.

第4课　空间几何体的直观图

★ 课堂作业 ★

1. C
2. C
3. A 【解析】由题图可知,$A'D' \parallel x'$轴,$B'C' \parallel x'$轴,$B'A' \parallel y'$轴,因而 $AD \parallel x$ 轴,$BC \parallel x$ 轴,$BA \parallel y$ 轴,即 $AD \parallel BC$,$BA \perp BC$,所以该图形表示的平面图形是直角梯形.
4. 45°(或 135°)　90°
5. 在 $x'O'y'$ 中,过点(4,0)和 y'轴平行的直线与过点(0,2)和 x'轴平行的直线的交点即是

【解析】在 x'轴的正方向上取点 M_1,使 $O'M_1=4$,在 y'轴上取点 M_2,使 $O'M_2=2$,过 M_1 和 M_2 分别作平行于 y'轴和 x'轴的直线,则交点就是 M'.

6.【解析】(1)在梯形 $ABCD$ 中,以边 AB 所在的直线为 x 轴,点 A 为原点,建立平面直角坐标系 xOy,画出对应的 x'轴,y'轴,使 $\angle x'A'y'=45°$.

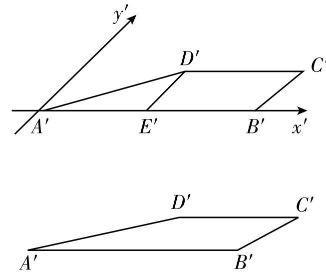
(2)过 D 点作 $DE \perp x$ 轴,垂足为 E,在 x'轴上取 $A'B'=AB=4\text{cm}$,$A'E'=AE=\frac{3}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}\approx 2.598\ \text{cm}$;

过 E'作 $E'D' \parallel y'$轴,使 $E'D'=\frac{1}{2}ED=\frac{3}{4}\text{cm}$,再过点 D'作$D'C' \parallel x'$轴,且使 $D'C'=CD=2\ \text{cm}$.

(3)连结 $A'D'$、$B'C'$、$C'D'$,并擦去 x'轴与 y'轴及其他一些辅助线,则四边形 $A'B'C'D'$就是所求作的直观图.

★ 课后作业 ★

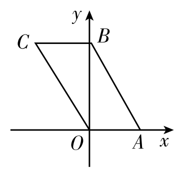
1. A 【解析】由于斜二测画法保共点性,所以(1)错;保平行性,所以(3)错,(4)对;原来垂直的两线段,在直观图中夹角为 45°,所以(2)错;与 y 轴平行的线段长度变为原来的一半,所以(5)错.
2. C 【解析】当与 x 轴不平行时,过该线段的中点作 x 轴的垂线,该垂线与 y 轴平行,画直观图时,该直线平行于 y'轴,并且长度减半,从而原线段端点位置改变,导致长度改变.
3. C 【解析】直观图中一条边长为 4,此边可能在 x'轴上,



第 6 题图

也可能在 y'轴上.若在 x'轴上,则原正方形的边长为 4,面积为 16;若在 y'轴上,则原正方形的边长为 8,面积为 64.故选 C.

4. C 【解析】在 A、B、D 中,三角形 ABC 的直观图的底边长和高均相等,它们是全等的,只有 C 不全等.
5. B 【解析】还原成原图形是一个平行四边形,如图,$OA=1\ \text{cm}=CB$,$OB=2\sqrt{2}\ \text{cm}$,$OC=3\ \text{cm}=AB$,平行四边形的周长为 8 cm.



第 5 题图

6. A 【解析】直观图边长为 1,对角线长为$\sqrt{2}$,则原图形中对应的对角线长为$2\sqrt{2}$.
7. $\frac{5}{2}$ 【解析】根据斜二测画法,原图形为直角三角形,且 $AC=A'C'=3$,$BC=2B'C'=4$,

$\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\therefore AB$ 边上中线的实际长度为$\frac{5}{2}$.

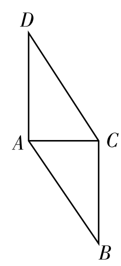
8. ①②③④ 【解析】由平行投影与中心投影的定义可得.
9. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$　$\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$ 【解析】原三角形的底边长为 a,高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$,在两种直观图中,原高都变为$\frac{\sqrt{3}}{4}a$,即直观图的高为$\frac{\sqrt{6}}{8}a$,底与原三角形的底相等,所以两种直观图的面积均为$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.
10. $2\sqrt{2}$ 【解析】四边形 $ABCD$ 的真实图形如图所示.

$\because A'C'$在水平位置,四边形 $A'B'C'D'$为正方形,

$\therefore$ 在四边形 $ABCD$ 中,$DA \perp AC$,

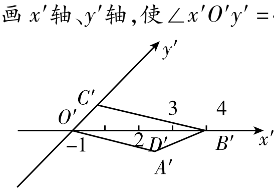
且 $DA=2D'A'=2$,$AC=A'C'=\sqrt{2}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=AC\cdot AD=2\sqrt{2}$.



第 10 题图

11.【解析】(1)画 x'轴、y'轴,使 $\angle x'O'y'=45°$.



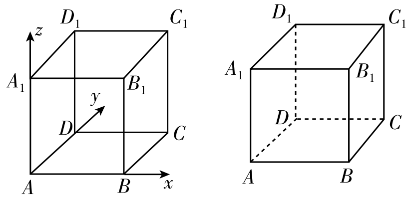
第 11 题图

(2)在 x'轴上取 D',B',使 $O'D'=OD$,$O'B'=OB$(如图).在 y'轴上取 C',使 $O'C'=\frac{1}{2}OC$,在 x'轴下方过 D'

作 $D'A'$ 平行于 y' 轴，使 $D'A'=\frac{1}{2}DA$.

(3)连接 $O'A'$，$A'B'$，$B'C'$，擦去辅助线，所得四边形 $O'A'B'C'$ 就是四边形 $OABC$ 的直观图.

12.【解析】(1)画轴. 如图①，画 x 轴、y 轴、z 轴，三轴相交于点 A，使 $\angle xAy=45°$，$\angle xAz=90°$.



① ②

第 12 题图

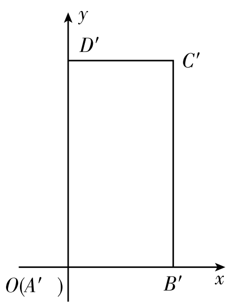
(2)在 x 轴上截取 $AB=2$ cm，在 y 轴上截取 $AD=1$ cm，在 z 轴上截取 $AA_1=2$ cm.

(3)过点 B 作 y 轴的平行线，过点 D 作 x 轴的平行线，设它们的交点为 C，四边形 $ABCD$ 就是正方体的底面 $ABCD$.

(4)过点 B、C、D 分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取线段 $BB_1=CC_1=DD_1=2$ cm. 顺次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，并加以整理(去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线)，就得到正方体的直观图 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图②所示.

13.【解析】(1)在原图形中以 AB 所在直线为 x' 轴，AD 所在直线为 y' 轴建立 $x'O'y'$ 坐标系，另建立 xOy 坐标系，使 $\angle xOy=90°$.

(2)在 xOy 坐标系中，在 x 轴上作 $OB'=AB$(O 点即为 A' 点)，在 y 轴上作 $A'D'=2AD$，过 D' 点作 $D'C'\parallel x$ 轴，且 $D'C'=DC$，连接 $B'C'$，即为所求的原图形. 如图，原图形的面积 $S=2\times4=8$.



第 13 题图

1.3 空间几何体的表面积与体积

第 5 课 柱体、锥体、台体的表面积与体积

★ 课堂作业 ★

1. C

2. B

3. D 【解析】将三视图还原为实物图，利用六棱柱体积公式求解.
由三视图可知，此几何体为直六棱柱，且底面的面积为 4，高为 1，则体积 $V=Sh=4$.

4. 4

5. $20+4\sqrt{5}$ 【解析】所得几何体的表面积为一个正方体的 5 个面和一个正四棱锥的 4 个侧面的面积之和，正四棱锥的斜高为 $\sqrt{5}$，所以 $S=5\times2^2+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times4=20+4\sqrt{5}$.

6.【解析】求解圆锥的表面积和体积，首先要求出圆锥的底面半径、母线长和高.
设扇形的半径，即圆锥的母线长为 l，圆锥的底面半径为 r，则有 $\frac{120}{360}\pi l^2=3\pi$，得 $l=3$；由 $\frac{2\pi}{3}\times3=2\pi r$，得 $r=1$. 则圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}$. $\therefore S_{表面}=S_{侧面}+S_{底面}=3\pi+\pi r^2=4\pi$，$V=\frac{1}{3}S_{底面}h=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

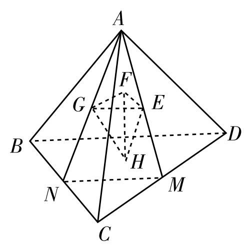
★ 课后作业 ★

1. A 【解析】该几何体为三棱锥，其底面积为 $S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，高为 1.
$\therefore$ 体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

2. A 【解析】设上底面半径为 r，则由题意可求得下底面半径为 $3r$，设圆台高为 h_1，
则 $52=\frac{1}{3}\pi h_1(r^2+9r^2+3r\cdot r)$，
$\therefore \pi r^2h_1=12$.
令原圆锥的高为 h，由相似知识知
$\frac{r}{3r}=\frac{h-h_1}{h}$，$\therefore h=\frac{3}{2}h_1$.
$\therefore V_{原圆锥}=\frac{1}{3}\pi(3r)^2\times h=3\pi r^2\times\frac{3}{2}h_1=\frac{9}{2}\times12=54$.

3. B 【解析】设正方体的棱长为 a，则 $S_{正方体表}:S_{正四面体表}=6a^2:\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2\times4\right]=\sqrt{3}$. 所以选 B.

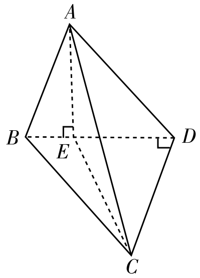
4. A 【解析】如图所示，正四面体 $ABCD$ 四个面的中心分别为 E，F，G，H.
$\therefore$ 四面体 $EFGH$ 也是正四面体.
连结 AE 并延长与 CD 交于点 M，连接 AG 并延长与 BC 交于点 N，$\because E$，G 分别为面的中心，$\therefore \frac{AE}{AM}=\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$，$\frac{GE}{MN}=\frac{2}{3}$.
又 $\because MN=\frac{1}{2}BD$，$\therefore \frac{GE}{BD}=\frac{1}{3}$.
$\because$ 相似多边形的面积比是相似比的平方，$\therefore \frac{T}{S}=\frac{1}{9}$.



第 4 题图

5. B 【解析】四棱锥 $P-BCC_1B_1$ 的底面是正方体的侧面，高 $PB_1=\frac{1}{4}A_1B_1=1$，
则 $V_{P-BCC_1B_1}=\frac{1}{3}\times4^2\times1=\frac{16}{3}$.

6. B 【解析】根据几何体的三视图画出其直观图，利用直观图的图形特征求其表面积.
由几何体的三视图可知，该三棱锥的直观图如图所示，
其中 $AE\perp$ 平面 BCD，$CD\perp BD$，且 $CD=4$，
$BD=5$，$BE=2$，$ED=3$，$AE=4$.
$\because AE=4$，$ED=3$，$\therefore AD=5$.
又 $CD\perp BD$，$CD\perp AE$，$\therefore CD\perp$ 平面 ABD，
故 $CD\perp AD$，$\therefore AC=\sqrt{41}$ 且 $S_{\triangle ACD}=10$.



第 6 题图

在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AE=4$,$BE=2$,故 $AB=2\sqrt{5}$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$BD=5$,$CD=4$,故 $S_{\triangle BCD}=10$,且 $BC=\sqrt{41}$.

在$\triangle ABD$ 中,$AE=4$,$BD=5$,故 $S_{\triangle ABD}=10$.

在$\triangle ABC$ 中,$AB=2\sqrt{5}$,$BC=AC=\sqrt{41}$,则 AB 边上的高 $h=6$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 6=6\sqrt{5}$.

因此,该三棱锥的表面积为 $S=30+6\sqrt{5}$.

7. $4\pi S$ 【解析】设圆柱的底面半径为 r,高为 h,则 $\pi r^2=S$,

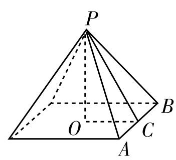
$\therefore r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi S}}{\pi}$.

又$\because$ 侧面展开图为正方形,则

$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=h$,即 $h=2\sqrt{\pi S}$.

$\therefore S_{侧}=2\pi rh=2\pi\times\frac{\sqrt{\pi S}}{\pi}\times 2\sqrt{\pi S}=4\pi S$.

8. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 【解析】如图,$\because PC=\sqrt{3}$,



第 8 题图

$\triangle PAB$ 为正三角形,

$\therefore AC=1$,$PA=2$,

$\therefore OC=AC=1$.

在 Rt$\triangle POC$ 中,$PO=\sqrt{2}$,

$\therefore V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

9. 20 cm 224π cm^2 【解析】圆锥滚动的过程相当于以母线为半径作圆的过程.

设圆锥的母线长为 l,依题意有 $2\pi l=2.5\times 2\pi\times 8$,

$\therefore l=20$ (cm).

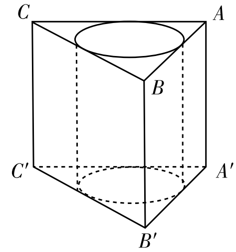
$S_{表面积}=S_{底面积}+S_{侧面积}=\pi\times 8^2+8\pi\times 20=224\pi$ (cm^2).

$\therefore$ 应填 20 cm,224π cm^2.

10. $8\sqrt{2}$

11.【解析】因为四棱锥 $S-ABCD$ 的各棱长均为 5,所以各个侧面都是全等的正三角形,设 BC 的中点为 E,连接 SE,则 $SE\perp BC$,$\therefore S_{侧}=4S_{\triangle SBC}=4\cdot\frac{1}{2}BC\cdot SE=2\times 5\times\sqrt{5^2-(\frac{5}{2})^2}=25\sqrt{3}$,$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=25\sqrt{3}+25=25(\sqrt{3}+1)$.

12.【解析】如图所示,只有当圆柱的底面圆为三棱柱的底面三角形的内切圆时,圆柱的底面面积最大,此时圆柱的体积最大,削去部分的体积才最小. 设此时圆柱的底面半径为 R,圆柱的高即为三棱柱的高,为 6 cm. 因为在$\triangle ABC$ 中,$AB=3$,$BC=4$,$AC=5$,所以$\triangle ABC$ 为直角三角形.



第 12 题图

根据直角三角形内切圆的性质,可得 $AB+BC-AC=2R$,即 $3+4-5=2R$,所以 $R=1$,所以 $V_{圆柱}=\pi R^2h=6\pi$(cm^3). 而三棱柱的体积为 $V_{三棱柱}=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 6=36$(cm^3),所以削去部分的体积为$(36-6\pi)$cm^3,即削去部分的体积的最小值为$(36-6\pi)$cm^3.

13.【解析】当 AA_1B_1B 水平放置时,纵截面中水液面积占 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

所以水液体积与三棱柱体积比为$\frac{3}{4}$.

当底面 ABC 水平放置时,液面高度为 $8\times\frac{3}{4}=6$.

第 6 课　球的体积和表面积

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】设球半径为 R,则$\frac{4\pi}{3}R^3=4\pi R^2$. $\therefore R=3$.

2. B 【解析】设正方体的棱长为 a,则其表面积 $S_{正}=6a^2$,设正方体外接球的半径为 R,

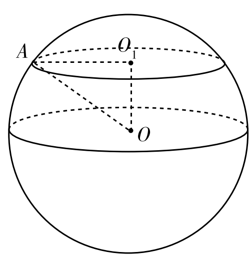
$\therefore 2R=\sqrt{3}a$,即 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore$ 正方体外接球的表面积

$S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{3}{4}a^2=3\pi a^2$,

$\therefore\frac{S_{正}}{S_{球}}=\frac{6a^2}{3\pi a^2}=\frac{2}{\pi}$.

3. B 【解析】如图所示,设截面为圆面 O_1,与球面的一个交点为 A,由题知圆面 O_1 的面积为 $\pi(O_1A)^2=\pi$,所以 $O_1A=1$. 又可知$\triangle OO_1A$ 为直角三角形,则 $OA=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. 又 OA 为球的半径,则球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times 2=8\pi$.



第 3 题图

4. $S_1>S_3>S_2$ 【解析】设正方体的棱长为 a,球半径为 r,圆柱的底面半径为 R.

则 $a^3=\frac{4}{3}\pi r^3=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3=V$.

$\therefore a=\sqrt[3]{V}$,$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$,$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

$\therefore S_1=6a^2=6\cdot V^{\frac{2}{3}}, S_2=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$S_3=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2=6\pi\cdot\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$.

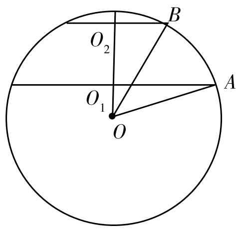
$\therefore S_1>S_3>S_2$.

5. 4 【解析】设地球半径为 R, 火星半径为 r.

则 $2\pi R=8, \frac{4}{3}\pi R^3=8\times\frac{4}{3}\pi r^3$.

$\therefore r=\frac{2}{\pi}$, $\therefore$ 火星大圆周长为 $2\pi r=4$(万里).

6.【解析】如图为球的轴截面,由球的截面性质知,$AO_1 /\!/ BO_2$,且 O_1、O_2 分别为两截面圆的圆心,则 $OO_1\perp AO_1$,$OO_2\perp BO_2$. 设球的半径为 R.



第 6 题图

$\because \pi\cdot O_2B^2=49\pi$, $\therefore O_2B=7$(cm),

同理 $\pi O_1A^2=400\pi$, $\therefore O_1A=20$(cm).

设 $OO_1=x$ cm, 则 $OO_2=(x+9)$cm.

在 Rt$\triangle OO_1A$ 中, $R^2=x^2+20^2$,

在 Rt$\triangle OO_2B$ 中, $R^2=(x+9)^2+7^2$,

$\therefore x^2+20^2=7^2+(x+9)^2$, 解得 $x=15$.

$\therefore R^2=x^2+20^2=25^2$, $\therefore R=25$(cm).

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=2\,500\pi(\mathrm{cm}^2)$.

$\therefore$ 球的表面积为 $2\,500\pi\ \mathrm{cm}^2$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】根据球的表面积公式知:表面积比为半径比的平方.

2. C 【解析】根据球的体积公式知:体积比为半径比的立方.

3. A 【解析】设扇形的半径为 R, Rt$\triangle AOB$ 绕 OA 旋转一周形成圆锥,其体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi R^3$, 扇形绕 OA 旋转一周形成半球面,其围成的半球的体积 $V=\frac{2}{3}\pi R^3$,

$\therefore V_2=V-V_1=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}\pi R^3$,

$\therefore V_1:V_2=1:1$, 故选 A.

4. C 【解析】设圆锥底面半径为 R_1, 高为 h, 球的半径为 R_2, 则圆锥体积为 $\frac{1}{3}\pi R_1^2h$, 球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R_2^3$. 由题意知圆锥的底面半径是球的半径的 3 倍, 即 $R_1=3R_2$. 由圆锥与球的体积相等有 $\frac{1}{3}\pi R_1^2h=\frac{4}{3}\pi R_2^3$, 将 $R_2=\frac{R_1}{3}$ 代入, 有 $R_1^2h=4\times\frac{R_1^3}{3^3}$, 故 $\frac{h}{R_1}=\frac{4}{3^3}=\frac{4}{27}$.

5. C 【解析】正三棱锥内接于球,而其各个顶点在球面上,过球心的截面如果是三角形的话,根据其端点是否在圆上,有如下讨论:

①当过球心作某底面的平行线,则截面近似图(1),三个点都不在圆上;

②当截面是过球心和三棱锥两个顶点的平面,它交对棱于中点,中点不在球上,也就不在截面圆上,近似图(2);

③当截面是过三棱锥一点和球心时,与棱锥的另两个交点除了图(2)的情况外,大都是如图(3)的情况,即另两点不在球(截面圆)上;

④当三棱锥的三个顶点都在截面内时,截面不过球心,矛盾,故选 C.

6. C 【解析】$\because V_{甲}=64\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi a^3$,

$S_{甲}=64\cdot 4\pi\left(\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=4\pi a^2$,

$V_{乙}=\frac{4}{3}\pi\left(a\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi a^3$,

$S_{乙}=4\pi\left(a\cdot\frac{1}{2}\right)^2=\pi a^2$,

$\therefore V_{甲}=V_{乙}, S_{甲}>S_{乙}$.

7. $\sqrt[3]{2}$ 【解析】设大球的半径为 R,

则 $\frac{4}{3}\pi R^3=2\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3$, $\therefore R=\sqrt[3]{2}$.

8. 14π 【解析】由题意可知长方体的体对角线长为 $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$,

$\therefore$ 长方体外接球的半径为 $\frac{\sqrt{14}}{2}$,

$\therefore$ 球的表面积为 $S=4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=14\pi$.

9. 3π $\sqrt{2}$ 【解析】由题知球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则球的表面积为 3π, 球心 O 到直线 EF 的距离为 $\frac{1}{2}$, 由垂径定理可知:直线 EF 被球 O 截得的线段长 $d=2\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$.

10. $\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$ 【解析】$\because R_1+2R_2=3R_3$, 另一方面 $S_1=4\pi R_1^2, S_2=4\pi R_2^2, S_3=4\pi R_3^2$,

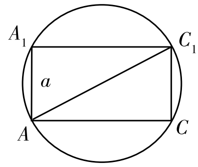
$\therefore \sqrt{S_1}=\sqrt{\pi}\cdot 2R_1, \sqrt{S_2}=\sqrt{\pi}\cdot 2R_2$,

$\sqrt{S_3}=\sqrt{\pi}\cdot 2R_3$,

$\therefore \frac{\sqrt{S_1}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{3\cdot\sqrt{S_3}}{2\sqrt{\pi}}$,

$\therefore \sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$.

11.【解析】根据球及正方体的对称性作出正方体体对角线所在的截面,如图,可见正方体的体对角线长即为球的直径,以此确定球的半径.



第 11 题图

解:设正方体的棱长为 a, 则有 $6a^2=54$.

解得 $a=3$.

$\therefore$ 正方体的体对角线长 $d=\sqrt{3\times3^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore$ 球的半径 $R=\frac{1}{2}d=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2=27\pi$,

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^3=\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$.

12.【解析】当且仅当球与四棱锥的各个面都相切时,球的半径最大.设放入的球的半径为 R,球心为 S,连接 SA、SB、SC、SD、SP,则把此四棱锥分割成四个三棱锥和一个四棱锥,这些小棱锥的高均为 R,底面为原四棱锥的侧面与底面,由体积关系,得

$V_{P-ABCD}=\frac{R}{3}(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PCD}+S_{正方形ABCD})$

$=\frac{R}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+a^2\right)$

$=\frac{R}{3}(2+\sqrt{2})a^2$,

由题意得 $PD\perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}a^3$,

所以 $\frac{R}{3}(2+\sqrt{2})a^2=\frac{1}{3}a^3$,

解得 $R=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a$,

故所放入球的最大半径为 $\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a$.

13.【解析】由于外径为 50 cm 的钢球的质量为 $7.9\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{50}{2}\right)^3\approx516\ 792(\mathrm{g})$,

街心花园中钢球的质量为 145 000 g,

而 $145\ 000<516\ 792$,

所以钢球是空心的.

设球的内径为 $2x$ cm,那么球的质量为

$7.9\times\left[\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{50}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi x^3\right]=145\ 000$.

解得 $x^3\approx11\ 240.98$,

$\therefore x\approx22.4,2x\approx45(\mathrm{cm})$.

即钢球是空心的,其内径约为 45 cm.

单元评估检测

1. D 【解析】由三视图可知,该几何体是圆锥与圆台的组合体,故选 D.

2. A 【解析】由题意知该三棱锥为正四面体,表面积为一个面面积的 4 倍,而每个面为边长是 1 的正三角形,面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,$\therefore$ 三棱锥的表面积为 $\sqrt{3}$,故选 A.

3. D 【解析】设三条棱的长分别为 $a,2a,3a$,则其体对角线的长为 $\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}=2\sqrt{14}$,解得 $a=2$. $\therefore$ 三条棱的长分别为 2,4,6. 故体积 $V=2\times4\times6=48$.

4. C 【解析】设圆锥底面半径为 r,母线长为 l,则 $\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2$,得 $l=2r$,$\therefore$ 展开图扇形半径为 $2r$,弧长为 $2\pi r$,$\therefore$ 展开图是半圆,$\therefore$ 扇形的圆心角为 $180°$,故选 C.

5. B 【解析】中截面将三棱锥分成高相等的两部分,所以截面与原底面的面积之比为 1∶4. 将三棱锥 $A-A_1BC$ 转化为三棱锥 A_1-ABC,这样三棱锥 $V-A_1B_1C_1$ 与三棱锥 A_1-ABC 的高相等,底面积之比为 1∶4,于是其体积之比为 1∶4.

6. A 【解析】依据斜二测画法的规则可得,

$BC=B'C'=2$,$OA=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,且 $OA\perp BC$,

$\therefore AB=AC=2$,故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

7. A 【解析】由该容器的正视图可知,圆柱的底面半径为 1 m,高为 2 m,圆锥的底面半径为 1 m,高为 1 m,则圆柱的体积为 $2\pi\ \mathrm{m}^3$,圆锥的体积为 $\frac{\pi}{3}\mathrm{m}^3$,所以该容器的体积为 $\frac{7\pi}{3}\mathrm{m}^3$.

8. B 【解析】由题意知棱柱的高为 $2\sqrt{3}$ cm,底面正三角形的内切圆的半径为 $\sqrt{3}$ cm,底面正三角形的边长为 6 cm,$\therefore$ 正三棱柱的底面面积为 $9\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$,故此三棱柱的体积 $V=9\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=54(\mathrm{cm}^3)$.

9. A 【解析】由三视图知该几何体是圆锥,且轴截面是等边三角形,其边长等于底面直径,则圆锥的高是轴截面等边三角形的高,为 $\sqrt{3}$,所以这个几何体的体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

10. D 【解析】$\frac{V_{大}}{V_{小}}=\left(\frac{R_{大}}{R_{小}}\right)^3=\left(\frac{5}{1}\right)^3=125$,故选 D.

11. D 【解析】由题意设上、下底面半径分别为 $r,4r$,截面半径为 x,圆台的高为 $2h$,则有 $\frac{x-r}{3r}=\frac{1}{2}$,$\therefore x=\frac{5}{2}r$.

$\therefore\frac{V_{上}}{V_{下}}=\frac{\frac{1}{3}\pi h(r^2+rx+x^2)}{\frac{1}{3}\pi h(x^2+4rx+16r^2)}=\frac{39}{129}$.

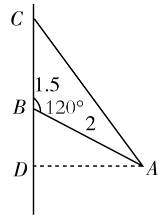
12. D 【解析】如图,$\triangle ABC$ 绕 BC 旋转一周形成一个组合体,即大圆锥 CD 中挖去一个小圆锥 BD,且同底.

$\because\angle ABD=60°$,$AB=2$,$\therefore AD=\sqrt{3}$,$BD=1$.

$\therefore V_{几何体}=V_{大圆锥}-V_{小圆锥}$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot CD-\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot BD$

$=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times(1.5+1-1)=1.5\pi$.



第 12 题图

13. 16π 【解析】圆柱的底面半径为 $r=\frac{1}{2}\times4=2$ (cm),故 $S_{侧}=2\pi\times2\times4=16\pi(\mathrm{cm}^2)$.

14. $24\pi\ \mathrm{cm}^2$ $12\pi\ \mathrm{cm}^3$ 【解析】由三视图可知该几何体是底面直径为 6 cm,母线长为 5 cm 的圆锥,故 $S_{表}=\pi rl+\pi r^2=24\pi(\mathrm{cm}^2)$,同时求出圆锥的高为 4 cm,故体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=12\pi(\mathrm{cm}^3)$.

15. 576π 【解析】球的体积等于底面半径为 16 cm,高为9 cm

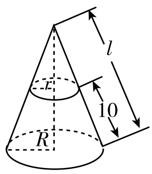
的圆柱的体积,设球的半径为 R cm,所以 $\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\times 16^2\times 9$,解得 $R=12$,所以 $S_{球}=4\pi R^2=576\pi(\mathrm{cm}^2)$.

16. $24\pi^2+8\pi$ 或 $24\pi^2+18\pi$ 【解析】圆柱的侧面积 $S_{侧}=6\pi\times 4\pi=24\pi^2$.

(1)以边长为 6π 的边为轴时,4π 为圆柱底面圆的周长,所以 $2\pi r=4\pi$,即 $r=2$,所以 $S_{底}=4\pi$,所以 $S_{全}=24\pi^2+8\pi$.

(2)以边长为 4π 的边为轴时,6π 为圆柱底面圆的周长,所以 $2\pi r=6\pi$,即 $r=3$,所以 $S_{底}=9\pi$,所以 $S_{全}=24\pi^2+18\pi$.

17.【解析】如图,设圆锥的母线长为 l,圆台上、下底面的半径分别为 r、R.



第 17 题图

$\because \frac{l-10}{l}=\frac{r}{R}$,$\therefore \frac{l-10}{l}=\frac{1}{4}$,

$\therefore l=\frac{40}{3}$.

即圆锥的母线长为 $\frac{40}{3}$cm.

18.【解析】设直平行六面体的底面边长为 a,侧棱长为 l,则 $S_{侧}=4al$.

$\because$ 过不相邻两条侧棱的截面都是矩形,设底面的两条对角线为 AC,BD,从而有 $\begin{cases}Q_1=AC\cdot l,\\Q_2=BD\cdot l.\end{cases}$

则 $AC=\frac{Q_1}{l}$,$BD=\frac{Q_2}{l}$.

又 $AC\perp BD$,$\therefore \left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=a^2$,

即 $\left(\frac{Q_1}{2l}\right)^2+\left(\frac{Q_2}{2l}\right)^2=a^2$,

$\therefore 4a^2l^2=Q_1^2+Q_2^2$,即 $2al=\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}$,

$\therefore S_{侧}=4al=2\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}$.

19.【解析】由题知该几何体是一个四棱锥,记为 $P-ABCD$,如图. 由题知 $AB=8$,$BC=6$,高 $h=4$.

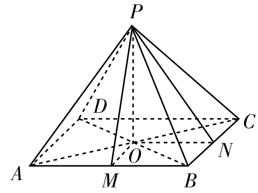
由俯视图知:底面 $ABCD$ 是矩形,连接 AC,BD 交于点 O,连接 PO,则 $PO=4$,即为棱锥的高. 作 $OM\perp AB$ 于 M,$ON\perp BC$ 于 N,连接 PM,PN. $\because PA=PB=PC$,易知 M,N 为 AB,BC 的中点,$\therefore PM\perp AB$,$PN\perp BC$.

$\therefore PM=\sqrt{PO^2+OM^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$,

$PN=\sqrt{PO^2+ON^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

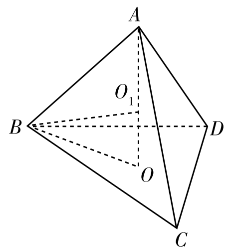
(1) $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times(8\times 6)\times 4=64$.

(2) $S_{侧}=2S_{\triangle PAB}+2S_{\triangle PBC}=AB\cdot PM+BC\cdot PN=8\times 5+6\times 4\sqrt{2}=40+24\sqrt{2}$.



第 19 题图

20.【解析】如图,由已知四面体的各棱长都为 1,即各个面都是边长为 1 的正三角形,过 A 作 $AO\perp$ 平面 BCD 于 O,连接 BO. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中,$|AB|=1$,$|BO|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $|AO|=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



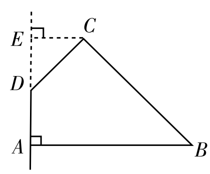
第 20 题图

设球的半径为 R,球心为 O_1(O_1 在 OA 上),则在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1OB$ 中,$|OO_1|=|AO|-R=\frac{\sqrt{6}}{3}-R$,$|O_1B|=R$,$|BO|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $R^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{3}{2}\pi$.

21.【解析】过 C 作 $CE\perp AD$,交 AD 延长线于 E,如图. 已知 $\angle ADC=135°$,

$\therefore \angle CDE=45°$.



第 21 题图

$\therefore CE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=2$.

$\therefore AE=AD+DE=4$,

$BC=\sqrt{(5-2)^2+4^2}=5$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 旋转所得的旋转体是一个组合体:以 $CE=2$,$AB=5$ 分别为上、下底面半径的圆台,高 $AE=4$,在上底面挖去底面半径和高都是 2 的圆锥.

$\therefore S_{表}=S_{台下底}+S_{台侧}+S_{锥侧}=\pi\times 5^2+\pi\times(2+5)\times 5+\pi\times 2\times 2\sqrt{2}=4(\sqrt{2}+15)\pi$,

$V=V_{圆台}-V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi(2^2+2\times 5+5^2)\times 4-\frac{1}{3}\pi\times 2^2\times 2=\frac{148}{3}\pi$.

即所求旋转体的表面积和体积分别是 $4(\sqrt{2}+15)\pi$ 和 $\frac{148}{3}\pi$.

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

第7课 平面

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】三角形有两条相交直线，梯形和菱形中都有两条平行直线，所以它们均为平面图形，而四边相等的四边形不一定是平面图形.

2. D 【解析】当 a,b,c 交于一点且共面时，有一个平面；当 a,b,c 交于一点且不共面时，这三条直线不可能在同一平面内.

3. A

4. $\in$ $\notin$ $\subset$ $\not\subset$ AC 平面 ABC 平面 DBC

【解析】A 在平面 ABC 内；A 不在平面 BCD 内，BD 在平面 ABD 内，BD 与平面 ABC 交于一点 B，面 ABC 与面 ACD 的交线为 AC，面 ABC 与面 DBC 的交线是 BC.

5. 无数或 1

6.【证明】因为 $AB/\!/CD$，所以 AB,CD 确定平面 AC，$AD\cap\alpha=H$，因为 $H\in$ 平面 AC，$H\in\alpha$，由公理 3 可知，H 必在平面 AC 与平面 α 的交线上. 同理 F,G,E 都在平面 AC 与平面 α 的交线上，因此 E,F,G,H 必在同一直线上.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】结合平面的基本性质求解. A，不是公理，是个常用的结论，需经过推理论证；B，是平面的基本性质公理；C，是平面的基本性质公理；D，是平面的基本性质公理.

2. C 【解析】$\because A\in\alpha,A\in\beta,\therefore A\in\alpha\cap\beta$.
由公理可知 $\alpha\cap\beta$ 为经过 A 的一条直线，而不是 A.
故 $\alpha\cap\beta=A$ 的写法错误.

3. C 【解析】由 $AB\cap l=R,\therefore R\in l,R\in AB$.
又 $\alpha\cap\beta=l,\therefore l\subset\beta,\therefore R\in\beta,R\in\gamma$.
又 $C\in\beta,C\in\gamma,\therefore\beta\cap\gamma=CR$.

4. C

5. C

6. A 【解析】因为 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，EF 与 HG 交于点 M，所以 M 为面 ABC 与面 ACD 的公共点，而这两个面的交线为 AC，所以 $M\in AC$.

7. 6

8. $A\in m$ 【解析】因为 $\alpha\cap\beta=m$，$A\in a\subset\alpha$，所以 $A\in\alpha$. 同理 $A\in\beta$，故 A 在 α 与 β 的交线 m 上.

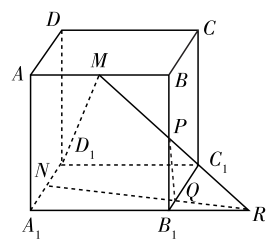
9. ③

10. ③④ 【解析】①中线段可与平面 α 相交，②中的四边形可以是空间四边形，③中平行的对边能确定平面，所以是平行四边形，④中三边在同一平面内，可推知第四边的两个端点也在这个平面内，所以第四边在这个平面内，⑤中点 A 与 α 内的任意直线都能确定一个平面.

11.【解析】(1) 不正确. 因为点 A,O,C 在同一直线上，故不能确定一个平面.
(2) 正确. 因为点 A,B_1,C_1 不共线，故可确定一个平面. 又 $AD/\!/B_1C_1$，所以点 $D\in$ 平面 AB_1C_1，故由点 A,C_1,B_1 确定的平面为平面 ADC_1B_1.
(3) 正确. 因为 A,C_1,B_1 确定的平面为平面 ADC_1B_1，而由 A,C_1,D 确定的平面也是平面 ADC_1B_1，故它们确定的是同一个平面.

12.【证明】(1) $\because E,F$ 分别是 AB,AD 的中点，$\therefore EF/\!/BD$.
在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=\frac{1}{2}$，$\therefore GH/\!/BD$，$\therefore EF/\!/GH$，
$\therefore E,F,H,G$ 四点共面.
(2) $\because GE\cap HF=P$，$GE\subset$ 平面 ABC，$HF\subset$ 平面 ACD，
$\therefore P\in$ 平面ABC，$P\in$ 平面 ACD，$\therefore P$ 为平面 ABC 与平面 ACD 的公共点. 又 $\because$ 平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，$\therefore P\in AC$. $\therefore P,A,C$ 三点共线.

13.【解析】(1) 设 M,N,P 三点确定的平面为 α，则 α 与平面 AA_1B_1B 交于 MP.
设 $MP\cap A_1B_1=R$，
则 RN 是 α 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线.
设 $RN\cap B_1C_1=Q$，则 PQ 是 α 与平面 BB_1C_1C 的交线，如图所示.



第 13 题图

(2) $\because$ 正方体的棱长为 8 cm，M,P 分别为 AB,BB_1 的中点，$\therefore B_1R=BM=4$ cm.
在 $\triangle RA_1N$ 中，$\frac{B_1Q}{A_1N}=\frac{RB_1}{RA_1}$，$\therefore B_1Q=\frac{4}{12}\times4=\frac{4}{3}$(cm).
在 $\mathrm{Rt}\triangle PB_1Q$ 中，$\because PB_1=4$ cm，$B_1Q=\frac{4}{3}$ cm.
$\therefore PQ=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$(cm).
故所求 PQ 的长为 $\frac{4}{3}\sqrt{10}$cm.

第8课 空间中直线与直线之间的位置关系

★ 课堂作业 ★

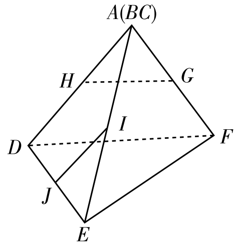
1. D 【解析】$c/\!/a$，a 与 b 为异面直线，c 与 b 的位置关系可能异面或相交.

2. A

3. D

4. 60° 【解析】因为 $a/\!/OA$，根据等角定理，及异面直线所成的角为锐角或直角，所以 a 与 OB 所成的角为 60°.

5. 60° 【解析】将三角形折成三棱锥，如图所示，GH 与 IJ 是异面直线.
$\because G$、H 分别为 AF、AD 的中点，



第 5 题图

$\therefore GH /\!/ DF$.

又$\because$ I、J 分别为 AE、DE 的中点，

$\therefore IJ /\!/ AD$.

$\therefore DF$ 与 AD 所成的角即为异面直线 GH 与 IJ 所成的角.

由题意知$\triangle ADF$ 是正三角形，

$\therefore DF$ 与 AD 所成的角为 $60°$.

即 GH 与 IJ 所成的角为 $60°$.

6.【证明】连接 PD，PE，并延长分别交 AB，BC 于点 M，N.

$\because$ 点 D，E 分别是$\triangle PAB$，$\triangle PBC$ 的重心，

$\therefore M$，N 分别是 AB，BC 的中点.

连接 MN，则 $MN /\!/ AC$，且 $MN=\dfrac{1}{2}AC$. ①

在$\triangle PMN$ 中，$\because \dfrac{PD}{PM}=\dfrac{PE}{PN}=\dfrac{2}{3}$，

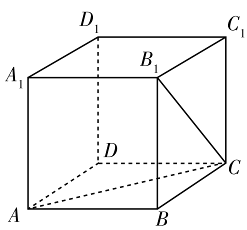
$\therefore DE /\!/ MN$，且 $DE=\dfrac{2}{3}MN$. ②

由①②根据公理 4，得

$DE /\!/ AC$，且 $DE=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{1}{3}AC$. 故 $DE \underline{/\!/} \dfrac{1}{3}AC$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，平面 $AC\cap$平面 $BC_1=BC$，直线 $AC\subset$平面 AC，直线 $B_1C\subset$平面 BC_1，而直线 AC 与直线 B_1C 相交于点 C，排除 A、B；又直线 $B_1C_1\subset$平面 BC_1，直线 $AC\subset$平面 AC，而直线 B_1C_1 与直线 AC 异面，排除 C.



第 1 题图

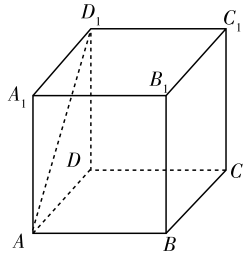
2. C 【解析】如图所示，在平面 CD_1 内的 CD_1 与 AD_1 成 $60°$角，则平面 BA_1 内的 BA_1 与 AD_1 也成 $60°$角. 在平面 AB_1 内的 AB_1 与 AD_1 成 $60°$角，则平面 DC_1 内的 DC_1 与 AD_1 也成 $60°$角. 同理平面 A_1C_1 内的 A_1C_1 和 B_1D_1，平面 AC 内的 AC 和 BD 与 AD_1 都成 $60°$角.

3. C 【解析】若 AB 和 CD 共面于 α，则 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\alpha$，$D\in\alpha$，所以 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，这与 a，b 是异面直线矛盾，所以 AB 与 CD 是异面直线. 故选 C.

4. B 【解析】因为 a，b 所成角的平分线与 a，b 所成的角为 $20°$和 $70°$，$\therefore$ 过 A 可作两条直线与 a，b 成 $30°$角.

5. D 【解析】$\because \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AH}{AD}=\lambda$，

$\therefore EH /\!/ BD$，且 $EH=\lambda BD$.



第 2 题图

同理，$FG /\!/ BD$，且 $FG=\mu BD$，

$\therefore EH /\!/ FG$. $\therefore$ 当 $\lambda=\mu$ 时，$EH=FG$.

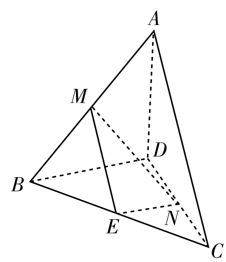
$\therefore$ 此时四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\therefore$ 选项 A、C 正确，D 错；

当 $\lambda\neq\mu$ 时，$EH\neq FG$，则此时四边形 $EFGH$ 是梯形，$\therefore$ 选项 B 正确.

6. D 【解析】如图所示，取 BC 的中点 E，连结 ME、NE，则 $ME=\dfrac{1}{2}AC$，$NE=\dfrac{1}{2}BD$，所以 $ME+NE=\dfrac{1}{2}(AC+BD)$.

在$\triangle MNE$ 中，有 $ME+NE>MN$，所以 $MN<\dfrac{1}{2}(AC+BD)$.



第 6 题图

7. $\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1$

8. $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b}{2}$

9. ①④⇒②或②④⇒①

10. ①②④ 【解析】只有当 $a /\!/ b$ 时，a、b 在 α 上的射影才可能是同一条直线，故③错，其余都有可能.

11.【证明】(1)如题图，在$\triangle ABD$ 中，

$\because E$、H 分别是 AB、AD 的中点，$\therefore EH /\!/ BD$，

同理 $FG /\!/ BD$，$\therefore EH /\!/ FG$，

$\therefore E$、F、G、H 四点共面；

(2)由(1)知 $EH /\!/ BD$，同理 $AC /\!/ GH$.

又$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，$\therefore EH\perp GH$，

$\therefore AC\perp BD$.

12.【解析】(1)$\because BB_1 /\!/ DD_1$，即 $FB /\!/ DD_1$，$\angle EFB$ 是异面直线 EF 和 DD_1 所成的角. 在$\triangle BEF$ 中，

$\because \angle EBF=90°$，$BE=BF$，

$\therefore \angle EFB=45°$，

即异面直线 EF 和 DD_1 所成角为 $45°$.

(2)连结 A_1C_1，

$\because G$、H 分别是 A_1D_1、D_1C_1 的中点，

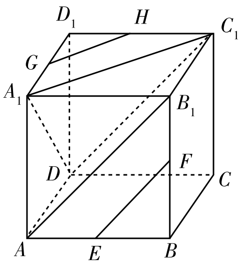
$\therefore GH$ 是$\triangle A_1D_1C_1$ 的中位线.

$\therefore A_1C_1 /\!/ GH$.

连结 AB_1，同理可证 $EF /\!/ AB_1$，

连结 C_1D，则 $AB_1 /\!/ C_1D$.

$\therefore C_1D /\!/ EF$.



第 12 题图

$\therefore \angle A_1C_1D$ 就是异面直线 EF 与 GH 所成的角.

连结 A_1D, $\because$ $\triangle A_1C_1D$ 的三边长均等于正方体棱长的 $\sqrt{2}$ 倍,

$\therefore$ $\triangle A_1C_1D$ 是等边三角形,

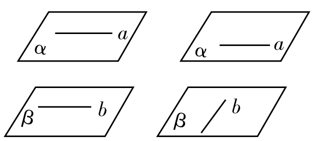
$\therefore \angle A_1C_1D = 60°$.

即异面直线 EF 和 GH 所成角为 $60°$.

第 9 课　空间中直线与平面、平面与平面的位置关系

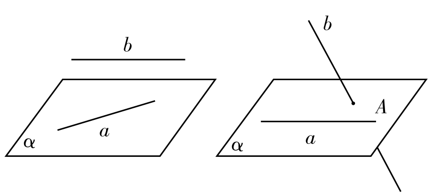
★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】若三点在平面的同一侧,则这两个平面互相平行;若三点不在平面的同一侧,则这两个平面相交. 故选 D.
2. D 【解析】若 $a /\!/ \alpha$, $b /\!/ \alpha$,则直线 a, b 的位置关系可能是平行、相交或异面.
3. D 【解析】依题意知,直线 a 可能位于平面 α 内,也可能与平面 α 相交. 当直线 a 位于平面 α 内时,A,B,C 均不正确,因此选 D.
4. 平行或异面　【解析】直线 a、b 平行或异面,如图.



第 4 题图

5. 无数　【解析】把过直线 a 的平面以 a 为旋转轴旋转得到无数个平面,除了经过直线 b 的平面外,其余的无数个平面都与 b 平行.
6. 【解析】用符号语言表示为:若 a 与 b 异面, $a \subset \alpha$,则 $b /\!/ \alpha$ 或 $b \cap \alpha = A$. 如图.



第 6 题图

★ 课后作业 ★

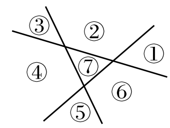
1. B 【解析】(1) 两条平行直线确定一个平面,再由公理 1 知这三条直线共面,故(1)正确.

(2) 先由两条相交直线确定一个平面,再由公理 1 可知这四条直线共面,故(2)正确.

(3) 若取两直线的交点和一条直线上的另外两点,则三点共线,经过这三点不能确定平面,故(3)不正确.

(4) 垂直必相交是平面几何里的性质,在空间不一定成立,故(4)不正确.

2. D 【解析】对 A,当 l 与 α 相交时满足条件,故 A 错;对 B, $l /\!/ \alpha$ 时, l 与 α 内直线无交点,则可平行或异面,故 B 错;对 C,若 $a /\!/ b$,且 $a /\!/ \alpha$ 时, $b /\!/ \alpha$ 或 $b \subset \alpha$,故 C 错;根据定义可知 D 正确.
3. C 【解析】由已知可知 a 不平行于 α 且 $a \not\subset \alpha$,因此 a 与 α 相交,所以 α 内直线过交点时,便也与 a 相交,不过交点时,便与 a 异面, α 内不存在与 a 平行的直线.
4. C 【解析】两个相交平面可以将空间分成 4 部分,第三个平面与前两个平面交于两条平行线,将空间比原来多分出 3 部分,因而共将空间分成 7 部分(如图).



第 4 题图

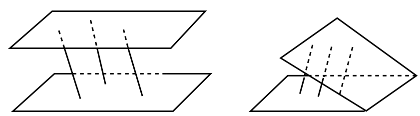
5. C 【解析】因为直线 l 平行于平面 α,点 $P \in \alpha$,所以 $P \notin l$,则直线 l 与点 P 确定一个平面 β,故 $P \in \alpha$, $P \in \beta$,从而 $P \in \alpha \cap \beta$,所以由公理 3 可知平面 α 与平面 β 有且只有一条过 P 的公共直线,易知该公共直线与直线 l 平行,故选 C.
6. C 【解析】由公理 4 知①是真命题.

在空间, $a \perp b$, $b \perp c$,直线 a、c 的关系不确定,故②是假命题.

由 $a /\!/ \gamma$, $b /\!/ \gamma$,不能判定 a、b 的关系,故③是假命题.

④是直线与平面垂直的性质定理. 故选 C.

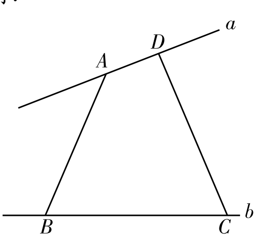
7. 平行或在平面内
8. 平行或相交　【解析】当这三条平行线段不共面时,两个平面平行,如图①,当这三条平行线段在同一平面时,这两个平面相交,如图②.



①　　②

第 8 题图

9. 0 或 1 【解析】当这两点在平面的同侧,并且两点确定的直线与这个平面平行时,过这两点可以作 1 个平面与这个平面平行. 其他情况下均不存在过这两点与已知平面平行的平面.
10. 4 【解析】正方体中除了平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 外,其余的 4 个面都与 EF 平行.
11. 【解析】已知: AB、CD 与两异面直线 a、b 分别交于 A、B、C、D 四点,求证: AB 与 CD 不平行.



第 11 题图

证明:假设 $AB /\!/ CD$,

则 AB、CD 确定一个平面 α,

则 $A \in \alpha$, $D \in \alpha$.

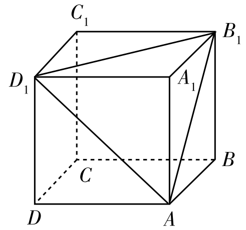
$\therefore a \subset \alpha$. 同理 $B \in \alpha$, $C \in \alpha$,

$\therefore b \subset \alpha$.

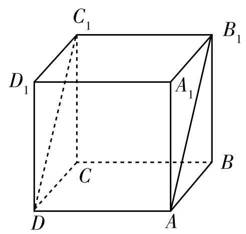
$\therefore a$ 与 b 共面,这与 a、b 异面矛盾.

故假设错误,原命题得证.

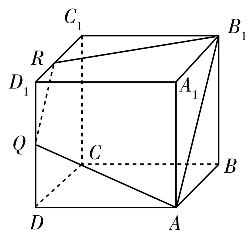
12.【解析】由点 Q 在线段 DD_1 上移动,当点 Q 与点 D_1 重合时,截面图形为等边三角形 AB_1D_1,如图①;



①



②



③

第 12 题图

当点 Q 与点 D 重合时,截面图形为矩形 AB_1C_1D,如图②;

当点 Q 不与点 D,D_1 重合时,截面图形为等腰梯形 $AQRB_1$,如图③.

13.【解析】平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交. 证明如下:

$\because AB$ 与 l 不平行,$AB\subset\alpha$,$l\subset\alpha$,

$\therefore AB$ 与 l 是相交直线.

设 $AB\cap l=P$,则点 $P\in AB$,点 $P\in l$.

又$\because AB\subset$平面 ABC,$l\subset\beta$,

$\therefore P\in$平面 ABC 且 $P\in$平面 β,

即点 P 是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点.

而 C 也是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点,

又 P,C 不重合,

$\therefore$ 直线 PC 就是平面 ABC 与平面 β 的交线,即平面 $ABC\cap$平面 $\beta=PC$.

而 $PC\cap l=P$,$\therefore$ 平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.

2.2 直线、平面平行的判定及其性质

第 10 课 直线与平面平行的判定

★ 课堂作业 ★

1. A

2. B 【解析】平行于同一平面的两条直线可能相交、平行或异面,所以 A 不正确;一条直线上有两点在一个平面外,则直线与平面相交或平行,所以 C 不正确;直线与平面不相交,意味着直线与平面平行或在平面内,D 不正确.

3. A

4. 相交或平行

5. 无数 【解析】过直线外一点作平面与已知直线平行,能作无数个,这一点可以从门的转动形象地展示.

6.【解析】(1)$\because E,F$ 分别是 B_1D_1,AB_1 的中点,

$\therefore EF/\!/AD_1$,又 $AD_1/\!/BC_1$,

$\therefore EF/\!/BC_1$,又$\because EF\not\subset$平面 BB_1C_1C,

$BC_1\subset$平面 BB_1C_1C,

$\therefore EF/\!/$平面 BB_1C_1C.

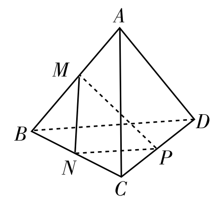
(2)$V_{ABCD-B_1C_1D_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{A_1-AB_1D_1}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】如图所示.

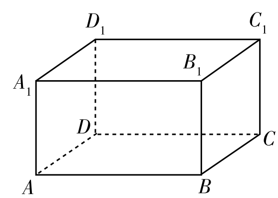
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BN=NC\\DP=PC\end{array}\right\}\Rightarrow BD/\!/NP\\ \qquad BD\not\subset\text{面 }MNP\\ \qquad NP\subset\text{面 }MNP\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow BD/\!/$面 MNP.



第 1 题图

2. B 【解析】如图所示,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 $AB\subset$平面 AC,直线 $CC_1\not\subset$平面 AC,直线 AB 和直线 CC_1 是异面直线,但是直线 $CC_1\cap$平面 $AC=C$,排除 A;直线 $AB\subset$平面 AC,直线 $B_1C_1\not\subset$平面 AC,直线 AB 和直线 B_1C_1 是异面直线,但是直线 $B_1C_1/\!/$平面 AC,排除 C;直线 $A_1B_1/\!/$平面 AC,直线 $B_1C_1/\!/$平面 AC,直线 A_1B_1 和直线 B_1C_1 共面,但是直线 $A_1B_1\cap$直线 $B_1C_1=B_1$,排除 D.



第 2 题图

3. D 【解析】当 $m\subset\alpha$,$\alpha/\!/\beta$ 时,$m/\!/\beta$,故选 D.

4. B 【解析】①中取 NP 中点为 O,连 MO,则 $MO/\!/AB$,

$\therefore AB/\!/$面 MNP,故①能推出;

②中面 MNP 内找不到与 AB 平行的直线,故②不能得出;

③中 AB 与面 MNP 相交;

④中$\because AB/\!/NP$,$\therefore AB/\!/$面 MNP.

5. C 【解析】若为 K,则平面 PEF 会与 $AA',BB',CC',AB,A'B'$平行,不符合要求;若为 H,则平面 PEF 会与 $AB,A'B',AC,A'C',BC,B'C'$平行,也不符合要求;若为 B',则平面 PEF 只会与 AB 平行,也不符合要求;若为 G,则平面 PEF 只恰好与 $A'B',AB$ 平行.

6. 0 或 1

7. 相交 【解析】由于 M 是 A_1D_1 的中点,延长 DM,则它与

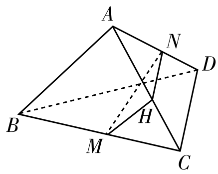
AA_1 的延长线相交,于是 DM 与平面 A_1ACC_1 有一个公共点,即 DM 与平面 A_1ACC_1 相交.

8. 平行　平行　【解析】设 AB、BC、CD 的中点分别为 M、N、P,

$\because MN // AC$,$\therefore AC //$ 平面 MNP,

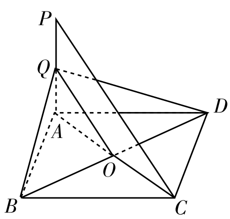
又$\because NP // BD$,$\therefore BD //$ 平面 MNP.

9. $AB+CD>2MN$　【解析】如图,取 AC 的中点 H,连接 MH,NH,则 $MH=\frac{1}{2}AB$,$NH=\frac{1}{2}CD$,由于 $MH+NH>MN$,所以$\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD>MN$,即 $AB+CD>2MN$.



第 9 题图

10.【证明】如图,连接 AC,交 BD 于点 O.



第 10 题图

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AO=OC$.

连接 OQ,则 OQ 在平面 BDQ 内,且 OQ 是$\triangle APC$ 的中位线,所以 $PC // OQ$.

因为 PC 在平面 BDQ 外,

所以 $PC //$ 平面 BDQ.

11.【证明】$\because E$、F 分别为 AB、CD 的中点,

$\therefore EB=FD$.

又$\because EB // FD$,

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 为平行四边形.$\therefore BF // ED$.

$\because DE \subset$ 平面 ADE,而 $BF \not\subset$ 平面 ADE,

$\therefore BF //$ 平面 ADE.

12.【解析】(1)作 $MP // AB$ 交 BC 于 P,$NQ // AB$ 交 BE 于点 Q,连结 PQ.

依题意可知 $MP // NQ$,且 $MP=NQ$,即四边形 $MNQP$ 是平行四边形,

又 $PQ \subset$ 平面 BCE,$MN \not\subset$ 平面 BCE,

$\therefore MN //$ 平面 CBE,

且 MN 与平面 CBE 的平行关系与 a 的大小无关,

只需满足 $a\in(0,\sqrt{2})$ 即可,

这说明对任意的 $a\in(0,\sqrt{2})$,恒有 $MN //$ 平面 CBE.

(2)由(1)知 $MN=PQ$,$CM=BN=a$,

又 $AC=BF=\sqrt{2}$,$\frac{CP}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$,$\frac{BQ}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$,

即 $CP=BQ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore MN=PQ=\sqrt{(1-CP)^2+BQ^2}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}(0<a<\sqrt{2})$,

当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,MN 取得最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即当 M,N 分别移动到 AC,BF 的中点时,MN 的长度最短,为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第 11 课　平面与平面平行的判定

★ 课堂作业 ★

1. C
2. D
3. B
4. 在平面内或平行
5. 1

6.【证明】由$\frac{PD}{PA}=\frac{PE}{PB}$,$\angle APB=\angle DPE$ 知,$\triangle PDE \backsim \triangle PAB$,$DE // AB$,

同理:$EF // BC$,$DE \cap EF=E$.

所以,面 $DEF //$ 面 ABC.

★ 课后作业 ★

1. C　【解析】只有 a,b 相交不可能.

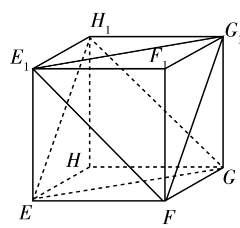
2. C　【解析】底面为正六边形,侧棱与底面垂直时,有 4 对互相平行的平面.

3. C　【解析】$\because EF // AC$,$\therefore AC //$ 面 $EFGH$;

又$\because FG // BD$,$\therefore BD //$ 面 $EFGH$.

其他棱均与面 $EFGH$ 相交.

4. A　【解析】画出相应的截面如图所示,即可得答案.



第 4 题图

5. D　【解析】$\because a$ 是平面 α 外的一条直线,

$\therefore a // \alpha$ 或 a 与 α 相交.

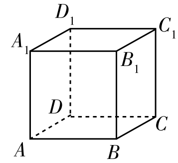
当 $a // \alpha$ 时,β 只有一个;

当 a 与 α 相交时,β 不存在.故选 D.

6. D　【解析】由面面平行与线面平行的定义知,①是正确的.

对于②,n 可能在平面 β 内.

对于③,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,如图,$AA_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1,$CC_1 \subset$ 平面 CDD_1C_1,而 $AA_1 // C_1C$,从而 A_1A 与 CC_1 可确定一个平面 AA_1C_1C.即 AA_1,C_1C 可以共面.



第 6 题图

对于④,m 可能在平面 β 内.

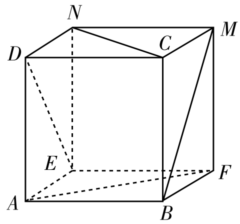
故②③④错,选 D.

7. 不在同一直线上且在 β 的同一侧　【解析】当三点不在同一直线上且在 β 的同一侧且到 β 的距离相等时,$\alpha // \beta$.

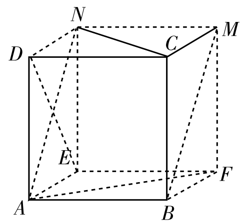
8. 平行 【解析】$\because AC /\!/$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，根据线面平行的性质知 $l /\!/ AC$.

9. ①④⑤⑥ 【解析】②中 a 和 b 还有可能相交、异面；③中 α、β 有可能相交.

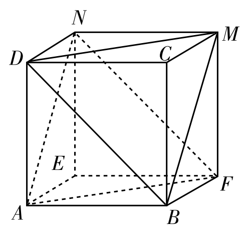
10. ①②③④ 【解析】展开图可以折成如图①所示的正方体.
在正方体中，连接 AN，如图②所示，
$\because AB \underline{/\!/} MN$，
$\therefore$ 四边形 $ABMN$ 是平行四边形. $\therefore BM /\!/ AN$.
$\therefore BM /\!/$ 平面 DE；
同理可证 $CN /\!/$ 平面 AF，
$\therefore$ ①②正确；
如图③所示，
可以证明 $BM /\!/$ 平面 AFN，$BD /\!/$ 平面 AFN，则平面 $BDM /\!/$ 平面 AFN，同理可证平面 $BDE /\!/$ 平面 NCF，$\therefore$ ③④正确.



①



②

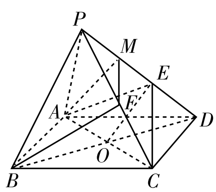


③

第 10 题图

11.【证明】连接 MF，
$\because M$、F 分别是 A_1B_1、C_1D_1 的中点，
且四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，
$\therefore MF \underline{/\!/} A_1D_1$.
又 $A_1D_1 \underline{/\!/} AD$，$\therefore MF \underline{/\!/} AD$，
$\therefore$ 四边形 $AMFD$ 是平行四边形，
$\therefore AM /\!/ DF$.
$\because DF \subset$ 平面 $EFDB$，$AM \not\subset$ 平面 $EFDB$，
$\therefore AM /\!/$ 平面 $EFDB$.
同理，$AN /\!/$ 平面 $EFDB$.
又 AM、$AN \subset$ 平面 AMN，且 $AM \cap AN = A$，
$\therefore$ 平面 $AMN /\!/$ 平面 $EFDB$.

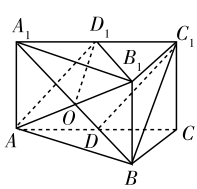
12.【解析】当 F 是棱 PC 的中点时，平面 $BFM /\!/$ 平面 AEC.
证明如下：
如图，$\because M$ 为 PE 的中点，
$\therefore FM /\!/ CE$，$\therefore FM /\!/$ 平面 AEC.
由 $EM = \dfrac{1}{2}PE = ED$，知 E 是 MD 的中点，连接 BD.



第 12 题图

设 $BD \cap AC = O$，则 O 为 BD 的中点，连接 OE，
$\therefore OE /\!/ BM$，$\therefore BM /\!/$ 平面 AEC. 由 $FM \cap BM = M$，$CE \cap OE = E$，可知平面 $BFM /\!/$ 平面 AEC.

13.【解析】(1) $\dfrac{A_1D_1}{D_1C_1} = 1$ 时，$BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1. 证明如下：如图，此时 D_1 为线段 A_1C_1 的中点，连接 A_1B 交 AB_1 于 O，连接 OD_1. 由棱柱的定义知四边形 A_1ABB_1 为平行四边形，



第 13 题图

$\therefore$ 点 O 为 A_1B 的中点.
在 $\triangle A_1BC_1$ 中，点 O，D_1 分别为 A_1B，A_1C_1 的中点，
$\therefore OD_1 /\!/ BC_1$.
又 $\because OD_1 \subset$ 平面 AB_1D_1，$BC_1 \not\subset$ 平面 AB_1D_1，$\therefore BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1，$\therefore$ 当 $\dfrac{A_1D_1}{D_1C_1} = 1$ 时，$BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1.
(2) 由(1)知，当 $BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1 时，点 D_1 是线段 A_1C_1 的中点，则有 $AD /\!/ D_1C_1$，且 $AD = D_1C_1$.
$\therefore$ 四边形 ADC_1D_1 是平行四边形. $\therefore AD_1 /\!/ DC_1$.
又 $\because DC_1 \not\subset$ 平面 AB_1D_1，$AD_1 \subset$ 平面 AB_1D_1，$\therefore DC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1.
又 $\because BC_1 /\!/$ 平面 AB_1D_1，$BC_1 \subset$ 平面 BC_1D，$DC_1 \subset$ 平面 BC_1D，$DC_1 \cap BC_1 = C_1$，
$\therefore$ 平面 $BC_1D /\!/$ 平面 AB_1D_1.

第 12 课 直线与平面平行的性质

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】设 α 内 n 条直线的交点为 A，则过 A 有且仅有一条直线 l 与 a 平行，当 l 在这 n 条直线中时，有一条与 a 平行，而当 l 不在这 n 条直线中时，n 条相交于 A 的直线都不与 a 平行.
$\therefore n$ 条相交直线中有 0 条或 1 条直线与 a 平行.

2. D 【解析】A 错，若点与 a 所确定的平面与 b 平行时，就不能使这个平面与 a 平行了. B 错，若点与 a 所确定的平面与 b 平行时，就不能作一条直线与 a，b 相交. C 错，假如这样的直线存在，根据公理 4 就可有 $a /\!/ b$，这与 a，b 异面矛盾. D 正确. 在 a 上任取一点 A，过 A 作直线 $c /\!/ b$，则 c 与 a 确定一个平面与 b 平行，这个平面是唯一的.
$\therefore$ 应选 D.

3. A 【解析】①两条直线都和同一个平面平行，这两条直线三种位置关系都有可能；
②两条直线没有公共点，则这两条直线平行或异面；
③两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线三种位置关系都有可能；
④一条直线和一个平面内无数条直线没有公共点，则这条直线可能与平面相交，也可能在这个平面内.

4. 平行 【解析】$\because BB_1 /\!/ DD_1$，$BB_1 = DD_1$，
$\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 为平行四边形，
$\therefore BD /\!/ B_1D_1$，$\therefore BD /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.
又 $\because$ 平面 α 过 B、D、A_1 三点，$\therefore BD \subset$ 平面 α，
又 $\alpha \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = l$，$\therefore BD /\!/ l$，即 $l /\!/ B_1D_1$.

5. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$ 【解析】$\because MN /\!/$ 平面 AC，$PQ =$ 平面 $PMN \cap$ 平面 AC，
$\therefore MN /\!/ PQ$.
易知 $DP = DQ = \dfrac{2}{3}a$，
故 $PQ = \sqrt{2} \times \dfrac{2}{3}a = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

6.【解析】(1) $\because AC /\!/$ 平面 $MNPQ$，平面 $ADC \cap$ 平面 $MNPQ = PQ$，且 $AC \subset$ 平面 ADC，$\therefore AC /\!/ PQ$.
同理可证 $AC /\!/ MN$，$BD /\!/ MQ$，$BD /\!/ NP$.
$\therefore PQ /\!/ MN$，$MQ /\!/ NP$，$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 为平行四边形.
(2) 由 $PQ /\!/ AC$，得 $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{DQ}{DA}$. ①

由 $MQ/\!/BD$，得$\dfrac{MQ}{BD}=\dfrac{AQ}{AD}$. ②

又 $AC=BD$，$\dfrac{①}{②}$，得$\dfrac{PQ}{MQ}=\dfrac{DQ}{AQ}$.

当 $DQ=AQ$ 时，$PQ=MQ$.

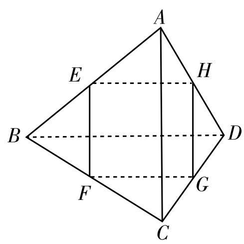
又四边形 $MNPQ$ 为平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 为菱形.

即当 Q 为 AD 中点时，可截得菱形.

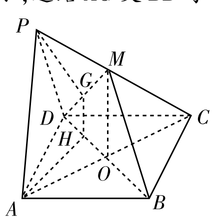
★ 课后作业 ★

1. B
2. A
3. D
4. C 【解析】①中 m 与 α 内的有些直线异面，②中 m 与 n 可能异面.
5. B 【解析】设截面四边形为 $EFGH$，F、G、H 分别是 BC、CD、DA 的中点，
$\therefore EF=GH=4$，$FG=HE=6$，
$\therefore$ 所求周长为 $2\times(4+6)=20$.
6. C 【解析】在已知平面 α 内分别作 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$，$c'/\!/c$，则 a'，b'，c'所成的角即为异面直线 a，b，c，所成的角，由异面直线所成的角均相等，得 a 与 b 所成角的度数为 $60°$.
7. 平行
8. 平行 【解析】由于平面 $ABCD/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 $A_1B_1C_1D_1\cap$ 平面 $A_1C_1B=A_1C_1$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $A_1C_1B=l$，由面面平行的性质知 $l/\!/A_1C_1$.
9. $\dfrac{m}{n}$ 【解析】设$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{x}{1}$，如图，因为 $AC/\!/$ 平面 $EFGH$，平面 $ABC\cap$ 平面 $EFGH=EF$，所以 $EF/\!/AC$. 所以$\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{1}{1+x}$. 所以 $EF=\dfrac{m}{1+x}$. 同理，得 $EH/\!/BD$，所以$\dfrac{EH}{BD}=\dfrac{x}{1+x}$.
所以 $EH=\dfrac{nx}{1+x}$，由 $EF=EH$，得 $x=\dfrac{m}{n}$.



第 9 题图

10. 【证明】如图所示，连结 AC 交 BD 于 O，连结 MO，



第 10 题图

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore O$ 是 AC 中点，又 M 是 PC 的中点，
$\therefore AP/\!/OM$.
根据直线和平面平行的判定定理，
则有 $PA/\!/$平面 BMD.
$\because$ 平面 $PAHG\cap$ 平面 $BMD=GH$，
根据直线和平面平行的性质定理，
$\therefore PA/\!/GH$.
11. 【证明】过 A 作 $AE/\!/CD$ 交 α 于 E，取 AE 的中点 P，连接 MP、PN、BE、ED.
$\because AE/\!/CD$，$\therefore AE$、CD 确定平面 $AEDC$.
则平面 $AEDC\cap\alpha=DE$，平面 $AEDC\cap\beta=AC$，
$\because \alpha/\!/\beta$，$\therefore AC/\!/DE$.
又 P、N 分别为 AE、CD 的中点，
$\therefore PN/\!/DE$. $PN\not\subset\alpha$，$DE\subset\alpha$，
$\therefore PN/\!/\alpha$. 又 M、P 分别为 AB、AE 的中点，
$\therefore MP/\!/BE$，且 $MP\not\subset\alpha$，$BE\subset\alpha$.
$\therefore MP/\!/\alpha$，$\therefore$ 平面 $MPN/\!/\alpha$.
又 $MN\subset$平面 MPN，$\therefore MN/\!/\alpha$.
12. 【解析】当 F 是棱 PC 的中点时，$BF/\!/$平面 AEC.
证明如下：取 PE 的中点 M，连接 FM，则 $FM/\!/CE$.
$\because FM\not\subset$平面 AEC，$CE\subset$平面 AEC，
$\therefore FM/\!/$平面 AEC，
由 $EM=\dfrac{1}{2}PE=ED$，得 E 是 MD 的中点.
连接 BM，BD，设 $BD\cap AC=O$，
则 O 是 BD 的中点，
连接 OE，$\therefore BM/\!/OE$.
$\because BM\not\subset$平面 AEC，$OE\subset$平面 AEC，
$\therefore BM/\!/$平面 AEC，
$\because FM\cap BM=M$，
$\therefore$ 平面 $BFM/\!/$平面 AEC，
又 $BF\subset$平面 BFM，$\therefore BF/\!/$平面 AEC.

第 13 课　平面与平面平行的性质

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】若两个平面平行，则两个平面没有公共点，$\therefore a/\!/b$ 或 a，b 异面，即 a，b 一定不相交. 故选 C.
2. D 【解析】由公理 3 易知存在唯一一条直线与 a 平行.
3. $a\subset\beta$ 或 $a/\!/\beta$
4. ①②③
5. 【证明】$\because$ 四边形 $A'B'C'D$ 是平行四边形，
$\therefore A'D'/\!/B'C'$.
$\because AA'/\!/BB'$，且 AA'、$A'D'$是平面 $AA'D'D$ 内的两条相交直线，BB'、$B'C'$是平面 $BB'C'C$ 内的两条相交直线，
$\therefore$ 平面 $AA'D'D/\!/$平面 $BB'C'C$.
又因 AD、BC 分别是平面 $ABCD$ 与平面 $AA'D'D$、平面 $BB'C'C$的交线，故 $AD/\!/BC$.
同理可证 $AB/\!/CD$.
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】a、b 无公共点，$\therefore a/\!/b$ 或 a、b 异面.
2. C
3. D
4. B
5. D
6. 一条直线
7. ①②⇒③（或①③⇒②）
8. 5 和 9 【解析】设两平面之间的距离为 d，AC、BD 在平

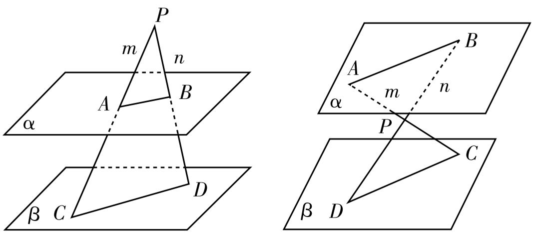
面 β 内的射影长分别为 x、y.

$$\begin{cases}x+y=14,\\x^2+d^2=13^2,\Rightarrow x=5,y=9.\\y^2+d^2=15^2\end{cases}$$

9. $M\in$ 线段 FH

10.【解析】因为点 P 的位置不确定,应分以下三种情况讨论:

(1)当点 P 在 α 上方时,如图①.



① ②

第 10 题图

$\because PA\cap PB=P,\beta\cap$ 平面 $PCD=CD$,

$\alpha\cap$ 平面 $PAB=AB$,

又 $\alpha/\!/\beta$,$\therefore AB/\!/CD$. $\therefore \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}$.

又 $PA=6,AC=9,PD=8$,

$\therefore PC=PA+AC=15$.

$\therefore PB=\dfrac{6\times8}{15}=\dfrac{16}{5}$.

$\therefore BD=PD-PB=8-\dfrac{16}{5}=\dfrac{24}{5}$.

(2)当点 P 在 α、β 中间时,如图②.

$\because \alpha/\!/\beta$,同(1)得 $AB/\!/DC$.

$\therefore \triangle PAB\backsim\triangle PCD$.

$\therefore \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}$.

$\because AC=9,PA=6,\therefore PC=3$.

又 $PD=8,\therefore PB=\dfrac{PA\times PD}{PC}=\dfrac{6\times8}{3}=16$.

$\therefore BD=8+16=24$.

(3)当点 P 在 β 下方时,由 $PA<PC$ 知不可能.

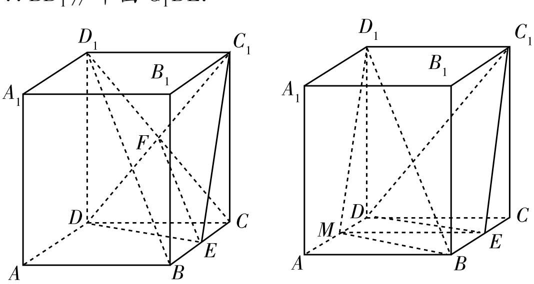
$\therefore$ 综上所述,BD 的长为 24 或 $\dfrac{24}{5}$.

11.【证明】证法一:如图(1)所示,连接 CD_1 交 DC_1 于点 F,连接 EF,则点 F 是 D_1C 的中点,

又 E 是棱 BC 的中点,$\therefore EF/\!/BD_1$.

又 $BD_1\not\subset$ 平面 C_1DE,$EF\subset$ 平面 C_1DE,

$\therefore BD_1/\!/$ 平面 C_1DE.



(1) (2)

第 11 题图

证法二:如上图(2)所示,取 AD 的中点 M,连接 MB、MD_1、ME,则有 $ME\mathrel{\underline{/\!/}}CD$,$C_1D_1\mathrel{\underline{/\!/}}CD$,

$\therefore ME\mathrel{\underline{/\!/}}C_1D_1$.

$\therefore$ 四边形 MEC_1D_1 是平行四边形.

$\therefore C_1E/\!/D_1M$.

又 $C_1E\not\subset$ 平面 MBD_1,$D_1M\subset$ 平面 MBD_1,

$\therefore C_1E/\!/$ 平面 MBD_1.

又 $DM\mathrel{\underline{/\!/}}BE$,

$\therefore$ 四边形 $BEDM$ 是平行四边形.

$\therefore DE/\!/BM$.

又 $DE\not\subset$ 平面 MBD_1,$BM\subset$ 平面 MBD_1,

$\therefore DE/\!/$ 平面 MBD_1.

又 $DE\subset$ 平面 C_1DE,$C_1E\subset$ 平面 C_1DE,$DE\cap C_1E=E$,

$\therefore$ 平面 $C_1DE/\!/$ 平面 MBD_1,

又 $BD_1\subset$ 平面 MBD_1,

$\therefore BD_1/\!/$ 平面 C_1DE.

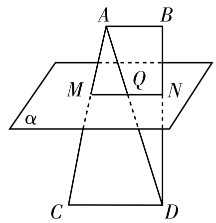
12.【证明】如图,连接 AD 交平面 α 于 Q,连接 MQ、QN,MQ 为面 ACD 与平面 α 的交线.

因为 $CD/\!/\alpha$,

所以 $CD/\!/MQ$,故 $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AQ}{QD}$①.

同理可证 $\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{BN}{ND}$②.

由①②可得 $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BN}{ND}$.



第 12 题图

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

第 14 课 直线与平面垂直的判定

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】若平面 α 内的这两条直线相交,则直线 l 与平面 α 垂直,若平面 α 内的这两条直线平行,则直线 l 与平面 α 可能平行、相交或在 α 内.

2. C 【解析】$\because PA\perp$ 平面 ABC,$\therefore PB$ 在平面 ABC 内的射影是 AB. $\therefore \angle PBA$ 是直线 PB 与平面 ABC 所成的角. 又在 $\triangle PAB$ 中,$\angle BAP=90^\circ$,$PA=AB$,$\therefore \angle PBA=45^\circ$.

$\therefore$ 直线 PB 与平面 ABC 所成的角是 45°. 故选 C.

3. D

4. 相交或异面

5. 垂直 【解析】$\because PA=PC$,O 是 AC 的中点,

$\therefore PO\perp AC$.

同理可得 $PO\perp BD$. $\because AC\cap BD=O$,

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$.

6.【证明】$\because BC\perp CD,BC\perp CC_1$,且 $DC\cap CC_1=C$,

$\therefore BC\perp$ 面 CDD_1C_1.

又 $DE\subset$ 面 CDD_1C_1,$\therefore DE\perp BC$.

在 $\triangle CDE$ 中,$CD=2a,CE=DE=\sqrt{2}a$,

则有 $CD^2=CE^2+DE^2$,

$\therefore \angle DEC=90^\circ$. $\therefore DE\perp EC$.

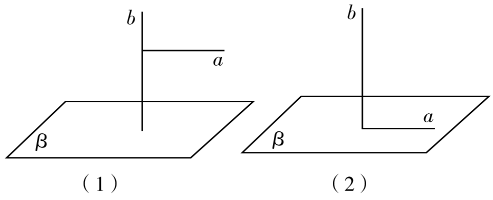
又 $BC\cap EC=C$,$\therefore DE\perp$ 平面 BCE.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】根据线面垂直的定义,知直线 $l\perp\alpha$ 时,l 垂直

于平面 α 内的任意一条直线.

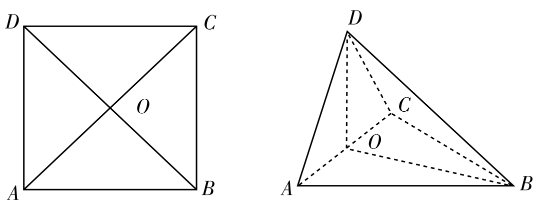
2. D 【解析】根据条件直线 $a\perp$ 直线 b,$b\perp$ 平面 β 可作出的图形如图.



第 2 题图

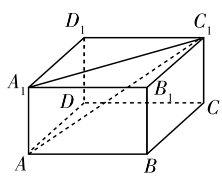
3. C 【解析】①只有一条直线垂直于平面内两条相交直线的时候,才能得到该直线垂直于此平面. ②是线面垂直的定义,显然符合. ③中,两条平行直线在同一平面内的射影可能平行,可能重合,还可能是两个点,显然不正确. ④中,过一点有且只有一条直线与已知的异面直线垂直,符合公垂线的定义. 综上可知,正确的命题只有②④,选择 C.

4. C 【解析】如图,以 A,B,C,D 四点为顶点的正棱锥体积最大,即 $DO\perp$ 底面 ABC,所以 $\angle DBO$ 为直线 BD 和平面 ABC 所成的角. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle DOB$ 中,$OD=OB$,所以直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 $45°$.



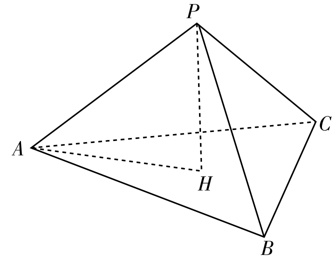
第 4 题图

5. D 【解析】连结 A_1C_1,如图在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,
故 $\angle AC_1A_1$ 为 AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角.
由 $AB=BC=2$,$AA_1=1$,
得 $AC_1=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle AC_1A_1$ 中,
$\sin\angle AC_1A_1=\dfrac{AA_1}{AC_1}=\dfrac{1}{3}$,
故 AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



第 5 题图

6. C 【解析】如图,由于 PA,PB,PC 两两垂直,且 $PC\cap PB=P$,所以 $PA\perp$ 平面 PBC,所以 $PA\perp BC$,又 $BC\perp PH$,$PA\cap PH=P$,所以 $BC\perp$ 平面 PAH,所以 $BC\perp AH$,同理 $AB\perp CH$,$AC\perp BH$,所以点 H 为三角形 ABC 的垂心.



第 6 题图

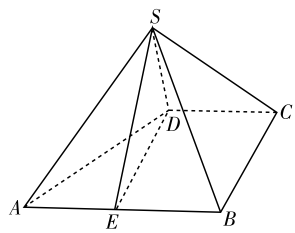
7. 面 $ABCDEF$、面 $A'B'C'D'E'F'$

8. $45°$

9. 平面 AB_1C,平面 A_1C_1D 【解析】因为 $AC\perp$ 平面 BDD_1,所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1,所以 $AC\perp OM$,同理可证 $B_1C\perp OM$,$AC\cap B_1C=C$,所以 $OM\perp$ 平面 AB_1C;同理,$OM\perp$ 平面 A_1C_1D.

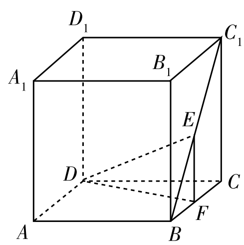
10. $BD\perp AC$ 【分析】要找底面四边形 $ABCD$ 所应满足条件,使 $A_1C\perp B_1D_1$,可从结论 $A_1C\perp B_1D_1$ 入手. 因为 $A_1C\perp B_1D_1$,$BD/\!/B_1D_1$,所以 $A_1C\perp BD$. 又因为 $AA_1\perp BD$,而 $AA_1\cap A_1C=A_1$,所以 $BD\perp$ 平面 A_1AC,所以 $BD\perp AC$. 答案不唯一.

11.【证明】取 AB 中点 E,连接 DE,则四边形 $BCDE$ 为矩形,$DE=CB=2$,连接 SE,则 $SE\perp AB$,$SE=\sqrt{3}$.
又 $SD=1$,$\therefore ED^2=SE^2+SD^2$,
$\therefore\angle DSE$ 为直角,即 $SD\perp SE$.
$\because AB\perp DE$,$AB\perp SE$,$DE\cap SE=E$,得 $AB\perp$ 平面 SDE,
$\therefore AB\perp SD$.
$\because SD$ 与两条相交直线 AB,SE 都垂直,$\therefore SD\perp$ 平面 SAB.



第 11 题图

12.【解析】过 E 作 $EF\perp BC$,交 BC 于 F,连结 DF.
$\because EF\perp$ 平面 $ABCD$,
$\therefore\angle EDF$ 是直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.
由题意,得 $EF=\dfrac{1}{2}CC_1=1$.
$\because CF=\dfrac{1}{2}CB=1$. $\therefore DF=\sqrt{5}$.
易知 $EF\perp DF$,$\therefore\tan\angle EDF=\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
故直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



第 12 题图

13.【解析】(1) 连接 A_1C_1,AC,设 AC 和 BD 交于点 O,连接 C_1O,
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AC\perp BD$,$BC=CD$.
又$\because\angle BCC_1=\angle DCC_1$,$C_1C$ 是公共边,
$\therefore\triangle C_1BC\backsim\triangle C_1DC$,$\therefore C_1B=C_1D$.
$\because DO=OB$,$\therefore C_1O\perp BD$. 又 $AC\cap C_1O=O$,
$\therefore BD\perp$ 平面 AC_1,又 $C_1C\subset$ 平面 AC_1,$\therefore C_1C\perp BD$.
(2) 由(1)知 $BD\perp$ 平面 AC_1,$\because A_1C\subset$ 平面 AC_1,$\therefore BD\perp A_1C$,当 $\dfrac{CD}{CC_1}=1$ 时,平行六面体的六个面是全等的菱形,同理可证 $BC_1\perp A_1C$,又$\because BD\cap BC_1=B$,$\therefore A_1C\perp$ 平

面 C_1BD.

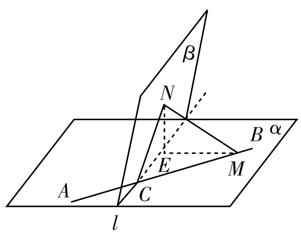
第 15 课　平面与平面垂直的判定

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】A 不对,可能相交;B 正确,依据是平行平面的传递性;C 不对,可能相交;D 错误,只有两个平面平行时,交线才平行.

2. C 【解析】因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,$PA\perp BC$,$PA\perp CD$. 由 $PA\perp AB$,$AB\perp AD$ 得 $AB\perp$ 平面 PAD,由 $AB\subset$ 平面 PAB,得平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;由 $PA\perp BC$,$BC\perp AB$得 $BC\perp$ 平面 PAB,因为 $BC\subset$ 平面 PBC,所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC;由 $PA\perp CD$,$CD\perp AD$ 得 $CD\perp$ 平面 PAD,因为 $CD\subset$ 平面 PCD,所以平面 $PCD\perp$ 平面 PAD.

3. D 【解析】如图,设 AB 与 l 交于一点 C,在 AB 上任取一点 M,过 M 作 $MN\perp\beta$ 于 N,过 M 作 $ME\perp l$ 于 E,连接 NE,则 $NE\perp l$. $\angle NEM$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角或它的补角,连接 NC. $\because$ $\angle BCE=45°$,$\angle BCN=30°$. 设 $ME=x$,则 $MC=\sqrt{2}x$,$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 在 Rt$\triangle MNE$ 中,$\sin\angle NEM=\dfrac{NM}{ME}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore$ $\angle NEM$ 等于 $45°$ 或 $135°$. 故选 D.

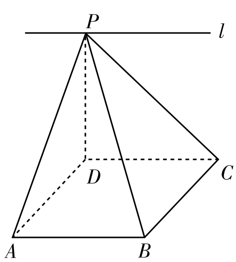


第 3 题图

4. ①③

5. $60°$ 【解析】如图,由矩形 $ABCD$,可知 $AB/\!/CD$. 根据线面平行的判定定理得 $AB/\!/$平面 PDC. 再由线面平行的性质定理知 $AB/\!/l$(l 为平面 PAB 与平面 PDC 的交线). $\because$ $PD\perp$ 平面 $ABCD$,$\therefore$ $PD\perp DC$,$\therefore$ $PD\perp l$. 又$\because$ $PD\perp$平面 $ABCD$,$AB\perp AD$,$\therefore$ $AB\perp PA$. $\therefore$ $l\perp PA$. $\therefore$ $\angle APD$ 为平面 ABP 与平面 PCD 所成角的平面角. 又$\because$ PC 与平面 $ABCD$ 成 $45°$角,$PD\perp$平面 $ABCD$,$\therefore$ $\angle PCD=45°$,$\therefore$ $PD=DC=1$. 又 $AD=\sqrt{3}$,$\therefore$ 在 Rt$\triangle PAD$ 中,$\tan\angle APD=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ $\angle APD=60°$.



第 5 题图

【点评】本题属于无棱的二面角的平面角问题,需先作出公共棱,然后确定二面角的平面角.

6.【证明】由题可得$\triangle ABD$ 与$\triangle BCD$ 是全等的等腰直角三角形,

$\therefore$ 取 BD 的中点 E,连接 AE、CE,如图,

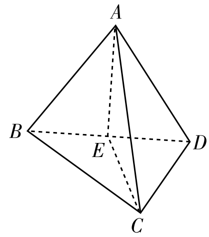
则 $AE\perp BD$,$BD\perp CE$,

$\therefore$ $\angle AEC$ 为平面 ABD 和平面 BCD 所成角的平面角.

$\because$ $AE=CE=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore$ $AE^2+CE^2=a^2=AC^2$,

$\therefore$ $\angle AEC=90°$,$\therefore$ 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.



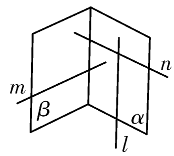
第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】当这条直线与这个平面垂直时,经过这条直线与已知平面垂直的平面有无数个;当这条直线与这个平面不垂直时,则满足条件的平面只有一个.

2. D

3. D 【解析】结合给出的已知条件,画出符合条件的图形,然后判断得出. 根据所给的已知条件作图,如图所示. 由图可知 α 与 β 相交,且交线平行于 l,故选 D.



第 3 题图

4. D 【解析】$\because$ $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA\subset$平面 PAB,$PA\subset$平面 PAD,

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$.

又 $DA\perp AB$,$DA\perp PA$,

$\therefore$ $DA\perp$平面 PAB.

又 $DA\subset$平面 PAD. $\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 PAD.

又$\because$ $BC\perp AB$,$BC\perp PA$,$\therefore$ $BC\perp$平面 PAB,

又$\because$ $BC\subset$平面 PBC,

$\therefore$ 平面 $PBC\perp$平面 PAB.

同理,平面 $PDC\perp$平面 PAD.

$\therefore$ 共有 $2+1+1+1=5$(对).

5. C 【解析】①正确,平行于同一个平面的两个平面平行;②错误,由线面平行、垂直知,m 不一定垂直于 β;③正确,由线面平行、垂直关系可判断正确;④错误,m 也可能在 α 内. 综上所述,正确的命题是①③.

6. D 【解析】①显然错误,因为这两条直线相交才满足条件;②成立;③错误,这两条直线可能平行,相交,也可能异面;④成立,用反证法容易证明. 故选 D.

7. 26 cm 【解析】过 B 作 $BH\underline{\underline{/\!/}}AC$,连接 CH,HD. 易得四边形 $ABHC$ 是矩形,$\angle HBD=90°$(因为 $\angle HBD$ 是直二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角),$\angle CHD=90°$,$\therefore$ $CD=\sqrt{CH^2+HD^2}=\sqrt{AB^2+(HB^2+BD^2)}=\sqrt{8^2+(AC^2+BD^2)}=\sqrt{8^2+6^2+24^2}=\sqrt{676}=26(\text{cm})$.

8. $60°$ 【解析】过 a 上一点作直线 b 的平行线 c,则直线 a、b 所成的角等于直线 c、a 所成的角,由于直线 c、a 分别垂直于二面角的面,又直线所成的角为锐角,故直线 c、a 所成的角等于 $60°$.

9. $90°$

10. $75°$

11.【解析】(1)在$\triangle ABD$ 中,因为 E、F 分别是 AB、BD 的中点,

所以 $EF/\!/AD$.

又 $AD\subset$平面 ACD,$EF\not\subset$平面 ACD,

所以直线 $EF/\!/$平面 ACD.

(2)在$\triangle ABD$ 中,因为 $AD\perp BD$,$EF/\!/AD$,

所以 $EF\perp BD$.

在$\triangle BCD$ 中,因为 $CD=CB$,F 为 BD 的中点,

所以 $CF\perp BD$.

因为 $EF\subset$ 平面 EFC,$CF\subset$ 平面 EFC,EF 与 CF 交于点 F,所以 $BD\perp$ 平面 EFC.

又因为 $BD\subset$ 平面 BCD,所以平面 $EFC\perp$ 平面 BCD.

12.【解析】当点 E 为 C_1C 的中点时,平面 $A_1BD\perp$ 平面 BDE. 理由如下:

$\because D$、E 分别为 AC、C_1C 的中点,

$\therefore DE\parallel AC_1$,$\because AC_1\perp$ 平面 A_1BD,

$\therefore DE\perp$ 平面 A_1BD.

又 $DE\subset$ 平面 BDE,$\therefore$ 平面 $A_1BD\perp$ 平面 BDE.

13.【解析】(1) 由三视图可得,三棱锥 $A-BCD$ 中,$\angle ADB$、$\angle ADC$、$\angle DBC$、$\angle ABC$ 都等于 $90°$,每个面都是直角三角形,

可得 $CB\perp$ 平面 ADB,所以 $CB\perp DE$.

又 $DE\perp AB$,所以 $DE\perp$ 平面 ABC,

所以 $DE\perp AC$.

又 $DF\perp AC$,所以 $AC\perp$ 平面 DEF.

(2) 由(1)知 $\angle DFE$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角,在直角三角形 DEF 中,

$DE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$DF=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \sin\angle DFE=\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

即二面角 $B-AC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

第 16 课　直线、平面垂直的性质

★ 课堂作业 ★

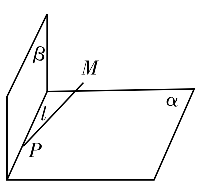
1. C

2. D 【解析】两个平面 α,β 垂直时,设交线为 l,则在平面 α 内与 l 平行的直线都平行于平面 β,故 A 正确;如果平面 α 内存在直线垂直于平面 β,那么由面面垂直的判定定理知 $\alpha\perp\beta$,故 B 正确;两个平面都与第三个平面垂直时,易证交线与第三个平面垂直,故 C 正确;两个平面 α,β 垂直时,平面 α 内与交线平行的直线与 β 平行,故 D 错误.

3. D 【解析】当这两点的连线与平面垂直时,可作无数个平面与已知平面垂直;当这两点连线与平面不垂直时,只能作一个平面与已知平面垂直.

4. $\sqrt{13}$

5. ② 【解析】画出示意图,如图,显然,$MP\perp l$,但 MP 不在平面 α 内,故①不正确;②是面面垂直性质定理的推论,正确;③l 可能在平面 α 内,也可能与 α 斜交,故③不正确;④平面 α 是过 P 且与 β 垂直的平面,但 $l\subset\alpha$,而不是 $l\perp\alpha$,故④不正确.



第 5 题图

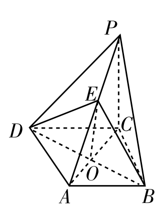
6.【证明】如图,连接 AC,与 BD 交于点 O,连接 EO,则 $EO\parallel PC$. $\because PC=CD=a$,$PD=\sqrt{2}a$,

$\therefore PC^2+CD^2=2a^2=PD^2$,$\therefore PC\perp CD$.

$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$,CD 为交线,

$\therefore PC\perp$ 平面 $ABCD$,$\therefore EO\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $EO\subset$ 平面 EDB,$\therefore$ 平面 $EDB\perp$ 平面 $ABCD$.



第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. B

2. B

3. C

4. C

5. D

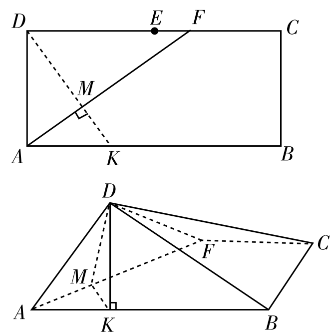
6. C

7. 相等

8. ①③ 【解析】②设 $\alpha\cap\beta=d$,$m\subset\beta$,且 $m\parallel d$ 时,$l\perp m$,故②错,④$l\perp m$ 时,α 与 β 可能相交.

9. (1)③⑤ (2)②⑤

10. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 【解析】如图,过 K 作 $KM\perp AF$ 于 M 点,连结 DM,易得 $DM\perp AF$,与折前的图形对比,可知折前的图形中 D、M、K 三点共线且 $DK\perp AF$,于是 $\triangle DAK\backsim\triangle FDA$,$\therefore \dfrac{AK}{AD}=\dfrac{AD}{DF}$,即 $\dfrac{t}{1}=\dfrac{1}{DF}$,$\therefore t=\dfrac{1}{DF}$. 又 $DF\in(1,2)$,$\therefore t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.



第 10 题图

11.【证明】延长 B_1C_1 到 D,使 $C_1D=B_1C_1$,连结 CD,A_1D. 易得 $BC\underline{\parallel}C_1D$,$\therefore$ 四边形 C_1DCB 为平行四边形.

$\therefore BC_1\parallel CD$. $\because AB_1\perp BC_1$,

$\therefore AB_1\perp CD$.

在 $\triangle A_1B_1D$ 中,$\because B_1C_1=A_1C_1=C_1D$,

$\therefore \angle B_1A_1D=90°$,$\therefore A_1D\perp A_1B_1$.

$\because AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$,$A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore AA_1\perp A_1D$.

$\therefore A_1D\perp$ 平面 A_1B_1BA. $\therefore A_1D\perp AB_1$.

$\because AB_1\perp CD$,$\therefore AB_1\perp$ 平面 A_1CD.

$\therefore AB_1\perp CA_1$.

12.【证明】(1) 连接 PG,BD. 由题知 $\triangle PAD$ 为正三角形,G 是 AD 的中点,$\therefore PG\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PG\perp$ 平面 $ABCD$,$\therefore PG\perp BG$.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形且 $\angle DAB=60°$,

$\therefore \triangle ABD$ 是正三角形,$\therefore BG\perp AD$.

又 $AD\cap PG=G$,$\therefore BG\perp$ 平面 PAD.

(2) 由(1)可知 $BG\perp AD$,$PG\perp AD$.

所以 $AD\perp$ 平面 PBG,所以 $AD\perp PB$.

13.【证明】假设平面 α 与平面 β 平行.

$\because PA\perp$ 平面 α,$\therefore PA\perp$ 平面 β.

又 $PB\perp$ 平面 β,
由线面垂直的性质定理可得 $PA/\!/PB$.
与已知 $PA\cap PB=P$ 矛盾,
$\therefore$ 平面 α 与平面 β 必相交.
$\because PA\perp$ 平面 α, $\therefore PA\perp l$, 同理 $PB\perp l$.
又 $PA\cap PB=P$, $\therefore l\perp$ 平面 PAB.
又 $AB\subset$ 平面 PAB, $\therefore AB\perp l$.

单元评估检测

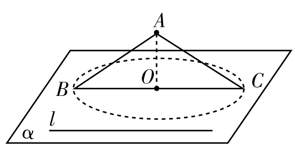
1. B 【解析】$\because$ 点 Q 在直线 b 上,即 $Q\in b$.
又$\because$ 直线 b 在平面 β 内, $\therefore b\subset\beta$, $\therefore Q\in b\subset\beta$. 故选 B.

2. A 【解析】因为 $\alpha\perp\beta$,所以在 β 内可找到一条直线 $m\perp\alpha$,又因为 $l\perp\alpha$,所以 $l/\!/m$. 又因为 $l\not\subset\beta$,所以 $l/\!/\beta$,即①③⇒②;
因为 $l/\!/\beta$,所以过 l 可作一平面 $\gamma\cap\beta=n$,所以 $l/\!/n$,
又因为 $l\perp\alpha$,所以 $n\perp\alpha$,
又因为 $n\subset\beta$,所以 $\alpha\perp\beta$,即①②⇒③.

3. B 【解析】棱台的各条侧棱所在直线相交于一个公共点,而这个公共点在棱台的侧面所在的各个平面内,即这条侧棱所在直线与其他各个侧面所在平面都有一个公共点,故选 B.

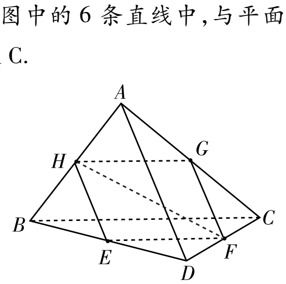
4. B 【解析】因为已知两条不相交的空间直线 a 和 b,所以可以在直线 a 上任取一点 A,则 $A\notin b$. 过 A 作直线 $c/\!/b$,则过 a,c 必存在平面 α 且使得 $a\subset\alpha$,$b/\!/\alpha$.

5. B 【解析】如图,和 α 成 $30°$ 角的直线一定是以 A 为顶点的圆锥的母线所在直线,当 $\angle ABC=\angle ACB=30°$ 时,直线 AC,AB 都满足条件,故选 B.



第 5 题图

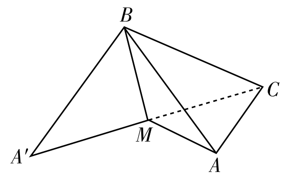
6. C 【解析】如图,显然 AB 与平面 α 相交,且交点 H 是 AB 中点,AB,AC,DB,DC 四条直线均与平面 α 相交. 在 $\triangle BCD$ 中,$EF/\!/BC$,$EF\subset\alpha$,$BC\not\subset\alpha$, $\therefore BC/\!/\alpha$. 同理 $AD/\!/\alpha$, $\therefore$ 在图中的 6 条直线中,与平面 α 平行的直线有 2 条,故选 C.



第 6 题图

7. B 【解析】由题意知三棱锥 A_1-ABC 为正四面体,设棱长为 a,则 $AB_1=\sqrt{3}a$,棱柱的高 $A_1O=\sqrt{a^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$(即点 B_1 到底面 ABC 的距离),故 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{A_1O}{AB_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

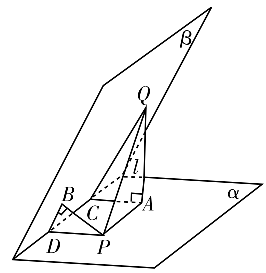
8. C 【解析】如图,由 $A'B=BC=1$,$\angle A'BC=90°$ 知 $A'C=\sqrt{2}$.
$\because M$ 为 $A'C$ 的中点, $\therefore MC=A'M=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且 $CM\perp BM$,$AM\perp BM$,
$\therefore \angle CMA$ 为二面角 $C-BM-A$ 的平面角.
$\because AC=1$,$MC=MA=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle CMA=90°$,故选 C.



第 8 题图

9. D 【解析】由勾股定理得 $a^2+n^2=b^2+m^2=AB^2$.
又 $a>b$, $\therefore m>n$,$\sin\theta=\frac{b}{AB}$,$\sin\varphi=\frac{a}{AB}$,而 $a>b$,
$\therefore \sin\theta<\sin\varphi$,又 θ,φ 均为锐角, $\therefore \theta<\varphi$.

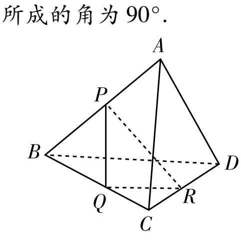
10. C 【解析】如图,分别作 $QA\perp\alpha$ 于 A,$AC\perp l$ 于 C,$PB\perp\beta$ 于 B,$PD\perp l$ 于 D,连接 CQ,BD,则 $CQ\perp l$,$BD\perp l$,



第 10 题图

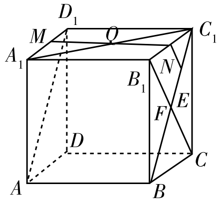
则 $\angle ACQ=\angle PDB=60°$,$AQ=2\sqrt{3}$,$BP=\sqrt{3}$, $\therefore AC=PD=2$.
又 $PQ=\sqrt{AQ^2+AP^2}=\sqrt{12+AP^2}\geqslant 2\sqrt{3}$,
当且仅当 $AP=0$,即点 A 与点 P 重合时,PQ 取得最小值 $2\sqrt{3}$.

11. A 【解析】如图, $\because (\sqrt{5})^2+2^2=3^2$, $\therefore QR^2+PQ^2=PR^2$, $\therefore \angle PQR=90°$, $\because AC/\!/PQ$,$BD/\!/QR$, $\therefore$ 异面直线 AC 与 BD 所成的角就是直线 PQ 与 QR 所成的角, $\therefore$ 直线 AC 与 BD 所成的角为 $90°$.



第 11 题图

12. B 【解析】如图,取 A_1D_1,B_1C_1 的中点 M,N,则 M,O,N 三点共线,$MN/\!/$平面 ABC_1D_1. 连接 B_1C 交 BC_1 于 F 点,作 $NE\perp BC_1$ 于 E 点,则 NE 即为所求,且 $NE\mathrel{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}B_1F=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

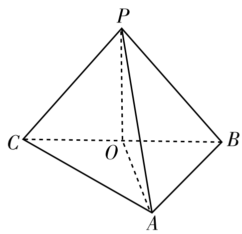


第 12 题图

13. $90°$ 【解析】因为 $C_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $C_1B_1\perp MN$.
又因为 $MN\perp MB_1$，所以 $MN\perp$ 平面 C_1MB_1，
所以 $MN\perp C_1M$，所以 $\angle C_1MN=90°$.

14. ①③ 【解析】由面面平行的性质即知①正确；当 E、F 为棱中点时四边形 BFD_1E 为菱形，但不可能为正方形；命题③显然正确.

15. 垂直 【解析】如图，取 BC 中点 O，连接 AO,PO.
$\because PB=PC$，$\therefore PO\perp BC$.
又 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形，
$\therefore OA=OB$，又 $PA=PB$，
$\therefore \triangle POB\backsim\triangle POA$，
$\therefore \angle POA=\angle POB=90°$，即 $PO\perp OA$，而 $OA\cap BC=O$，
$\therefore PO\perp$ 平面 ABC，
而 $PO\subset$ 平面 PBC，
$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 ABC.

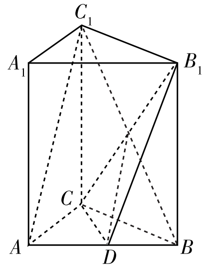


第 15 题图

16. $B_1D_1\perp A_1C_1$ 【解析】由直四棱柱可知 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp B_1D_1$，要使得 $B_1D_1\perp A_1C$，只要 $B_1D_1\perp$ 平面 A_1CC_1，所以只要 $B_1D_1\perp A_1C_1$. 此题还可以填写四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形、正方形等条件.

17. 【证明】$\because AA_1/\!/CC_1$，$\therefore AA_1$、CC_1 确定一个平面 A_1C，显然有 $A_1C\subset$ 平面 A_1C.
又$\because A_1C\cap$ 平面 $BDC_1=O$，$AC\cap BD=M$，
$\therefore$ 点 C_1、O、M 三点在平面 A_1C 内，也在平面 BDC_1 内，从而 C_1、O、M 三点都在这两个平面的交线上，即 C_1、O、M 三点共线.

18. 【证明】(1) $\because C_1C\perp$ 平面 ABC，$\therefore C_1C\perp AC$.
$\because AC=9$，$BC=12$，$AB=15$，易得 $AC\perp BC$.
又 $BC\cap C_1C=C$，易得 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1，
而 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore AC\perp B_1C$.
(2) 如图，连接 BC_1 交 B_1C 于点 O，连接 OD.
$\because O,D$ 分别为 BC_1,AB 的中点，
$\therefore OD/\!/AC_1$.
又 $OD\subset$ 平面 CDB_1，$AC_1\not\subset$ 平面 CDB_1，
$\therefore AC_1/\!/$ 平面 CDB_1.

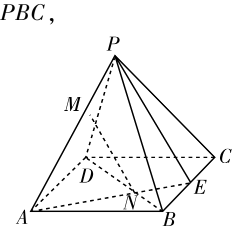


第 18 题图

19. 【解析】(1) $\because$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且其交线为 AC，$PA\perp AC$，$PA\subset$ 平面 PAC，$\therefore PA\perp$ 平面 ABC.
$\because BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$.
又$\because AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，$AB\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，
$\therefore BC\perp$ 平面 PAB. 而 $BC\subset$ 平面 PBC，
$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.
(2) 由(1)得，$BC\perp$ 平面 PAB，
$\therefore BC\perp PB$，即 $\angle PBC=90°$.
由已知 $PC=2$，得 $AC=\sqrt{3}$，$BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
在 Rt$\triangle PBC$ 中，$PB=\sqrt{PC^2-BC^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.
$\therefore \triangle PBC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times PB\times BC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

20. 【解析】(1) 由条件知四边形 $PDAQ$ 为直角梯形.
$\because AQ\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $PDAQ\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AD.
又四边形 $ABCD$ 为正方形，$DC\perp AD$，
$\therefore DC\perp$ 平面 $PDAQ$，$\therefore PQ\perp DC$.
在直角梯形 $PDAQ$ 中可得 $DQ=PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PD$，则 $PQ\perp QD$.
又 $DQ\cap DC=D$，$\therefore PQ\perp$ 平面 DCQ.
(2) 设 $AB=a$.
由题设知 AQ 为棱锥 $Q-ABCD$ 的高，$\therefore$ 棱锥 $Q-ABCD$ 的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}a^3$.
由(1)知 PQ 为棱锥 $P-DCQ$ 的高，而 $PQ=\sqrt{2}a$，$\triangle DCQ$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$，$\therefore$ 棱锥 $P-DCQ$ 的体积为 $V_2=\dfrac{1}{3}a^3$. $\therefore$ 棱锥 $Q-ABCD$ 的体积与棱锥 $P-DCQ$ 的体积的比值为 1.

21. 【解析】(1) 如图，连接 AN，并延长交 BC 于 E 点，连接 PE.
$\because BE/\!/AD$，$\therefore \triangle NBE\backsim\triangle NDA$，$\therefore \dfrac{NB}{ND}=\dfrac{NE}{NA}$.
$\because \dfrac{NB}{ND}=\dfrac{PM}{MA}=\dfrac{5}{8}$，$\therefore \dfrac{PM}{MA}=\dfrac{NE}{NA}$，$\therefore MN/\!/PE$.
又 $MN\not\subset$ 平面 PBC，$PE\subset$ 平面 PBC，
$\therefore MN/\!/$ 平面 PBC.
(2) $\because$ 正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长及侧棱长均为 13，
$\therefore$ 正四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $13^2+4\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times13^2\right)=169+169\sqrt{3}$.



第 21 题图

设 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，则 O 为 AC 与 BD 的交点，

$\therefore PO=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{13^2-\left(\frac{1}{2}\times13\times\sqrt{2}\right)^2}=\frac{13\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ 正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{正方形}ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\times13^2\times\frac{13\sqrt{2}}{2}=\frac{2\ 197\sqrt{2}}{6}$.

$\therefore$ 正四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $169+169\sqrt{3}$，体积为 $\frac{2\ 197\sqrt{2}}{6}$.

22.【解析】(1) 由题意得，$CO\perp AO$，$BO\perp AO$，

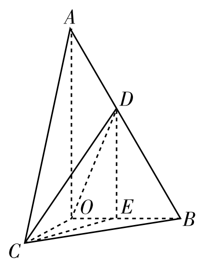
$\therefore\angle BOC$ 是二面角 $B-AO-C$ 的平面角.

又$\because$ 二面角 $B-AO-C$ 是直二面角，$\therefore CO\perp BO$.

又$\because AO\cap BO=O$，$\therefore CO\perp$ 平面 AOB.

又 $CO\subset$ 平面 COD，$\therefore$ 平面 $COD\perp$ 平面 AOB.

(2) 作 $DE\perp OB$，垂足为 E，连接 CE（如图），则 $DE/\!/AO$.



第 22 题图

$\therefore\angle CDE$ 是异面直线 AO 与 CD 所成的角，且 $DE\perp CE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCB$ 中，$CO=BO=2$，$OE=\frac{1}{2}BO=1$，

$\therefore CE=\sqrt{CO^2+OE^2}=\sqrt{5}$.

又 $DE=\frac{1}{2}AO=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\tan\angle CDE=\frac{CE}{DE}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

即异面直线 AO 与 CD 所成角的正切值是 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

(3) 由 (1) 知，$CO\perp$ 平面 AOB，

$\therefore\angle CDO$ 是 CD 与平面 AOB 所成的角，且 $\tan\angle CDO=\frac{CO}{DO}=\frac{2}{DO}$，

$\therefore$ 当 OD 最小时，$\angle CDO$ 最大，

这时，$OD\perp AB$，垂足为 D，

$OD=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\sqrt{3}$，$\tan\angle CDO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即 CD 与平面 AOB 所成角的正切值的最大值是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

第三章　直线与方程

3.1　直线的倾斜角与斜率

第 17 课　倾斜角与斜率

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】任一直线都有倾斜角，但不一定都有斜率，当倾斜角等于 90° 时，斜率不存在；直线的倾斜角由 0° 到 90°，斜率由 0 到 $+\infty$；倾斜角由 90° 到 180°，斜率由 $-\infty$ 到 0，倾斜角越大，斜率不一定越大；直线倾斜角的范围是 $[0^\circ,180^\circ)$. 故只有 D 正确.

2. C

3. C 【解析】直线倾斜角的取值范围是 $[0^\circ,180^\circ)$，又直线 l 经过第二、四象限，所以直线 l 的倾斜角范围是 $(90^\circ,180^\circ)$.

4. -1

5. $-\frac{3}{4}$、$-\frac{3}{4}$

6.【解析】由斜率的定义可知，$k_{AB}=\tan135^\circ=-\tan45^\circ=-1$，由斜率公式可得 $k_{AB}=\frac{a-2}{4-1}=-1$，解得 $a=-1$. 故 a 的值为 -1.

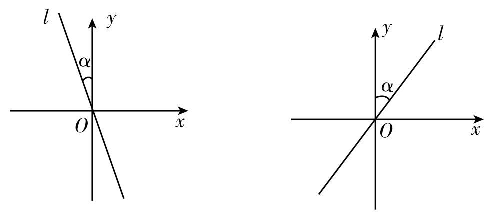
★ 课后作业 ★

1. A

2. B

3. C

4. D 【解析】如图，当 l 向上方向的部分在 y 轴左侧时，倾斜角为 $90^\circ+\alpha$；当 l 向上方向的部分在 y 轴右侧时，倾斜角为 $90^\circ-\alpha$.



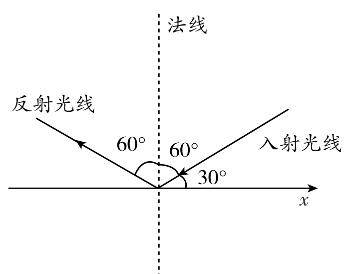
①　　第 4 题图　　②

5. B 【解析】当 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，斜率的取值范围是 $(\sqrt{3},+\infty)$；当 $90^\circ<\alpha<135^\circ$ 时，斜率的取值范围是 $(-\infty,-1)$，故选 B.

【点评】求斜率的范围时，应把倾斜角的范围分成两部分，即 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$ 和 $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

6. B 【解析】$k_{MN}=\frac{4-a}{a+2}=-\frac{1}{2}$，解得 $a=10$.

7. 150° 【解析】作出入射光线和反射光线如图，因为入射光线的倾斜角 $\alpha_1=30^\circ$，所以入射角等于 60°. 又因反射角等于入射角，由图易知，反射光线的倾斜角为 $60^\circ+60^\circ+30^\circ=150^\circ$.



第 7 题图

8. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由 OA 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，知直线 OA 的倾斜角为 30°，由题知所求直线的倾斜角为 150°，故其斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

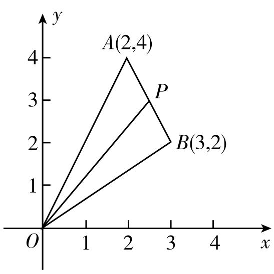
9. $(3,0)$或$(0,-3)$　【解析】由 $k_{PA}=1$,设 x 轴上点 $P(m,0)$,y 轴上点 $P'(0,n)$,由$\frac{0+1}{m-2}=\frac{n+1}{0-2}=1$,得 $m=3$,$n=-3$. 故点 P 坐标为$(3,0)$或$(0,-3)$.

10. 0

11.【解析】由题意,得 $k_{AB}=k_{BC}$,即$\frac{5-1}{3-1}=\frac{7-5}{a-3}$,解得 $a=4$.
所以 a 的值是 4.

12.【解析】设点 $A(a,b)$是直线 l 上的一点,点 A 经过平移后得点 $B(a+3,b-1)$,且点 B 也在直线 l 上,故所求直线的斜率为 $k_{AB}=\frac{b-1-b}{a+3-a}=-\frac{1}{3}$.

13.【解析】联想$\frac{y}{x}$的几何意义,即定义在 $2\leqslant x\leqslant 3$ 上的直线 $y=-2x+8$ 上的点与原点的连线的斜率,结合图象可得最值.



第 13 题图

如图. 由已知,点 $P(x,y)$在 $2\leqslant x\leqslant 3$ 上的直线 $y=-2x+8$ 的线段 AB 上运动,其中 $A(2,4)$,$B(3,2)$,而$\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$,其几何意义为直线 OP 的斜率,由图可知 $k_{OB}\leqslant k_{OP}\leqslant k_{OA}$,而 $k_{OB}=\frac{2}{3}$,$k_{OA}=2$,故所求的$\frac{y}{x}$的最大值为 2,最小值为$\frac{2}{3}$.

第 18 课　两条直线平行与垂直的判定

★ 课堂作业 ★

1. D
2. D
3. B
4. 4
5. $(0,-6)$或$(0,7)$
6.【解析】(1)$\because k_{MN}=\frac{0-(-6)}{-3-(-15)}=\frac{1}{2}$,

$k_{RS}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{0-(-2)}=\frac{1}{2}$,$k_{MN}=k_{RS}$,

$\therefore l_1/\!/l_2$.

(2)$\because k_1=\tan45°=1$,$k_2=\frac{8-5}{-1-2}=-1$,$k_1\cdot k_2=-1$,

$\therefore l_1\perp l_2$.

★ 课后作业 ★

1. D　【解析】对于 A,两条直线的斜率可能不存在;对于 B,两条直线可能平行或重合;对于 C,这条直线可能平行于 y 轴,也可能与 y 轴重合. 故选 D.

2. B　【解析】由题意得 $k_{PQ}=\frac{4-m}{m-(-2)}=1$,解得 $m=1$. 故选 B.

3. D　【解析】设直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,由题意,得 $k_1k_2=-1$. 故 l_1 与 l_2 的位置关系是垂直.

4. B　【解析】$k_{AB}=\frac{1}{3}$,$k_{BC}=-\frac{1}{2}$,$k_{CD}=\frac{1}{3}$,$k_{DA}=-3$.
$\because k_{AB}=k_{CD}$,$k_{BC}\neq k_{DA}$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形.
又$\because k_{AB}\cdot k_{DA}=-1$,$\therefore AB\perp DA$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

5. B　【解析】由 $A(2,0)$在 y 轴上,$C(0,y)$在 x 轴上,知 $OA\perp OC$,又由 O,A,B,C 四点共圆,知$\angle ABC+\angle AOC=180°$,于是 $AB\perp BC$. 由 AB 不与 x 轴或 y 轴平行,知 $k_{AB}k_{BC}=-1$,于是$\frac{4-0}{3-2}\cdot\frac{y-4}{0-3}=-1$,于是 $y=\frac{19}{4}$.

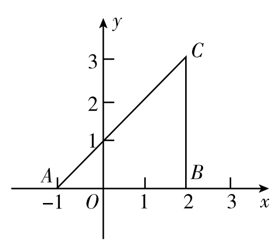
6. 5　$\frac{5}{3}$　【解析】直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{a-2}{2-1}=a-2$,直线 l_1 的斜率 k_1 为 3. 若 $l_1/\!/l_2$,则 $a-2=3$,所以 $a=5$. 若 $l_1\perp l_2$,则$(a-2)\times3=-1$,解得 $a=\frac{5}{3}$.

7. $\frac{2}{3}$　【解析】直线 MN 垂直于 x 轴,斜率不存在,故直线 MP 的斜率为 0,所以 $y=-3$. 故 $\log_8(7+y)=\log_8 4=\frac{2}{3}$.

8. $n+2m-6=0$　【解析】由题意得 $AD\perp BC$,则有 $k_{AD}\cdot k_{BC}=-1$,所以有$\frac{n-2}{m-2}=\frac{4-0}{1-3}$.
所以 $n+2m-6=0$.

9. $(1,0)$或$(2,0)$　【解析】由于点 C 在以 AB 为直径的圆上,故$\angle ACB=90°$,有 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$. 设点 C 坐标为$(x,0)$,由题意可知,$AC\perp BC$,则 $x\neq-1$,$x\neq4$,$k_{AC}=\frac{0-3}{x-(-1)}=\frac{-3}{x+1}$,$k_{BC}=\frac{0-2}{x-4}=\frac{-2}{x-4}$,所以$\frac{-3}{x+1}\cdot\frac{-2}{x-4}=-1$,解得 $x=1$ 或 $x=2$. 所以点 C 坐标为$(1,0)$或$(2,0)$.

10.【解析】画出图形,由图形结合垂直的判定,求得三角形各边高所在直线的斜率.



第 10 题图

如图,由图可知$\triangle ABC$是直角三角形,且 AB 边在 x 轴上,BC 边与 x 轴垂直. 设 AC 边上的高所在直线斜率为 k,$\because k_{AC}=\frac{3-0}{2-(-1)}=1$,
又 $k_{AC}\cdot k=-1$,得 $k=-1$,
$\therefore AB$ 边上的高所在直线斜率不存在,BC 边上的高所在的直线斜率为 0,AC 边上的高所在的直线斜率为 -1.
【点评】当直线垂直于 x 轴时,直线的斜率不存在.

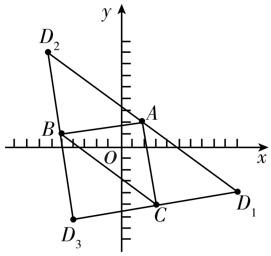
11.【解析】如图,若以 AC 为对角线,则形成平行四边形 $ABCD_1$,设 $D_1(x,y)$,由 $AB/\!/CD_1$,$AD_1/\!/BC$ 得 $k_{AB}=k_{CD_1}$,$k_{BC}=k_{AD_1}$,

即$\begin{cases}\dfrac{2-1}{2-(-5)}=\dfrac{y+5}{x-3},\\ \dfrac{1+5}{-5-3}=\dfrac{y-2}{x-2}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\ y=-4.\end{cases}$

$\therefore D_1(10,-4)$.

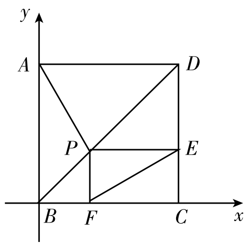
同理,以 AB 为对角线时,得 $D_2(-6,8)$;以 BC 为对角线时,得 $D_3(-4,-6)$.



第 11 题图

12.【证明】如图,以 B 为原点,以 BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,设正方形的边长为 1,则可以设 P 点坐标为 $(x,x)(0<x<1)$.

则 $A(0,1)$,$E(1,x)$,$F(x,0)$.



第 12 题图

$\because k_{PA}=\dfrac{1-x}{0-x}=\dfrac{x-1}{x}$,$k_{EF}=\dfrac{x}{1-x}$,$\therefore k_{PA}\cdot k_{EF}=-1$.

$\therefore PA\perp EF$.

3.2 直线的方程

第 19 课 直线的点斜式方程

★ 课堂作业 ★

1. D
2. C
3. A
4. $y=2x+7$
5. $5\sqrt{2}$
6. (1)$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$;(2)$x=1$;(3)$y=-x-5$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】由直线的点斜式方程可得这条直线经过的已知点为(4,3),斜率为$\sqrt{3}$,故其倾斜角为 60°. 故选 A.

2. C 【解析】因为斜截式方程 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距为 b,所以在 y 轴上截距是 2 的直线方程为 $y=kx+2$. 故选 C.

3. C 【解析】函数 $y=kx+b$ 是一次函数,必须满足“$k\neq0$”和“k,b 均为常数”两个限制条件,即 k 必须是具体的、确定的数. 所以 M 中不包括与 x 轴平行、与 x 轴重合、与 y 轴平行、与 y 轴重合的直线. 而 N 包含平面直角坐标系中的所有直线,故选 C.

4. B 【解析】由斜率存在的两直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与 $y_2=k_2x+b_2$ 平行$\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$ 可得 $k=2$ 且 $b\neq3$.

5. D 【解析】因为直线 $y+1=m(x-2)$ 对于任何 $m\in\mathbf{R}$ 都成立,所以$\begin{cases}x-2=0,\\ y+1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$故选 D.

6. C 【解析】当 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的图形近似地看成线段时,$f(c)$是此线段上横坐标为 c 的点的纵坐标. 此时线段斜率为$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,于是此线段所在的直线方程即为 $f(x)-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,将 $x=c$ 代入方程得到 $f(c)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$.

7. 2 【解析】设直线的斜率为 k,则直线的方程是 $y-1=k(x-1)$,则 $k\neq0$. 令 $x=0$,得 $y=1-k$;

令 $y=0$,得 $x=1-\dfrac{1}{k}$.

所以此直线与坐标轴围成的三角形的面积

$S=\dfrac{1}{2}|1-k|\cdot|1-\dfrac{1}{k}|=\dfrac{(1-k)^2}{2|k|}$,

所以$\dfrac{(1-k)^2}{2|k|}=1$,此方程有两个解.

8. $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+5$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-5$

9. $x-2y-3=0$ 【解析】由题意可知直线 $AN\perp l$,且 l 过 $N(1,-1)$,

$\because k_{AN}=\dfrac{3-(-1)}{-1-1}=-2$,$\therefore l$ 的斜率为$\dfrac{1}{2}$,

由点斜式方程可知 l 的方程为 $y+1=\dfrac{1}{2}(x-1)$,

即 $x-2y-3=0$.

10. $y=3x-9$ 【解析】根据直线 $y=kx+b$ 的平移规律,可得直线 l_2 的方程为 $y=3(x-4)+5-2$,即 $y=3x-9$.

11.【解析】据题意,直线 l 与两坐标轴不垂直,否则不能构成三角形,设其斜率为 $k(k\neq0)$,则 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$,令 $x=0$ 得 $y=2k+3$,令 $y=0$ 得 $x=-\dfrac{3}{k}-2$,

于是直线与两坐标轴围成的三角形面积为

$\dfrac{1}{2}\left|(2k+3)\left(-\dfrac{3}{k}-2\right)\right|=4$,

即$(2k+3)\left(\dfrac{3}{k}+2\right)=\pm8$.

若$(2k+3)\left(\dfrac{3}{k}+2\right)=8$,则整理得 $4k^2+4k+9=0$. 无解;若$(2k+3)\left(\dfrac{3}{k}+2\right)=-8$,则整理得 $4k^2+20k+9=0$,解之得 $k=-\dfrac{1}{2}$或 $k=-\dfrac{9}{2}$,

$\therefore l$ 的方程为 $y-3=-\dfrac{1}{2}(x+2)$或 $y-3=-\dfrac{9}{2}\cdot(x+2)$,

即 $x+2y-4=0$ 或 $9x+2y+12=0$.

12.【解析】由已知易得点 $P(3,4)$.

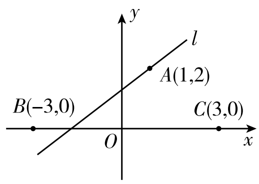
直线 $x-y+1=0$ 可化为 $y=x+1$,其斜率为 1,倾斜角为 45°,

$\therefore$ 直线 l 的倾斜角为 $45°+90°=135°$,斜率为 -1,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-4=-(x-3)$.

13.【解析】如图,$B(-3,0)$,$C(3,0)$,由题意可知直线 AB、AC 在

y 轴上的截距分别为 $\frac{3}{2}$ 和 3. 由于直线 l 与 x 轴的交点在 $(-3,0)$ 和 $(3,0)$ 两点的范围内,即直线 l 与线段 BC(不包括端点 B,C)相交,$\therefore b<\frac{3}{2}$ 或 $b>3$. 故直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup(3,+\infty)$.



第 13 题图

第 20 课　直线的两点式方程

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】由于 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$ 与 $y-y_1=k(x-x_1)$ 两式并不等价(前者不允许 $x=x_1$),故方程 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$ 是表示过 $P(x_1,y_1)$ 且斜率为 k 但不含 P 点的直线. 排除 A. 而对于 B、C 而言,只要分别取 y 轴及过原点的直线就可以排除 B、C. 故选 D. 事实上,$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ 是直线两点式的变形,且包含了 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$ 的情形. 故 D 是正确的.

2. B 【解析】过两点 $(2,5)$、$(0,3)$ 的直线方程是 $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-0}{2-0}$,整理,得 $y=x+3$.

3. A 【解析】直线的两点式方程为 $\frac{y-1}{9-1}=\frac{x+1}{3+1}$,整理,得 $2x-y+3=0$. 令 $y=0$,得 $x=-\frac{3}{2}$,即直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{3}{2}$.

4. $x+4y-19=0$ 【解析】线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{2+4}{2},\frac{0+8}{2}\right)$,即 $(3,4)$. 又 $k_{AB}=\frac{8-0}{4-2}=4$,所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{4}$,且过点 $(3,4)$,故其直线方程为 $y-4=-\frac{1}{4}(x-3)$,整理,得 $x+4y-19=0$.

5. $x+y=1$ 或 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$ 【解析】设直线 l 在 x 轴上的截距为 a,则 l 在 y 轴上的截距为 $2-a$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{2-a}=1$.

又 $\because$ 直线 l 经过点 $(-2,3)$,

$\therefore \frac{-2}{a}+\frac{3}{2-a}=1$,解得 $a=1$ 或 $a=-4$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x+y=1$ 或 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$.

6.【解析】设 $A(-2,2)$ 关于 $y=2x-1$ 的对称点为 $A'(x_0,y_0)$,

则 $\begin{cases}\frac{y_0-2}{x_0+2}=-\frac{1}{2},\\ \frac{2+y_0}{2}=2\cdot\frac{-2+x_0}{2}-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\frac{18}{5},\\ y_0=-\frac{4}{5}.\end{cases}$

$\therefore A'\left(\frac{18}{5},-\frac{4}{5}\right)$,$\therefore A'B$ 的方程为 $\frac{y+1}{-\frac{4}{5}+1}=\frac{x+3}{\frac{18}{5}+3}$,

即 $x-33y-30=0$. 由 $\begin{cases}x-33y-30=0,\\ y=2x-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{3}{65},\\ y=-\frac{59}{65}.\end{cases}$

$\therefore P$ 点坐标是 $\left(\frac{3}{65},-\frac{59}{65}\right)$.

★ 课后作业 ★

1. B

2. D 【解析】$\because a\neq b$,$\therefore$ 由斜率公式可得 $k=\frac{b-a}{a-b}=-1$,$\therefore$ 倾斜角为 $135°$.

3. D

4. C 【解析】设直线在 x 轴,y 轴上的截距为 a.

①当 $a=0$ 时,直线过原点,$k=\frac{2-0}{-1-0}=-2$,

$\therefore$ 直线方程为 $y=-2x$.

②当 $a\neq0$ 时,设为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$,

$\because l$ 过 $A(-1,2)$,

$\therefore \frac{-1}{a}+\frac{2}{a}=1$,解得 $a=1$.

$\therefore$ 直线方程为 $x+y=1$,即 $x+y-1=0$.

综上,满足条件的直线方程为 $y=-2x$ 和 $x+y-1=0$,共 2 条.

5. D 【解析】由 $ax+by-1=0$ 得 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$,$\therefore \frac{1}{b}=-1$;由 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 得 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$,倾斜角为 $60°$,故 $-\frac{a}{b}=\tan(2\times60°)=-\sqrt{3}$,$\therefore b=-1,a=-\sqrt{3}$.

6. B 【解析】若 $m>0,n>0$ 时,两直线均经过第一、三、四象限,若 $m<0,n<0$ 时,两直线均经过第一、二、三象限,若 $mn<0$ 时,一直线经过第一、二、四象限,另一直线经过第二、三、四象限.

7. $x-y-5=0$

8. $8x+5y+20=0$ 或 $2x+5y-10=0$

9. $4x+3y=0$ 或 $x-y+7=0$

10. $[-2,0)\cup(0,2]$ 【解析】直线与两坐标轴的交点分别为 $\left(0,\frac{b}{2}\right)$ 和 $(-b,0)$,

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\left|\frac{b}{2}\right|\cdot|-b|=\frac{b^2}{4}$. 由 $\frac{b^2}{4}\leqslant1$,得 $b\in[-2,2]$. 又 $\because$ 直线不能过原点,$\therefore b\neq0$.

11.【解析】直线 AB 的方程为 $\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-0}{-2-0}$,

整理得 $x+y-4=0$.

直线 AC 的方程为$\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-0}{-8-0}$,整理得 $x-2y+8=0$.

直线 BC 的方程为$\frac{y-0}{6-0}=\frac{x+8}{-2+8}$,整理得 $x-y+8=0$.

12.【解析】设直线 l 在 x 轴上的截距为 a,则由题意得其在 y 轴上的截距为 $2a$,故直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$. 将点 $P(4,3)$ 代入直线方程得 $a=\frac{11}{2}$,所以直线 l 的方程为 $2x+y-11=0$.

13.【解析】光线的反射问题,需转化为对称问题来解决.

解:因为点 $A(-3,4)$ 关于 x 轴的对称点 $A_1(-3,-4)$ 在经 x 轴反射的光线上,同样点 $A_1(-3,-4)$ 关于 y 轴的对称点 $A_2(3,-4)$ 在经过 y 轴的反射光线上. 由两点式得所求直线方程为$\frac{y-6}{-4-6}=\frac{x+2}{3+2}$,

即 $2x+y-2=0$.

第 21 课 直线的一般式方程

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】将直线化为斜截式方程为 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. 因为 $ab>0,ac<0$,所以 $-\frac{a}{b}<0,-\frac{c}{b}>0$,所以直线不过第三象限.

2. B 【解析】将方程变形为 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$,则 $k=-\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

3. B 【解析】方程$\frac{y-3}{x-2}=1$ 表示直线 $y=x+1$(除去点(2,3)).

4. $x+2y-3=0$ 【解析】直线 $x+2y-\sqrt{3}=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,故所求直线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,整理,得 $x+2y-3=0$.

5. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6}\pi,\pi\right)$ 【解析】因为直线的斜率 $k=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}$,而 $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$,所以 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$. 则倾斜角的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6}\pi,\pi\right)$.

6.【解析】∵ 直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 -3 和 4,

∴ 直线 $mx+ny+12=0$ 经过点 $(-3,0)$,$(0,4)$.

∴ $\begin{cases}-3m+12=0,\\4n+12=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=4,\\n=-3.\end{cases}$

★ 课后作业 ★

1. D

2. A 【解析】若直线 $Ax+By+C=0$ 与两坐标轴都相交,则直线的斜率存在且不为 0,即 A,B 都不为 0,故选 A.

3. B 【解析】因为 $\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin\theta\cdot(-\cos\theta)=0$,所以两直线垂直.

4. C 【解析】当已知方程不表示某一直线方程时,则 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\2-a=0,\end{cases}$ 即 $a=2$. ∴ 当 $a\neq2$ 时,已知方程表示直线方程.

5. C 【解析】由 $a-b+c=0$,得 $c=b-a$,故 $ax+by+c=0$ 可化为 $a(x-1)+b(y+1)=0$,所以该直线必经过的一个定点是$(1,-1)$.

6. A 【解析】直线 $x+y=0,x-y=0$ 都经过原点,而无论 a 取何值,$x+ay-3=0$ 都不经过原点,因此,要满足三条直线构成三角形,只需直线 $x+ay-3=0$ 与另外两条直线不平行,所以 $a\neq\pm1$.

7. $2x+3y-8=0$ 【解析】设与 $3x-2y+1=0$ 垂直的直线方程为 $2x+3y+b=0$,将(1,2)代入方程得 $b=-8$,

∴ 直线 l 的方程为 $2x+3y-8=0$.

8. 3 【解析】由题知,$a(a-1)-2\times3=0$,

解得 $a=-2$ 或 $a=3$,

当 $a=-2$ 时,

两直线重合,舍去,故 $a=3$.

9. $\frac{3}{2}$ 【解析】由 $1\times m+(1-m)\times3=0$,解得 $m=\frac{3}{2}$.

10. $(-2,3)$

11.【解析】(1)线段 AB,AC 的中点坐标分别为$\left(\frac{7}{2},1\right)$,$\left(-\frac{1}{2},-2\right)$,由两点式可得平行于 BC 的中位线所在直线方程为$\frac{y-1}{-2-1}=\frac{x-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}$. 化成一般式方程为 $6x-8y-13=0$.

(2)BC 的中点坐标为(2,3),故 BC 边上中线所在直线方程为$\frac{y+4}{3+4}=\frac{x-1}{2-1}$,其一般式方程为 $7x-y-11=0$,斜截式方程为 $y=7x-11$.

∵ $k_{BC}=\frac{6-0}{6+2}=\frac{3}{4}$,∴ BC 边上的高所在的直线的斜率为 $-\frac{4}{3}$,由点斜式得方程为 $y+4=-\frac{4}{3}(x-1)$,其一般式方程为 $4x+3y+8=0$,斜截式方程为 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

12.【解析】∵ 直线与 y 轴平行,∴ $m^2+3m+2=0$,解得 $m=-1$或 $m=-2$. 当 $m=-2$ 时,直线方程$(m+2)x+(m^2+3m+2)y=m+2$ 为 $0\cdot x+0\cdot y=0$,它不表示直线,应舍去. 故当 $m=-1$ 时,直线与 y 轴平行.

13.【解析】由 $ax+y-1=0$,得 $y=-ax+1$,即函数 $f(x)=-ax+1$在区间$(-1,1)$上的图象与 x 轴总有交点,故$f(-1)\cdot f(1)<0$,即$(a+1)\cdot(-a+1)<0$,解得 $a>1$ 或 $a<-1$. 即 a 的取值范围是 $a>1$ 或 $a<-1$.

3.3 直线的交点坐标与距离公式

第 22 课 两条直线的交点坐标

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】A 中直线与 $x+y-1=0$ 重合,C、D 中的直线

都与 $x+y-1=0$ 平行,故选 B.

2. C 【解析】令 $x=0$,分别代入两个方程,得 $\frac{m}{3}=\frac{12}{m}$,所以 $m=\pm 6$.

3. C 【解析】由已知,得 l_1 与 l_2 相交,三条直线若有两个交点,则 l_3 必与 l_1 或 l_2 平行. 当 $l_3 /\!/ l_1$ 时,$a=1$;当 $l_3 /\!/ l_2$ 时,$a=-2$,故选 C.

4. $(10,-15)$ 【解析】由 $2m-3n=1$,得 $m=\frac{3n+1}{2}$. 代入直线方程并整理,得 $(3x+2y)\cdot n+x-10=0$. 要使其必过定点,则 $3x+2y=0$,$x-10=0$,解得 $x=10$,$y=-15$.

5. -2 4 【解析】直线 $4x+3y-10=0$ 和 $2x-y-10=0$ 的交点为 $(4,-2)$. 代入 $ax+by+16=0$,得 $4a-2b+16=0$. 又直线 $ax+by+16=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$,所以 $b=-2a$. 联立方程组,解得 $a=-2$,$b=4$.

6.【解析】若认为 a 为已知数,则两直线方程已知,可联立方程组得到交点坐标,再由交点在第四象限,满足 $x>0$,$y<0$,建立不等式组可得 a 的取值范围.

解:由方程组 $\begin{cases}5x+4y=2a+1,\\2x+3y=a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2a+3}{7},\\y=\frac{a-2}{7}.\end{cases}$

即两直线交点坐标为 $\left(\frac{2a+3}{7},\frac{a-2}{7}\right)$.

$\because$ 交点位于第四象限,$\therefore \begin{cases}\frac{2a+3}{7}>0,\\\frac{a-2}{7}<0.\end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2}<a<2$.

$\therefore$ a 的取值范围为 $-\frac{3}{2}<a<2$.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】解方程组 $\begin{cases}3x+5y-1=0,\\4x+3y-5=0\end{cases}$ 可得交点 $(2,-1)$.

2. C 【解析】l_1 与 l_2 交点为 $\left(-\frac{19}{7},\frac{3}{7}\right)$,故所求直线方程为 $3x+19y=0$.

3. B

4. C 【解析】设 $N(x,1+x)$,

则有 $\frac{1+x-(-1)}{x-0}\cdot\frac{-1}{2}=-1$,

$\therefore x=2$,则 $N(2,3)$.

5. A

6. D 【解析】$y=2x-4$ 与 $y=\frac{1}{2}x+2$ 的交点为 $(4,4)$,则 $(4,4)$ 必在 l 上,又由数形结合知有两条直线符合题意. 故选 D.

7. $x+6y=0$ 【解析】由已知,当斜率存在时,可设直线方程为 $y=kx$,

由 $\begin{cases}y=kx,\\4x+y+6=0\end{cases}$ 得 $x=-\frac{6}{k+4}$,

由 $\begin{cases}y=kx,\\3x-5y-6=0\end{cases}$ 得 $x=\frac{6}{3-5k}$,

由已知可得 $-\frac{6}{k+4}+\frac{6}{3-5k}=0$,

$\therefore k=-\frac{1}{6}$,$\therefore$ 所求方程为 $y=-\frac{1}{6}x$,

即 $x+6y=0$.

当斜率不存在时,不合题意.

8. $5x-7y=0$ 【解析】由方程组 $\begin{cases}x-2y+3=0,\\3x-4y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=7,\\y=5,\end{cases}$

所以过交点 $(7,5)$ 与原点的直线方程为 $y=\frac{5}{7}x$,

即 $5x-7y=0$.

9. 20 【解析】由两直线垂直知斜率之积为 -1,

即 $-\frac{m}{4}\times\frac{2}{5}=-1\Rightarrow m=10$.

$\because$ 点 $(1,p)$ 在两直线上,

$\therefore 10+4p-2=0$,

$2-5p+n=0$.

解得 $p=-2$,$n=-12$. 故 $m-n+p=20$.

10. $\left(\frac{2}{7},1\right)$

11.【解析】(1) 设点 $A(x,y)$,

则 $\begin{cases}8x+9y-3=0,\\\frac{y+3}{x+1}\cdot\frac{1}{3}=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

故点 A 的坐标为 $(-3,3)$.

(2) 设点 $C(m,n)$,

则 $\begin{cases}m-3n-1=0,\\8\cdot\frac{m-1}{2}+9\cdot\frac{n-3}{2}-3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=4,\\n=1,\end{cases}$ 故 $C(4,1)$,

又因为 $A(-3,3)$,所以直线 AC 的方程为 $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-4}{-3-4}$,即 $2x+7y-15=0$.

12.【解析】(1) 设 $P_1(x,y)$,由于 P_1 和 P 关于直线 l 对称,所以线段 PP_1 的中点在直线 l 上,且 $PP_1\perp l$,于是有

$\begin{cases}k_{PP_1}=\frac{3-y}{2-x}=1,\\\frac{x+2}{2}+\frac{y+3}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4,\\y=-3,\end{cases}$

即点 P_1 的坐标为 $(-4,-3)$.

(2) 由光的反射原理可知,P_1 与 Q 的连线即为反射光线,则反射光线的方程为 $4x-5y+1=0$.

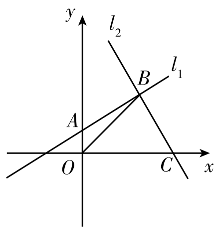
再求反射光线与直线 l 的交点,解方程组

$\begin{cases}4x-5y+1=0,\\x+y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{2}{3},\\y=-\frac{1}{3},\end{cases}$

所以入射点为点 $M\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，点 P、M 的连线即为入射光线，则入射光线的方程为 $5x-4y+2=0$.

13.【解析】如图所示，直线 l_1 可变形为：$a(x-2)-2(y-2)=0$，

$\therefore x-2=0$ 且 $y-2=0$，$x=y=2$. 即 l_1 过定点 $B(2,2)$. 直线 l_2 可变形为：$2x-4+a^2(y-2)=0$，$\therefore 2x-4=0$ 且 $y-2=0$，$x=y=2$，即 l_2 过定点 $B(2,2)$. 又 $\because l_1$ 与 y 轴交于点 $A(0,2-a)$，



第 13 题图

l_2 与 x 轴交于点 $C(a^2+2,0)$，则四边形 $OABC$ 的面积 $S=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}(2-a)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(a^2+2)\cdot 2=a^2-a+4=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$. $\therefore$ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，S 取最小值 $\frac{15}{4}$，即四边形 $OABC$ 面积最小时 a 的值为 $\frac{1}{2}$.

第 23 课　两点间的距离

★ 课堂作业 ★

1. C

2. C 【解析】由两点间的距离公式知

$|AB|=\sqrt{(-1-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{b^2-2b+10}$，

由 $5=\sqrt{b^2-2b+10}$，

解得 $b=-3$ 或 $b=5$.

3. A

4. $\sqrt{2}$ 【解析】$\because$ 直线 AB 与直线 $y=x$ 平行，故斜率相等，

即 $\frac{b-a}{5-4}=1$，$\therefore b-a=1$，

$\therefore |AB|=\sqrt{(5-4)^2+(b-a)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

5. $2\sqrt{6}$ 【解析】$|BD|=\frac{1}{2}|BC|=2$，

$|AD|=\sqrt{(5-3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理求得腰长 $|AB|=\sqrt{|AD|^2+|BD|^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$.

6.【解析】由点 P 在直线 $4x+y-2=0$ 上，先设出 P 点坐标，再利用两点间距离公式，代入 $|PA|=|PB|$，求出 P 点坐标.

解：$\because P$ 在直线 l：$4x+y-2=0$ 上，$\therefore$ 设 $P(a,2-4a)$.

又 $A(4,-3)$，$B(2,-1)$，且 $|PA|=|PB|$，

$\therefore |PA|^2=|PB|^2$，

$\therefore (a-4)^2+(5-4a)^2=(a-2)^2+(3-4a)^2$，

$\therefore a=\frac{7}{5}$，则 $2-4a=-\frac{18}{5}$，

$\therefore P\left(\frac{7}{5},-\frac{18}{5}\right)$.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】$|AB|=\sqrt{(-4-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{10}$，中点坐标为 $\left(\frac{2-4}{2},\frac{3+1}{2}\right)$，即 $(-1,2)$，故选 C.

2. D 【解析】设 $Q(x,0)$，则 $|PQ|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}=\sqrt{x^2-2x+5}=2\sqrt{2}$，所以 $x^2-2x+5=8$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$. 所以 $Q(-1,0)$ 或 $Q(3,0)$.

3. C 【解析】由题意可得甲、乙两船的坐标分别为 $(50,30)$，$(14,-18)$，

$\therefore$ 甲、乙两船距离为

$\sqrt{(50-14)^2+(30+18)^2}=60$（公里）.

4. B 【解析】根据两点间的距离公式

$|PQ|=\sqrt{(m-1)^2+(1-2m)^2}=\sqrt{5m^2-6m+2}>\sqrt{10}\Rightarrow 5m^2-6m-8>0\Rightarrow m<-\frac{4}{5}$ 或 $m>2$.

5. C

6. D 【解析】把条件等式变形整理为：

$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{(c-0)^2+(d-0)^2}$，

其意义为点 $M(a,b)$ 和 $N(c,d)$ 到原点 $(0,0)$ 的距离相等.

7. $2\sqrt{2}$　$x+y-4=0$

8. $(1\pm\sqrt{3},0)$

9. $24x-7y-64=0$ 或 $4x-3y+4=0$ 【解析】$\because P$ 在直线 $2x-y=0$ 上，

$\therefore$ 可设 $P(x_0,2x_0)$，$|PM|=5$，

即 $\sqrt{(x_0-5)^2+(2x_0-8)^2}=5$，

解得 $x_0=\frac{32}{5}$ 或 $x_0=2$.

$\therefore P\left(\frac{32}{5},\frac{64}{5}\right)$ 或 $P(2,4)$，

$\therefore$ 直线 PM 的方程为 $\frac{y-8}{\frac{64}{5}-8}=\frac{x-5}{\frac{32}{5}-5}$ 或 $\frac{y-8}{4-8}=\frac{x-5}{2-5}$，

即 $24x-7y-64=0$ 或 $4x-3y+4=0$.

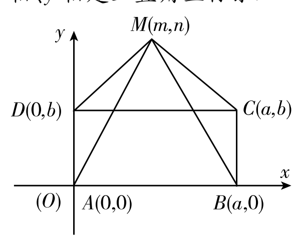
10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$|PO|=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$

$=\sqrt{x^2+x^2-2x+1}$

$=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.【解析】以一个直角所在的两边为坐标轴，建立直角坐标系.

证明：如图，取长方形 $ABCD$ 的两条边 AB、AD 所在的直线分别为 x 轴、y 轴建立直角坐标系.



第 11 题图

设长方形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(0,0)$、$B(a,0)$、$C(a,b)$、$D(0,b)$. 在平面上任取一点 $M(m,n)$，

则有 $AM^2+CM^2=m^2+n^2+(m-a)^2+(n-b)^2$，

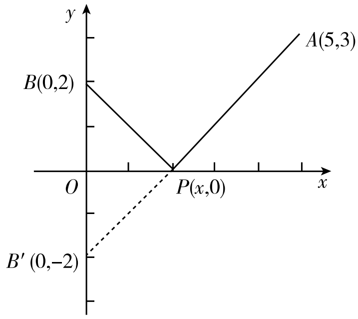
$BM^2+DM^2=(m-a)^2+n^2+m^2+(n-b)^2$，

$\therefore AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.

12.【解析】$f(x)=\sqrt{(x-5)^2+3^2}+\sqrt{(x-0)^2+2^2}$.

设 $A(5,3)$、$B(0,2)$、$P(x,0)$，则由两点间距离公式知 $f(x)=|PA|+|PB|$. 即在 x 轴上找一点 P 到两定点 A、B 的距离之和最小. 如图，点 $B(0,2)$ 关于 x 轴的对称点为 B'

$(0,-2)$. 则有 $f(x)=|PA|+|PB|=|PA|+|PB'|\geqslant |AB'|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$. $\therefore f(x)$ 的最小值为 $5\sqrt{2}$.



第 12 题图

第 24 课　点到直线的距离、两条平行直线间的距离

★ 课堂作业 ★

1. B　【解析】即求点 O 到直线 l 的距离, $d=\frac{|4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$.

2. C　【解析】l_1 的方程可化为 $6x+8y-4=0$, 则 $d=\frac{|-4-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{9}{10}$, 故选 C.

3. C

4. -3 或 $\frac{3}{7}$

5. $\sqrt{3}x+y\pm 10=0$　【解析】l 与直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 垂直, 可设其方程为 $\sqrt{3}x+y+c=0$, 所以 $\frac{|c|}{\sqrt{3+1}}=5$, 所以 $c=\pm 10$.

6.【解析】设所求直线的方程为 $x-y+b=0(b\neq -2)$, 则由两平行线间的距离公式可得 $\frac{|b+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, 解得 $b=0$ 或 $b=-4$.
$\therefore$ 所求直线的方程为 $x-y=0$ 或 $x-y-4=0$.

★ 课后作业 ★

1. C　【解析】由点到直线的距离公式, 得 $d=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. B　【解析】$d=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

3. D　【解析】因为直线 $3x+2y-3=0$ 与 $6x+my+1=0$ 平行, 所以 $m=4$, 所以 $6x+my+1=0$ 即为 $6x+4y+1=0$, 可化为 $3x+2y+\frac{1}{2}=0$, 所以两条平行直线 $3x+2y-3=0$ 与 $3x+2y+\frac{1}{2}=0$ 的距离 $d=\frac{\left|-3-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

4. A　【解析】因为线段与 x 轴平行, 它的一个端点为 $A(2,3)$, 所以设另一个端点为 $(m,3)$. 因为线段长为 5, 所以 $|m-2|=5$, 所以 $m=-3$ 或 $m=7$.

5. D　【解析】$d=\frac{|2\times 5-12k+6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=4$, $\therefore k=-3$ 或 $\frac{17}{3}$.

6. A　【解析】设所求集合中的任一点为 (x,y), 则 $\frac{|3x+2y-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3x+2y+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}$, $\therefore |3x+2y-4|=|3x+2y+8|$, 将 $3x+2y$ 看做一个整体, 得 $3x+2y+2=0$.

7. 3　【解析】$3x+4y-12=0$ 可化为 $6x+8y-24=0$, $\therefore d=\frac{|-24-6|}{\sqrt{6^2+8^2}}=3$.

8. $\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$　【解析】由点 P 在直线 $x+3y=0$ 上, 可设 P 点坐标为 $\left(a,-\frac{a}{3}\right)$, 则 $\sqrt{a^2+\left(-\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{\left|a-3\times\frac{a}{3}-2\right|}{\sqrt{1^2+3^2}}$, 解得 $a=\pm\frac{3}{5}$. 所以 P 点的坐标为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

9. $3x+4y-20=0$　8　【解析】设与直线 $3x+4y+20=0$ 平行的直线 l 的方程为 $3x+4y+m=0$. 令 $x=0$, 得 $y=-\frac{m}{4}$. 令 $y=0$, 得 $x=-\frac{m}{3}$. 因为 $\left|-\frac{m}{4}\right|+\left|-\frac{m}{3}\right|+\sqrt{\left(-\frac{m}{4}\right)^2+\left(-\frac{m}{3}\right)^2}=20$, 所以 $|m|=20$, 所以 $m=-20$ 或 $m=20$(舍去), 所以直线 l 的方程为 $3x+4y-20=0$, 直线 l 与 $3x+4y+20=0$ 之间的距离 $d=\frac{40}{5}=8$.

10. 5　【解析】 $f(x,y)$ 表示点 (x,y) 与点 $(2,0)$ 的距离和与点 $(-1,4)$ 的距离之和, $f(x,y)$ 的最小值即为 $(2,0)$ 与 $(-1,4)$ 之间的距离, 所以 $f(x)_{\min}=\sqrt{(2+1)^2+(0-4)^2}=5$.

11.【解析】设出经过两条直线交点的直线系方程, 然后利用点到直线的距离为 5, 即可求出所求直线的方程.
解: 设经过直线 l_1 与 l_2 交点的直线方程为 $(x-3y-4)+\lambda(4x+3y-6)=0$, 即 $(1+4\lambda)x+(-3+3\lambda)y-4-6\lambda=0$.
由点 $(-3,1)$ 到直线的距离为 5,
得 $\frac{|-3(1+4\lambda)+1\times(-3+3\lambda)-4-6\lambda|}{\sqrt{(1+4\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2}}=5$,
解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\frac{3}{8}$.
当 $\lambda=1$ 时, 直线方程为 $x=2$.
当 $\lambda=\frac{3}{8}$ 时, 直线方程为 $4x-3y-10=0$.
综上可知, 所求直线方程为 $x=2$ 或 $4x-3y-10=0$.

12.【解析】由题意知, 直线 l 的斜率存在, 设其斜率为 k.
因为直线 l 过点 $P(2,-5)$,
所以直线 l 的方程为 $y+5=k(x-2)$, 即 $kx-y-2k-5=0$.
点 A 到直线 l 的距离 $d_1=\frac{|3k-(-2)-2k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$.
点 B 到直线 l 的距离 $d_2=\frac{|k\cdot(-1)-6-2k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3k+11|}{\sqrt{k^2+1}}$.

又因为 $d_1:d_2=1:2$,所以$\dfrac{|k-3|}{|3k+11|}=\dfrac{1}{2}$.

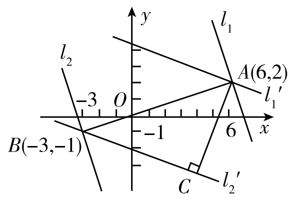
解得 $k_1=-1,k_2=-17$.

所以直线 l 的方程为 $x+y+3=0$ 或 $17x+y-29=0$.

【点评】(1)在利用点斜式求直线方程时,要注意讨论斜率 k 是否存在,防止漏解.(2)求点到直线的距离注意首先把直线方程化为一般式方程,再用公式求解.

13.**【解析】**(1)作图分析出 d 取得最值的情形,利用几何法求取值范围;(2)求出 d 取最大值时斜率的值,即可求出所求直线的方程.

解:(1)如图,分别过点 $A(6,2)$,$B(-3,-1)$作两条相互平行且垂直于 AB 的直线 l_1,l_2,此时直线 l_1 与 l_2 之间的距离为$|AB|$.再分别过点 $A(6,2)$,$B(-3,-1)$过 A 作两条相互平行的直线 l_1',l_2',过 A 作 AC 垂直于 l_2',垂足为 C.



第 13 题图

在 Rt$\triangle ABC$ 中,显然$|AC|<|AB|$,由此可得分别过 A,B 的所有平行线间的距离 $d\leqslant|AB|=\sqrt{(6+3)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{10}$. 又当过点 A,B 的两条平行线接近重合时,距离最小,所以 $0<d\leqslant3\sqrt{10}$.

(2)由(1),知当 d 取最大值时,过点 $A(6,2)$,$B(-3,-1)$的两条相互平行的直线垂直于 AB.因为 $k_{AB}=\dfrac{-1-2}{-3-6}=\dfrac{1}{3}$,所以这两条相互平行的直线的斜率为 -3,其直线方程分别为 $y-2=-3(x-6)$,$y+1=-3(x+3)$,即 $3x+y-20=0$,$3x+y+10=0$.

单元评估检测

1. D **【解析】**由题意 $k=\tan 45°=1$,$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-2=1\cdot(x+1)$,即 $x-y+3=0$.

2. B **【解析】**由题意得 $a\cdot(-1)-2\times3=0$,$\therefore a=-6$.

3. B **【解析】**令 $x=0$,则 $y=-b^2$.

4. C **【解析】**根据题意可知 $k_{AC}=k_{AB}$,即$\dfrac{12-2}{8-3}=\dfrac{a-2}{-2-3}$,解得 $a=-8$.

5. A **【解析】**由所求直线垂直于直线 $x-2y+3=0$,可得所求直线的斜率为 $k=-2$,则由直线方程的点斜式可得所求直线方程为 $y-3=-2(x+1)$,即 $2x+y-1=0$.

6. B **【解析】**当直线的斜率不存在时直线为 $x=1$,满足题意;当直线斜率存在时,设其方程为 $y-3=k(x-1)$,即 $kx-y-k+3=0$,则 $1=\dfrac{|3-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$,解得 $k=\dfrac{4}{3}$,直线方程为 $4x-3y+5=0$. 故存在 2 条符合题意的直线.

7. B **【解析】**$k=\dfrac{4-m}{m+2}=-2$,$m=-8$.

8. D **【解析】**当 $l\perp AB$ 时符合要求,$\because k_{AB}=\dfrac{4-2}{3+3}=\dfrac{1}{3}$,$\therefore k_l=-3$,$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-4=-3(x-3)$,即 $3x+y-13=0$.

9. C **【解析】**设 l,PA,PB 的倾斜角分别为 θ,α_1,α_2,$\because l$ 与线段 AB 相交,$\therefore \alpha_1\leqslant\theta\leqslant\alpha_2$,又 $\tan\alpha_1=5$,$\tan\alpha_2=-\dfrac{2}{5}$,且 $\alpha_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\alpha_2\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore k\geqslant5$ 或 $k\leqslant-\dfrac{2}{5}$.

10. A **【解析】**设 $B(x,y)$,根据题意可得$\begin{cases}k_{AC}\cdot k_{BC}=-1,\\|BC|=|AC|,\end{cases}$

即$\begin{cases}\dfrac{3-4}{3-0}\cdot\dfrac{y-3}{x-3}=-1,\\\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(4-3)^2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=6,\end{cases}$所以 $B(2,0)$或 $B(4,6)$.

11. A **【解析】**直线 $y=ax+2$ 关于直线 $y=x$ 的对称直线为 $x=ay+2$,即 $3x-3ay-6=0$,它与 $y=3x-b$ 即 $3x-y-b=0$ 为同一直线,故 $3a=1$,$b=6$,即 $a=\dfrac{1}{3}$,$b=6$,代入截距式方程可得选项 A.

【点评】直线 $Ax+By+C=0$ 关于直线 $y=x$ 的对称直线为 $Ay+Bx+C=0$.

12. C **【解析】**当 $PQ\perp l_1$ 时,l_1,l_2 之间的距离最大,由两点间的距离公式得$|PQ|=5$,故选 C.

13. $-\dfrac{2}{3}$ **【解析】**设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-1$,又 $y_1=1$,$\therefore y_2=-3$,代入方程 $x-y-7=0$,得 $x_2=4$,即 $B(4,-3)$,又$\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$,$\therefore x_1=-2$,即 $A(-2,1)$,$\therefore k_{AB}=\dfrac{-3-1}{4-(-2)}=-\dfrac{2}{3}$.

14. $x+6y-16=0$ **【解析】**直线 l 就是线段 AB 的垂直平分线,AB 的中点为$(4,2)$,$k_{AB}=6$,所以 $k_l=-\dfrac{1}{6}$,所以直线 l 的方程为 $y-2=-\dfrac{1}{6}(x-4)$,即 $x+6y-16=0$.

15. $7x+24y+70=0$ 或 $7x+24y-80=0$ **【解析】**设直线方程为 $7x+24y+c=0$,$d=\dfrac{|c+5|}{\sqrt{24^2+7^2}}=3$,解得 $c=70$ 或 $c=-80$.

16. 4 **【解析】**点(m,n)在直线 $ax+by+2c=0$ 上,且 m^2+n^2 为直线上的点到原点的距离的平方. 当两直线垂直时,距离最小,故 $d=\dfrac{|a\cdot0+b\cdot0+2c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2c}{c}=2$,所以 $m^2+n^2\geqslant4$.

17.**【解析】**正方形中心 $G(-2,0)$到四条边的距离均为$\dfrac{|-2-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

设正方形与已知直线平行的一边所在直线的方程为 $x+3y+c_1=0(c_1\neq-4)$,则$\dfrac{|-2+c_1|}{\sqrt{10}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$,

即$|c_1-2|=6$,解得 $c_1=-4$(舍去)或 $c_1=8$,所以正方形与已知直线平行的边所在直线的方程为 $x+3y+8=0$. 设正方形另一组对边中的一边所在直线的方程为 $3x-y+c_2=0$,则 $\dfrac{|3\times(-2)+c_2|}{\sqrt{10}}=$

$\frac{6}{\sqrt{10}}$，即$|c_2-6|=6$，解得$c_2=0$或$c_2=12$，所以正方形另两边所在直线的方程为$3x-y+12=0$，$3x-y=0$.

18.【解析】由$\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+y-3=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$即$l_1$与$l_2$的交点为$(1,2)$．若所求直线$l$垂直于$x$轴，即方程为$x=1$，则与点$A,B$的距离不相等，故所求直线$l$的斜率存在.

设直线l的方程为$y-2=k(x-1)$.

因为$k_{AB}=\frac{2-3}{5-3}=-\frac{1}{2}$，若直线$l$与线段$AB$平行，则$l$的方程为$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，即$x+2y-5=0$；

若直线l过线段AB的中点，则也满足题意，设AB中点为M，则$M\left(4,\frac{5}{2}\right)$，将点$M$坐标代入所设直线$l$的方程，得$\frac{5}{2}-2=k(4-1)$，得$k=\frac{1}{6}$，所以$l$的方程为$y-2=\frac{1}{6}(x-1)$，即$x-6y+11=0$.

综上，所求直线l的方程为$x+2y-5=0$或$x-6y+11=0$.

19.【解析】设所求直线方程为$y-2=k\left(x-\frac{4}{3}\right)$.

令$x=0$，得$y=2-\frac{4}{3}k$；令$y=0$，得$x=\frac{4}{3}-\frac{2}{k}$.

由$S=\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{3}k\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{k}\right)=6$，解得$k=-3$或$-\frac{3}{4}$.

当$k=-3$时，点$A(2,0)$，$B(0,6)$；当$k=-\frac{3}{4}$时，点$A(4,0)$，$B(0,3)$，均符合题意．故直线方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$或$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$，即$3x+y-6=0$或$3x+4y-12=0$.

20.【解析】(1)设$C(x_0,y_0)$，

则AC边的中点为$M\left(\frac{x_0+5}{2},\frac{y_0-2}{2}\right)$，

BC边的中点为$N\left(\frac{x_0+7}{2},\frac{y_0+3}{2}\right)$.

$\because M$在y轴上，$\therefore \frac{x_0+5}{2}=0$.

$\therefore x_0=-5$.

$\because N$在x轴上，

$\therefore \frac{y_0+3}{2}=0$，$\therefore y_0=-3$.

即$C(-5,-3)$.

(2)由(1)得$M\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，$N(1,0)$.

故直线MN的方程为$\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$，

即$5x-2y-5=0$.

21.【解析】(1)因为l_1与l_2相交于点$(m,-1)$，

所以点$(m,-1)$在l_1、l_2上，

将点$(m,-1)$代入l_2，得$2m-m-1=0$，解得$m=1$.

又因为$1+8\times(-1)+n=0$，所以$n=7$.

故$m=1,n=7$.

(2)要使$l_1\parallel l_2$，则有

$\begin{cases}m^2-16=0,\\m\times(-1)-2n\neq0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=4,\\n\neq-2\end{cases}$或$\begin{cases}m=-4,\\n\neq2.\end{cases}$

(3)要使$l_1\perp l_2$，则有$m\cdot2+8\cdot m=0$，得$m=0$.

则l_1为$y=-\frac{n}{8}$，由于l_1在y轴上的截距为-1，

所以$-\frac{n}{8}=-1$，即$n=8$.

故$m=0,n=8$.

22.【解析】(1)①当$k=0$时，此时A点与D点重合，折痕所在的直线方程为$y=\frac{1}{2}$.

②当$k\neq0$时，将矩形折叠后A点落在线段DC上的点记为$G(a,1)$，

所以A与G关于折痕所在的直线对称，

有$k_{OG}\cdot k=-1\Rightarrow\frac{1}{a}\cdot k=-1\Rightarrow a=-k$．故$G$点坐标为$G(-k,1)$，

从而折痕所在的直线与OG的交点坐标(线段OG的中点)为$M\left(-\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$.

折痕所在的直线方程为$y-\frac{1}{2}=k\left(x+\frac{k}{2}\right)$，即$y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.

由①②得折痕所在的直线方程为$y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.

(2)当$k=0$时，折痕的长为2；

当$-2+\sqrt{3}\leqslant k<0$时，折痕所在直线交BC于点$M\left(2,2k+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$，交$y$轴于点$N\left(0,\frac{k^2+1}{2}\right)$.

$\because |MN|^2=2^2+\left[\frac{k^2+1}{2}-\left(2k+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^2=4+4k^2\leqslant4+4(7-4\sqrt{3})=32-16\sqrt{3}$.

$\therefore$折痕长度的最大值为$\sqrt{32-16\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

而$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})>2$，故折痕长度的最大值为$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

第四章　圆与方程

4.1　圆的方程

第25课　圆的标准方程

★ 课堂作业 ★

1. B
2. C　【解析】圆的半径$r=2$，面积$S=\pi r^2=4\pi$.
3. A　【解析】因为点在圆的内部，所以$(1-a)^2+(1+a)^2<4$，解得$-1<a<1$.
4. 4　【解析】由题意得$m=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$.
5. $\frac{8}{5}$　【解析】圆C的圆心坐标为$(-4,3)$，圆心到直线的距离$d=\frac{|4\times(-4)+3\times3-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}$.

6.【解析】设圆心 C 的坐标为 $(0,y_0)$，半径为 r.

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2+(y-y_0)^2=r^2$.

$\because$ 圆经过点 $A(-1,4)$、$B(3,2)$，

$\therefore \begin{cases}(-1)^2+(4-y_0)^2=r^2,\\ 3^2+(2-y_0)^2=r^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_0=1,\\ r^2=10.\end{cases}$

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$.

$\because |CM|=\sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}<\sqrt{10}$,

$|CN|=\sqrt{(0-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$,

$|CP|=\sqrt{(0+2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{13}>\sqrt{10}$,

$\therefore$ 点 M 在圆内，点 N 在圆上，点 P 在圆外.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】点 $M(5,-7)$ 到圆心 $A(2,-3)$ 的距离为 5，恰好等于圆的半径长，故点 M 在圆上.

2. D 【解析】$(-a,-b)$ 为圆的圆心，由直线经过第一、二、四象限，得到 $a<0,b>0$，即 $-a>0,-b<0$，再由各象限内点的坐标的性质得解.

3. B 【解析】主要考查对对称性的理解，两个半径相等的圆关于直线对称，只需要求出关于直线对称的圆心即可，$(3,-4)$ 关于 $y=x$ 的对称点 $(-4,3)$ 即为圆心，1 仍为半径. 即所求圆的方程为 $(x+4)^2+(y-3)^2=1$.

4. D 【解析】由 $y=\sqrt{9-x^2}$ 知，$y\geqslant 0$，两边平方移项，得 $x^2+y^2=9$.

$\therefore$ 原方程等价于 $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y\geqslant 0\end{cases}$，表示圆心在原点，半径为 3 的圆的上半部分.

5. B 【解析】由圆心在直线 $x+y=0$ 上，不妨设为 $C(a,-a)$.

$\therefore r=\dfrac{|a-(-a)|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-(-a)-4|}{\sqrt{2}}$,

解得 $a=1,r=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. 故选 B.

6. C

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】圆心为 $(1,0)$，到直线 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y=0$ 的距离

$$d=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}-0\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}.$$

8. $5+\sqrt{2}$ 【解析】点 $(2,3)$ 与圆心连线的延长线与圆的交点到点 $(2,3)$ 的距离最大，最大距离为点 $(2,3)$ 到圆心 $(3,4)$ 的距离 $\sqrt{2}$ 加上半径长 5，即为 $5+\sqrt{2}$.

9. $[0,2]$

10. $\left[\dfrac{-6-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-6+\sqrt{5}}{2}\right]$

11.【解析】方法 1：设直径的两个端点为 $(a,0)$，$(0,b)$，

由 $\dfrac{a+0}{2}=2,\dfrac{0+b}{2}=-3$,

$\therefore a=4,b=-6$.

$\therefore r=\sqrt{(4-2)^2+(0+3)^2}=\sqrt{13}$.

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

方法 2：由直径所对的圆周角为直角知原点在圆上，

$\therefore r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,

$\therefore$ 所求圆的方程是 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

12.【解析】因为 $A(1,1)$ 和 $B(2,-2)$，

所以线段 AB 的中点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,

直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{-2-1}{2-1}=-3$,

因此线段 AB 的垂直平分线 l' 的方程为 $y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，即 $x-3y-3=0$.

圆心 C 的坐标是方程组 $\begin{cases}x-3y-3=0,\\ x-y+1=0\end{cases}$ 的解.

解此方程组，得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=-2.\end{cases}$ 所以圆心 C 的坐标是 $(-3,-2)$.

圆心为 C 的圆的半径长

$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$.

所以，圆心为 C 的圆的标准方程是 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

13.【解析】(1) 因为 AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$，且 AD 与 AB 垂直，所以直线 AD 的斜率为 -3.

又因为点 $T(-1,1)$ 在直线 AD 上，

所以 AD 边所在直线的方程为

$y-1=-3(x+1)$,

即 $3x+y+2=0$.

(2) 由 $\begin{cases}x-3y-6=0,\\ 3x+y+2=0,\end{cases}$

解得点 A 的坐标为 $(0,-2)$.

因为矩形 $ABCD$ 两条对角线的交点为 $M(2,0)$，

所以 M 为矩形 $ABCD$ 外接圆的圆心.

又 $|AM|=\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$,

从而矩形 $ABCD$ 外接圆的方程为

$(x-2)^2+y^2=8$.

第 26 课 圆的一般方程

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】将圆的方程化为标准式：$(x-1)^2+(y+5)^2=3$，则圆心为 $(1,-5)$，半径 $r=\sqrt{3}$，故选 B.

2. A 【解析】圆心坐标 $\left(\dfrac{2+2}{2},\dfrac{0-2}{2}\right)$，即 $(2,-1)$，半径 $r=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(2-2)^2+(-2-0)^2}=1$，所以圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$. 即 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

3. D 【解析】圆面积最大，则半径最大. 由 $r=\dfrac{\sqrt{k^2+4-4k^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{-3k^2+4}}{2}\leqslant 1$. 当且仅当 $k=0$ 时，r 取最大值，故此时圆的方程为 $x^2+y^2+2y=0$，圆心为 $(0,-1)$.

4. $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 【解析】点在圆外，将点的坐标代入圆的方程，有 $(a+1)^2+(a-1)^2-(a+1)+$

$(a-1)-4>0$，解得 $a>\sqrt{2}$ 或 $a<-\sqrt{2}$.

5.2 【解析】由圆心在 x 轴上，得 $E=0$. 又半径 $r=\frac{\sqrt{D^2+12}}{2}=2$，所以 $D^2=4$，解得 $D=2$（$D=-2$ 舍去）.

6.【解析】设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

$\therefore \begin{cases}1+16+D+4E+F=0,\\4+9-2D+3E+F=0,\\16+25+4D-5E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=2,\\F=-23.\end{cases}$

$\therefore$ 所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$.

将其化为标准式，得 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

$\therefore$ 圆心为 $(1,-1)$，半径 $r=5$.

★ 课后作业 ★

1. C
2. C
3. B
4. D

5. D 【解析】圆面积最大，则半径最大. 而 $r=\frac{\sqrt{k^2+4-4k^2}}{2}=\frac{\sqrt{-3k^2+4}}{2}\leqslant 1$，当且仅当 $k=0$ 时，r 取最大值，故此时圆的方程为 $x^2+y^2+2y=0$，圆心为 $(0,-1)$.

6. A 【解析】设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$.

由题意知圆过点 $(0,0)$，$(2,0)$ 和 $(0,3)$.

$\therefore \begin{cases}F=0,\\2^2+2D+F=0,\\3^2+3E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}F=0,\\D=-2,\\E=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 方程为 $x^2+y^2-2x-3y=0$.

7. $x^2+y^2-4x+8y+4=0$ 【解析】圆心为 $(2,-4)$，半径为 4 的圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+4)^2=16$，展开得 $x^2+y^2-4x+8y+4=0$，即为一般式方程.

8. -2 【解析】$\because A$ 在圆上，$\therefore a$ 应满足的条件为

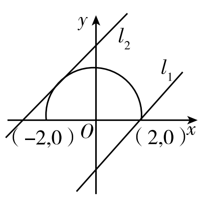
$\begin{cases}1^2+0^2-2a+a^2+3a-3=0,\\(-2a)^2-4(a^2+3a-3)>0\end{cases}$

即 $\begin{cases}a^2+a-2=0,\\3a-3<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1\text{ 或 }a=-2,\\a<1,\end{cases}$ $\therefore a=-2$.

9. ②

10. $[-2,2\sqrt{2}]$ 【解析】如图所示，在平面直角坐标系内作出曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的图象（半圆），直线 $l_1:y=x-2$，直线 $l_2:y=x+2\sqrt{2}$. 当直线 $l:y=x+b$ 夹在 l_1、l_2 之间（包括 l_1、l_2）时，$l:y=x+b$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 有公共点. 所以 b 的取值范围是 $[-2,2\sqrt{2}]$.



第 10 题图

11.【解析】方法 1：设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$.

$\because$ 此圆过 A、B、C 三点，

$\therefore \begin{cases}1^2+3^2+D+3E+F=0,\\(-1)^2+(-1)^2-D-E+F=0,\\(-3)^2+5^2-3D+5E+F=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=4,\\E=-4,\\F=-2.\end{cases}$

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2+y^2+4x-4y-2=0$.

方法 2：设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则 $\begin{cases}(1-a)^2+(3-b)^2=r^2, & ①\\(-1-a)^2+(-1-b)^2=r^2, & ②\\(-3-a)^2+(5-b)^2=r^2, & ③\end{cases}$

②−①、③−①得 $\begin{cases}a+2b-2=0,\\2a-b+6=0,\end{cases}$

解得 $a=-2$，$b=2$. $\therefore r^2=10$.

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=10$.

方法 3：AB 的中垂线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-0)$，BC 的中垂线方程为 $y-2=\frac{1}{3}(x+2)$. 联立解得圆心坐标为 $(-2,2)$.

设圆的半径为 r，则 $r^2=(1+2)^2+(3-2)^2=10$，

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=10$.

方法 4：由于 $k_{AB}=\frac{-1-3}{-1-1}=2$，$k_{AC}=\frac{5-3}{-3-1}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$，$\therefore AB\perp AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 是以 A 为直角的直角三角形，

$\therefore$ 外接圆圆心为 BC 的中点，即 $(-2,2)$，

半径 $r=\frac{1}{2}|BC|=\sqrt{10}$.

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=10$.

12.【解析】设动点 M 的坐标为 (x,y). 将圆的方程化成标准式，得 $(x-2)^2+(y+1)^2=16$，$\therefore C(2,-1)$.

$\because PC$ 的中点是 M，设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，

$\therefore \frac{2+x_1}{2}=x$，$\frac{-1+y_1}{2}=y$. $\therefore x_1=2x-2$，$y_1=2y+1$.

$\because$ 点 P 在圆 C 上，$\therefore (2x-2-2)^2+(2y+1+1)^2=16$，

即 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

$\therefore$ 动点 M 的轨迹方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

13.【解析】x^2+y^2 表示圆上点与原点距离的平方，由平面几何知识知它在原点与圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值. 又圆心到原点的距离为 2，圆的半径为 $\sqrt{3}$，故 $(x^2+y^2)_{\max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，$(x^2+y^2)_{\min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

4.2 直线、圆的位置关系

第 27 课 直线与圆的位置关系

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】圆的方程可化为 $(x+2)^2+(y-2)^2=2$，圆心为 $(-2,2)$，圆心在直线 $x-y+4=0$ 上，所以直线截圆所得弦为圆的直径. 又 $r=\sqrt{2}$，所以弦长 $=2r=2\sqrt{2}$，故

选 C.

2. A 【解析】圆心到直线的距离 $d=\frac{|r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. 因为 $P(x_0,y_0)$ 是圆内一点，所以 $x_0^2+y_0^2<r^2$，所以 $d>\frac{r^2}{r}=r$，故直线和圆相离.

3. B 【解析】将圆的方程化为 $(x-a)^2+(y+2)^2=16$. 圆心 $(a,-2)$ 到直线的距离 $d=\frac{|4a+4|}{5}$. 因为直线与圆有两个不同交点，所以 $d<4$，即 $\frac{|4a+4|}{5}<4$，解得 $-6<a<4$，故选 B.

4. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 【解析】因为直线与圆相切，则圆心到直线的距离等于半径，所以半径 $r=\frac{|-3-8+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.
又圆心为 $(-1,2)$，所以圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

5. $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 【解析】设直线 l 的斜率为 k，方程为 $y-2=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+2=0$. 圆心到直线的距离 $d=\frac{|-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$. 因为直线与圆有交点，所以 $\frac{|-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant\sqrt{2}$，解得 $2-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 2+\sqrt{3}$.

6.【解析】解法 1：设所求切线的斜率为 k，则切线方程为 $y=k(x+2)$.
由方程组 $\begin{cases}y=k(x+2),\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 $x^2+k^2(x+2)^2=1$.
即 $(1+k^2)x^2+4k^2x+4k^2-1=0$.
上述一元二次方程有两个相等的实根，则
$\Delta=16k^4-4(k^2+1)(4k^2-1)=-12k^2+4=0$.
$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
所以所求切线的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.
解法 2：设所求切线的斜率为 k，则切线方程为 $y=k(x+2)$，由于圆心到切线的距离等于圆的半径，
所以 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
所以所求切线的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

★ 课后作业 ★

1. D
2. C
3. B
4. C 【解析】设圆心 $(a,0)$ 到直线 $x=2$ 的距离为 d，则由题意得 $d^2=r^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$，$\therefore d=1$.
又 $\because d=|2-a|$，$\therefore |2-a|=1$，
$\therefore a=1$ 或 $a=3$.

5. A 【解析】利用圆的几何性质，将题目转化为求两圆的公共弦方程.
设 $P(3,1)$，圆心 $C(1,0)$，切点为 A、B，则 P、A、C、B 四点共圆，且 PC 为圆的直径，$\therefore$ 四边形 $PACB$ 的外接圆方程为 $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$①，圆 C：$(x-1)^2+y^2=1$②，①－②得 $2x+y-3=0$，此即为直线 AB 的方程.

6. C 【解析】结合圆的几何性质，得圆心 C 到直线 l 的距离 d 满足 $1<d<3$. 所以 $1<\frac{|3\times2-4\times1+k|}{\sqrt{9+16}}<3$. 解得 $-17<k<-7$ 或 $3<k<13$.

7. 0 【解析】圆心 $(1,2)$ 到直线 $ax-y+3=0$ 的距离为 $d=\frac{|a-2+3|}{\sqrt{a^2+1}}$，
又弦心距 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，
$\therefore \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，解得 $a=0$.

8. $\{(1,1)\}$ 【解析】解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\x+y=2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

9. $3+\sqrt{2}$ 【解析】直线 AB 的方程是 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$，$|AB|=2\sqrt{2}$，则当 $\triangle ABC$ 面积取最大值时，边 AB 上的高即点 C 到直线 AB 的距离 d 取最大值. 又圆心为 $M(1,0)$，半径 $r=1$，点 M 到直线 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$ 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，由圆的几何性质得 d 的最大值是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$，所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)=3+\sqrt{2}$.

10. $[0,\sqrt{2}-1)$ 【解析】曲线 C 是圆 $x^2+y^2+2x=0$ 位于 x 轴上方的半圆，m 是直线 l：$x+y-m=0$ 在 y 轴上的截距，利用数形结合可得 m 的取值范围是 $[0,\sqrt{2}-1)$.

11.【解析】设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
$\because$ 圆心在直线 $y=-2x$ 上，$\therefore b=-2a$. ①
$\because$ 圆过点 $A(2,-1)$，$\therefore (2-a)^2+(-1-b)^2=r^2$. ②
$\because$ 圆与直线 $x-y=1$ 相切，$\therefore \frac{|a-b-1|}{\sqrt{2}}=r$. ③
联立①②③，解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\r=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=9,\\b=-18,\\r=13\sqrt{2}.\end{cases}$
$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ 或 $(x-9)^2+(y+18)^2=338$.

12.【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x-4y-5+\lambda(2x+y+4)=0$，则 $x^2+y^2+(2+2\lambda)x+(\lambda-4)y-5+4\lambda=0$.
即 $[x+(1+\lambda)]^2+\left[y+\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\right]^2=(1+\lambda)^2+\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)^2-4\lambda+5$，
$\therefore [x+(1+\lambda)]^2+\left[y+\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\right]^2=\frac{5}{4}\lambda^2-4\lambda+10$.
又 $\because$ 若使圆的面积最小，则 $f(\lambda)=\frac{5}{4}\lambda^2-4\lambda+10=$

$\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{8}{5}\right)^2+10-\frac{16}{5}$取最小值,此时 $\lambda=\frac{8}{5}$,∴ 所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x-4y-5+\frac{8}{5}(2x+y+4)=0$,

整理得 $5x^2+5y^2+26x-12y+7=0$.

13.【解析】(1)方法一:由$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=5,\\mx-y+1-m=0\end{cases}$消去 y 并整理,

得 $(m^2+1)x^2-2m^2x+m^2-5=0$.

∵ $\Delta=(-2m^2)^2-4(m^2+1)(m^2-5)=16m^2+20>0$ 对于一切 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立,∴ 直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

方法二:l 的方程可变形为 $y-1=m(x-1)$,故直线恒过定点 $P(1,1)$.

因为 $|PC|^2=1^2+(1-1)^2<5$,所以 $P(1,1)$ 在圆 C 内,所以直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

方法三:圆 C 的圆心 $(0,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$,∴ $d^2-5=\frac{-4m^2-5}{m^2+1}<0$. 即圆心到直线 l 的距离小于圆的半径,所以直线 l 和圆 C 必有两个不同的交点.

(2)圆 C 的半径为 $r=\sqrt{5}$,所以圆心到直线 l 的距离为

$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由点到直线的距离公式,得$\frac{|-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

解方程,得 $m=\pm\sqrt{3}$. ∴ 直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$.

第 28 课　圆与圆的位置关系、直线与圆的方程的应用

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】联立方程组得$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y=0,\\x^2+y^2-x+y-\frac{1}{2}=0,\end{cases}$将两方程相减得相交弦的方程为 $x-3y-\frac{1}{2}=0$,即 $2x-6y-1=0$.

2. B 【解析】以半圆的圆心为原点建立直角坐标系,则半圆的方程为 $x^2+y^2=3.6^2(y\geqslant 0)$. 当 $x=0.8$ 时,$y=\sqrt{3.6^2-0.8^2}\approx 3.5(\mathrm{m})$,故选 B.

3. C 【解析】设动圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$,它和圆 $x^2+y^2=1$ 外切,则 $\sqrt{a^2+b^2}=|b|+1$,得 $a^2=2|b|+1$,即动圆圆心的轨迹方程为 $x^2=2|y|+1$.

4. $x^2+y^2+4y-6=0$ 【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x+\lambda(x+2y-3)=0$,而这个圆的圆心在 y 轴上,所以 $\lambda-2=0$,$\lambda=2$. 故所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x+2(x+2y-3)=0$,即 $x^2+y^2+4y-6=0$.

5. -9 或 311 【解析】将两圆方程分别化为 $(x-3)^2+(y+6)^2=64$,$(x+3)^2+(y-2)^2=k+13$,两圆圆心距 $d=10$. 当两圆外切时,$10=8+\sqrt{k+13}$,解得 $k=-9$;当两圆内切时,$10=|\sqrt{k+13}-8|$,解得 $k=311$.

6.【解析】将两圆的一般方程化为标准方程,得 $C_1:(x+2)^2+(y-3)^2=1$,

$C_2:(x-1)^2+(y-7)^2=50-k$.

圆 C_1 的圆心为 $C_1(-2,3)$,半径 $r_1=1$;

圆 C_2 的圆心为 $C_2(1,7)$,半径 $r_2=\sqrt{50-k}(k<50)$.

从而 $|C_1C_2|=\sqrt{(-2-1)^2+(3-7)^2}=5$.

当 $1+\sqrt{50-k}=5$,$k=34$ 时,两圆外切.

当 $|\sqrt{50-k}-1|=5$,$\sqrt{50-k}=6$,$k=14$ 时,两圆内切.

当 $|r_2-r_1|<|C_1C_2|<r_2+r_1$,$14<k<34$ 时,两圆相交.

当 $1-\sqrt{50-k}>5$ 或 $1+\sqrt{50-k}<5k<14$ 或 $34<k<50$ 时,两圆相离.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】圆 $O_1:x^2+y^2=4$,圆心为 $O_1(0,0)$,半径 $r_1=2$,圆 $O_2:x^2+y^2-6x+8y-11=0$,圆心为 $O_2(3,-4)$,半径 $r_2=6$.

∵ $|O_1O_2|=5$,$4=6-2<5<6+2=8$,∴ 两圆相交.

2. C 【解析】圆 $C_1:x^2+y^2-8x-4y+11=0$ 的圆心为 $C_1(4,2)$,半径 $r_1=3$,

圆 $C_2:x^2+y^2+2y-3=0$ 的圆心为 $C_2(0,-1)$,半径 $r_2=2$.

∵ 圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{4^2+(2+1)^2}=5=r_1+r_2$,

∴ 两圆相外切,∴ 两圆有 3 条公切线.

3. D 【解析】所求轨迹是以 $(5,-7)$ 为圆心,以 5 或 3 为半径的圆,

∴ 方程为 $(x-5)^2+(y+7)^2=25$ 或 $(x-5)^2+(y+7)^2=9$.

4. C 【解析】集合 M 表示圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 的边界及其内部,而集合 N 表示圆 $C_2:(x-1)^2+(y-1)^2=r^2(r>0)$ 的边界及其内部,

∵ $M\cap N=N$,∴ $N\subseteq M$,

∴ 圆 C_2 在圆 C_1 内部或圆 C_2 与圆 C_1 内切且 $r<2$,

∴ $|C_1C_2|=\sqrt{2}\leqslant 2-r$,∴ $r\leqslant 2-\sqrt{2}$,选 C.

5. A 【解析】两圆方程可化为 $(x+k)^2+y^2=1$,$x^2+[y+(k+1)]^2=1$,

∴ 圆心分别为 $(-k,0)$,$(0,-k-1)$,

∴ 圆心距 $d=\sqrt{k^2+k^2+2k+1}$

$=\sqrt{2k^2+2k+1}=\sqrt{2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. D 【解析】设$\frac{y}{x}=k$,则 $kx-y=0$.

∵ 直线 $kx-y=0$ 与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$,即 $(x+2)^2+y^2=1$ 有公共点,∴ 圆心 $C(-2,0)$ 到直线 $kx-y=0$ 的距离小于等于圆半径 1,

∴ $\frac{|-2k-0|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}\leqslant 1$,

∴ $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $3x+y-9=0$ 【解析】两圆公共弦的垂直平分线就是由

两圆圆心确定的直线.

$\because$ 圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 的圆心为 $C_1(2,3)$,

圆 $(x-3)^2+y^2=9$ 的圆心为 $C_2(3,0)$,

$\therefore$ 直线 C_1C_2 的方程为 $y=\frac{3-0}{2-3}\cdot(x-3)$,

即 $3x+y-9=0$.

8. $x+3y=0$ 【解析】把两圆方程化为一般方程为:

$x^2+y^2-10=0$, ①

$x^2+y^2-2x-6y-10=0$, ②

① - ②得 $x+3y=0$,

即直线 AB 的方程为 $x+3y=0$.

9. $x-y+2=0$ 【解析】由题设可知 l 为两圆圆心的中垂线,$\because$ 两圆圆心分别为 $(0,0)$, $(-2,2)$,$\therefore$ 两圆圆心的中垂线为过 $(-1,1)$ 且斜率为 1 的直线,$\therefore y-1=1\times(x+1)$ 即 $x-y+2=0$.

10. B 景点在小路的投影处 【解析】所选观景点应使对两景点的视角最大. 由平面几何知识,该点应是过 A、B 两点的圆与小路所在的直线相切时的切点,以小路所在直线为 x 轴,过 B 点与 x 轴垂直的直线为 y 轴上建立直角坐标系. 由题意,得 $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$、$B(0,2\sqrt{2})$,设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$. 由 A、B 在圆上,得 $\begin{cases}a=0,\\b=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\sqrt{2},\\b=5\sqrt{2},\end{cases}$ 由实际意义知 $\begin{cases}a=0,\\b=\sqrt{2}.\end{cases}$ $\therefore$ 圆的方程为 $x^2+(y-\sqrt{2})^2=2$,切点为 $(0,0)$,$\therefore$ 观景点应设在 B 景点在小路的投影处.

11. 【解析】(1) 因为所求的圆过两已知圆的交点,故设此圆的方程为 $x^2+y^2-4x-3+\lambda(x^2+y^2-4y-3)=0$ $(\lambda\neq-1)$,

即 $(1+\lambda)(x^2+y^2)-4x-4\lambda y-3\lambda-3=0$,

即 $x^2+y^2-\frac{4x}{1+\lambda}-\frac{4\lambda y}{1+\lambda}-3=0$,

圆心为 $\left(\frac{2}{1+\lambda},\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$,由于圆心在直线 $x-y-4=0$ 上,

$\therefore \frac{2}{1+\lambda}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$,解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$.

所求圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

(2) 将圆 C_1 和圆 C_2 的方程相减,得 $x-y=0$,即为两圆 C_1 和 C_2 相交弦的方程.

12. 【解析】设圆心为 $(3a,a)$.

$\because$ 圆与 y 轴相切,$\therefore r=|3a|$.

又$\because$ 圆心到 $y=x$ 的距离 $d=\frac{|3a-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a|$,

且圆截直线截得弦长为 $2\sqrt{7}$,

$\therefore 2\sqrt{7}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{(3a)^2-(\sqrt{2}a)^2}$, $|a|=1$,

$\therefore a=\pm1$,

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

13. 【解析】以圆形拱顶点为原点,以过圆形拱顶点的竖直直线为 y 轴,建立平面直角坐标系.

设圆心为 C,水面所在弦的端点为 A、B,

则由已知可得 $A(6,-2)$,

设圆的半径为 r,则 $C(0,-r)$,

即圆的方程为 $x^2+(y+r)^2=r^2$.

将点 A 的坐标代入上述方程可得 $r=10$,

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2+(y+10)^2=100$,

当水面下降 1 米后,水面弦的端点为 A'、B',

可设 $A'(x_0,-3)(x_0>0)$,代入 $x^2+(y+10)^2=100$,

解得 $x_0=\sqrt{51}$,

$\therefore$ 水面宽度 $|A'B'|=2\sqrt{51}$ 米.

4.3 空间直角坐标系

第 29 课 空间直角坐标系

★ 课堂作业 ★

1. C

2. C 【解析】点 $P(x,y,z)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x,-y,-z)$.

3. B 【解析】$AB=\sqrt{1^2+1^2+0}=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3^2+2^2+3^2}=\sqrt{22}$, $BC=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{22}$,所以 $AC=BC$,即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

4. $\sqrt{17}$ 【解析】$AB=\sqrt{(-3-0)^2+(2-4)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{17}$.

5. $(3,2,5)$ 【解析】点 $P(x,y,z)$ 关于 xOz 平面对称的点的坐标为 $(x,-y,z)$.

6. 【解析】(1) 要求 AC_1 的长,只要求出点 A 和点 C_1 的坐标,利用空间两点间距离公式求解即可;(2) 求点 P 的坐标,再求 OP 的长度.

解:(1) $\because A(2,0,0)$、$C_1(0,3,4)$,

$\therefore |AC_1|=\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2+(0-4)^2}$

$=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$.

(2) $\because P$ 是侧面 BCC_1B_1 对角线的交点,

$\therefore P(1,3,2)$,

$\therefore |OP|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】由点 P 的坐标可知,它到平面 xOz 的距离即为纵坐标的绝对值.

2. B 【解析】P 点在平面 yOz 上的射影为 $(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

3. B 【解析】由 A, B 两点的坐标可知它们关于 y 轴对称.

4. A 【解析】由题意知 B 点坐标为 $(2,-3,-5)$,

$\therefore |AB|=\sqrt{(2-2)^2+(-3+3)^2+(5+5)^2}=10$.

5. D 【解析】设 $P(a,0,0)$,由 $|PP_1|=2|PP_2|$,

得 $\sqrt{a^2+(0-\sqrt{2})^2+(0-3)^2}=2\sqrt{a^2+(0-1)^2+(0+1)^2}$,

$\therefore a^2+11=4a^2+8$,

$\therefore a^2=1$, $\therefore a=\pm1$.

即点 P 的坐标为 $(-1,0,0)$ 或 $(1,0,0)$.

6. C 【解析】设点 $P(x,y,0)$ 在坐标平面 xOy 上,由 $|PA|=|PB|$ 可得 $(x-3)^2+(y-2)^2+25=(x-3)^2+(y-5)^2+1$,即得 $y=-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbf{R}$,所以符合条件的点有无数个.

7. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ 【解析】因为 $A(3,-1,2)$，中心 $M(0,1,2)$，所以 A 关于 M 的对称点 C_1 的坐标为 $(-3,3,2)$.

所以正方体的体对角线长为

$AC_1=\sqrt{[3-(-3)]^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{13}$，

所以正方体的棱长为 $\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

【点拨】空间中的中点坐标公式和平面几何中的中点坐标公式类似，正方体的体对角线长是棱长的 $\sqrt{3}$ 倍.

8. $\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$ 【解析】由题意，设 $C(0,0,z)$，由 $|AC|=|BC|$，

得 $\sqrt{(-3-0)^2+(-1-0)^2+(1-z)^2}=$

$\sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2+(3-z)^2}$，

即 $z^2-2z+11=z^2-6z+17$. 解得 $z=\dfrac{3}{2}$.

9. $\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 【解析】三角形三个顶点坐标分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，则其重心坐标为 $M\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$，故所求重心坐标为 $\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

10. 39 【解析】$\because$ 点 $M(4,-3,5)$ 到 x 轴的距离为 $m=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，到 xOy 坐标平面的距离为 $n=5$，

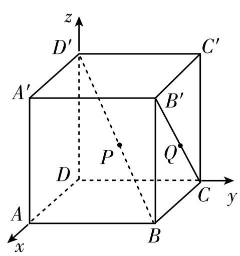
$\therefore m^2+n=39$.

11.【解析】以 D 为坐标原点，DA，DC，DD' 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图. 由题意得 $B(a,a,0)$，$D'(0,0,a)$，

$\therefore P\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

又 $C(0,a,0)$，$B'(a,a,a)$，

$\therefore Q\left(\dfrac{a}{2},a,\dfrac{a}{2}\right)$.

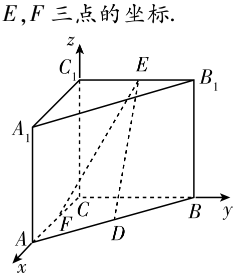


第 11 题图

$\therefore$ 由两点间的距离公式得 $|PQ|=$

$\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}$.

12.【解析】求 DE，EF 的长度，关键是在空间直角坐标系中，表示出 D，E，F 三点的坐标.



第 12 题图

解：以点 C 为坐标原点，分别以 CA，CB，CC_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

$\because |C_1C|=|CB|=|CA|=2$，

$\therefore C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,2)$，$B_1(0,2,2)$，

由中点坐标公式可得 $D(1,1,0)$，$E(0,1,2)$，$F(1,0,0)$，

$\therefore |DE|=\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$，

$|EF|=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{6}$.

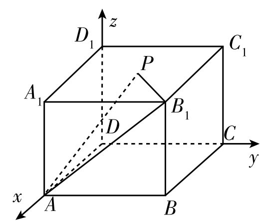
13.【证明】建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，设棱长为 1，则 $A(1,0,0)$，$B_1(1,1,1)$，$P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$，由两点间的距离公式得

$|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$|B_1P|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+(1-1)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$|AB_1|=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore |AP|^2+|B_1P|^2=|AB_1|^2$，$\therefore AP\perp B_1P$.



第 13 题图

单元评估检测

1. B 【解析】半径 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1+4\times\dfrac{3}{2}}=\sqrt{2}$.

2. B 【解析】将圆的一般方程化成标准方程为 $O_1:(x-1)^2+y^2=1$，$O_2:x^2+(y-2)^2=4$，则圆心坐标为 $O_1(1,0)$，$O_2(0,2)$，半径 $r_1=1$，$r_2=2$，$|O_1O_2|=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}<1+2$，且 $\sqrt{5}>2-1$，故两圆相交.

3. B 【解析】将圆的方程化为标准方程为 $(x+1)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$，圆心 $(-1,-2)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，则到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的两条平行线与圆的公共点的个数即为所求. 由于圆的半径为 $2\sqrt{2}$，所以到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的平行线一条过圆心，另一条与圆相切，故这两条直线与圆有 3 个交点.

4. B 【解析】$\because$ 切线的方程是 $y=-(x-a)$，即 $x+y-a=0$，$\therefore \dfrac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$a=\pm 2$.

5. A 【解析】设 AB 中点坐标为 (x,y,z)，

则有 $\begin{cases} x=\dfrac{1-3}{2}, \\ y=\dfrac{3+1}{2}, \\ z=\dfrac{5+3}{2}, \end{cases}$

即所求坐标为 $(-1,2,4)$. 故选 A.

6. A 【解析】圆心 $(3,-5)$ 到直线 $4x-3y=2$ 的距离 $d=5$，由已知得 $d-1<r<d+1$，则 $4<r<6$.

7. D 【解析】该圆的圆心为 $A(2,-3)$，半径 $r=3$，圆心到直线的距离 $d=\frac{|2+6-3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-5}=4$，又原点到直线的距离为 $\frac{|0-0-3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$，

所以 $S=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

8. C 【解析】直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，即 $kx-y+2k=0$，圆心为 $A(1,0)$，半径 $r=1$，圆心 A 到直线 l 的距离为

$d=\frac{|k+2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

若相交，应满足 $d<r$，即 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}<1$，

解得 $k\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

9. B 【解析】当 $y=0$ 时，方程为 $x^2+2x-5=0$，此方程的两根为 $-1\pm\sqrt{6}$，所以 $|AB|=2\sqrt{6}$.

10. C 【解析】圆的对称轴是圆的直径所在的直线，这是圆的性质，也是题中的隐含条件，所以圆心 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 在直线 $y=x-1$ 上，所以 $-\frac{E}{2}=-\frac{D}{2}-1$，$D-E=-2$. 故选 C.

11. B 【解析】$P(a,b,c)$ 关于原点的对称点为 $P'(-a,-b,-c)$，则 $|PP'|=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，故选 B.

12. C 【解析】圆心为 $(2m+1,m)$，$r=|m|(m\neq0)$. 不妨设圆心坐标为 (x,y)，则 $x=2m+1$，$y=m$，所以 $x-2y-1=0$，又因为 $m\neq0$，所以 $x\neq1$，故选 C.

13. $x+y-3=0$ 【解析】AB 的中垂线即为圆 C_1、圆 C_2 的连心线 C_1C_1. 又 $C_1(3,0)$，$C_2(0,3)$，所以 C_1C_2 所在直线的方程为 $x+y-3=0$.

14. $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{2}$ 【解析】由 $\begin{cases}x+y+a=0,\\x^2+(y+1)^2=1\end{cases}$ 消去 y，得 $2x^2+2(a-1)x+a^2-2a=0$. 由 $\Delta\geqslant0$，解得 $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{2}$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】点 $A(1,\sqrt{2})$ 在圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 内，当劣弧所对的圆心角最小时，l 垂直于过点 $A(1,\sqrt{2})$ 和圆心 $M(2,0)$ 的直线.

$\therefore k=-\frac{1}{k_{AM}}=-\frac{2-1}{0-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $x+y-3=0$ 【解析】设圆心坐标为 $(x_0,0)(x_0>0)$，由于圆过点 $(1,0)$，则半径 $r=|x_0-1|$. 圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|x_0-1|}{\sqrt{2}}$. 由弦长为 $2\sqrt{2}$ 可知 $\left(\frac{|x_0-1|}{\sqrt{2}}\right)^2=(x_0-1)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2$，

整理得 $(x_0-1)^2=4$.

$\therefore x_0-1=\pm2$，

$\therefore x_0=3$ 或 $x_0=-1$（舍去）.

因此圆心坐标为 $(3,0)$，由此可求得过圆心且与直线 $y=x-1$ 垂直的直线方程为 $y=-(x-3)$，即 $x+y-3=0$.

17.【解析】因为 $(-1)^2+2^2-2\times(-1)+4\times2-15=0$，所以 $P(-1,2)$ 在圆上，所以该圆过点 P 的切线有且只有一条. 因为圆的方程可化为 $(x-1)^2+(y+2)^2=20$，所以圆心坐标为 $C(1,-2)$，所以 $k_{PC}=\frac{2+2}{-1-1}=-2$，所以可求得 $k_{切}=\frac{1}{2}$，所以可求得切线方程为 $x-2y+5=0$.

18.【解析】因为所求的圆经过两圆 $(x+3)^2+y^2=13$ 和 $x^2+(y+3)^2=37$ 的交点，所以设所求圆的方程为 $(x+3)^2+y^2-13+\lambda[x^2+(y+3)^2-37]=0(\lambda\neq-1)$.

圆心为 $\left(-\frac{3}{1+\lambda},-\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)$，代入方程 $x-y-4=0$，得 $\lambda=-7$. 故所求圆的方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{89}{2}$.

19.【解析】如图，分别以 AB、AD、AA_1 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

由题意可知 $C(3,3,0)$，$D(0,3,0)$，$\because|DD_1|=|CC_1|=2$，

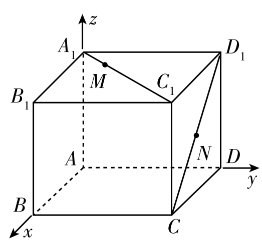
$\therefore C_1(3,3,2)$，$D_1(0,3,2)$.

$\because N$ 为 CD_1 的中点，$\therefore N\left(\frac{3}{2},3,1\right)$.

$\because M$ 是 A_1C_1 的三等分点且靠近点 A_1，$\therefore M(1,1,2)$.

由两点间距离公式，得

$|MN|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.



第 19 题图

20.【解析】(1) 直线 l 可改写为 $y-1=m(x-1)$，因此直线 l 过定点 $D(1,1)$，又 $\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2}=1<\sqrt{5}$，所以点 D 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 必相交.

(2) 由题意知 $m\neq0$，所以直线 l 的斜率 $k=m$，又 $k=\tan120^\circ=-\sqrt{3}$，即 $m=-\sqrt{3}$.

此时，圆心 $C(0,1)$ 到直线 $l:\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$ 的距离 $d=\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又圆 C 的半径 $r=\sqrt{5}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{17}$.

21.【解析】连接 PC，CT. $\because PT$ 与圆 C 相切，T 为切点，

$\therefore PT\perp CT$.

$\therefore\triangle CTP$ 是直角三角形，$\therefore|PT|^2=|PC|^2-|CT|^2$. ①

由圆 C 方程 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$，得 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$，

$\therefore$ 圆心为 $C(2,3)$，半径长 $r=1$. 代入方程①中，得 $|PT|^2=(x_0-2)^2+(y_0-3)^2-1$. ②

又 $|PT|=|PO|$（O 为原点），$\therefore |PT|^2=x_0^2+y_0^2$. ③

联立②③，得 $(x_0-2)^2+(y_0-3)^2-1=x_0^2+y_0^2$，即 $2x_0+3y_0-6=0$.

$\therefore y_0=\frac{6-2x_0}{3}=2-\frac{2}{3}x_0$. 代入③得 $|PT|^2=x_0^2+\left(2-\frac{2}{3}x_0\right)^2=\frac{13}{9}x_0^2-\frac{8}{3}x_0+4=\frac{13}{9}\left(x_0-\frac{12}{13}\right)^2+\frac{36}{13}$.

$\therefore$ 当 $x_0=\frac{12}{13}, y_0=\frac{18}{13}$ 时，$|PT|^2$ 最小，最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore |PT|$ 的最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$，此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13}\right)$.

22.【解析】(1) 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx+ay-ab=0$.

$\because$ 直线 AB 与圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 相切，

$\therefore \frac{|2b+2a-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，

$\therefore ab-4b-4a+8=0$，

即 $(a-4)(b-4)=8$.

(2) 设线段 AB 的中点 M 的坐标为 (x,y)，则 $a=2x, b=2y$，$\therefore (2x-4)(2y-4)=8$，

即 $(x-2)(y-2)=2(x>2, y>2)$ 为所求的点 M 的轨迹方程.

期末测评试题（一）

1. C 【解析】$|AB|=\sqrt{(1-2)^2+[2-(-2)]^2+(2-1)^2}=3\sqrt{2}$.

2. B 【解析】由题意可知该几何体是一个正四棱锥，其底面是一个边长为 2 的正方形，故底面积为 4；侧面是四个全等的等腰三角形，其底边长为 2，底边上的高为 2，从而求得该几何体的侧面积为 $\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times4=8$，故此几何体的表面积是 12.

3. C 【解析】设两直线的交点为 $(0,m)$，则 $\begin{cases}3m-k=0,\\-km+12=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}m=2,\\k=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-2,\\k=-6,\end{cases}$ 故选 C.

4. C 【解析】本题考查两圆位置关系的判断，由两圆方程易知其圆心坐标分别为 $O_1(a,b)$，$O_2(a+1,b+2)$，经计算得 $O_1O_2=\sqrt{5}$，由于 $R-r=1<O_1O_2=\sqrt{5}<R+r=3$，故两圆相交.

5. B 【解析】①显然正确；②当这三点在平面 β 的两侧时，平面 α 与 β 相交，②错误；③正确. 故选 B.

6. C 【解析】由 $\frac{|4\times4-3t-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\leqslant3$，得 $|15-3t|\leqslant15$，即 $|5-t|\leqslant5$，所以 $0\leqslant t\leqslant10$.

7. C 【解析】设木星的半径为 r_1，地球的半径为 r_2，由题意，得 $\frac{r_1^3}{r_2^3}=240\sqrt{30}$，则 $\frac{\text{木星的表面积}}{\text{地球的表面积}}=\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}\cdot\frac{r_2}{r_1}=240\sqrt{30}\times\frac{1}{\sqrt[3]{240\sqrt{30}}}=\sqrt[3]{240^2\times(\sqrt{30})^2}=120$.

8. B 【解析】过 $A(4,a)$ 和 $B(5,b)$ 两点的直线斜率 $k_{AB}=\frac{b-a}{1}$.

又 $\because$ 直线 AB 与直线 $y=x+m$ 平行，

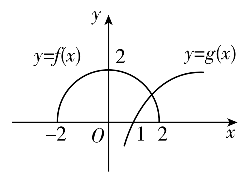
$\therefore b-a=1$.

$\therefore |AB|=\sqrt{(5-4)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}$，故选 B.

9. C 【解析】由题意可知，过原点且与圆相切的直线共有 2 条，此时在两坐标轴上的截距都是 0；当圆的切线在两坐标轴上截距相等且不为 0 时，易知满足题意的切线共有 2 条. 综上共计 4 条.

10. C 【解析】根据三视图中的正视图与俯视图可以看出该几何体的一个基本形式是底面有 7 个正方体，正对面有 6 个正方体. 要使体积最小，可使除正对面以外，底面正方体只有一层，此时一共有 $6+4=10$（个）正方体，体积为 10；欲使体积最大，可在正对面后左侧摆三层，中间摆两层，右侧摆一层，结合俯视图中缺少的两个，一共有 $6\times3-2=16$（个），体积为 16.

11. B 【解析】设 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，$g(x)=\lg x$，则方程根的个数就是两个函数的图象交点的个数. 如图所示，在同一平面直角坐标系中画出这两个函数的图象.



第 11 题图

由图可得，函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 与 $g(x)=\lg x$ 仅有 1 个交点，所以方程仅有 1 个根.

12. D 【解析】由题图显然可知 BE 与面 PAD 不平行. BE 与 BC 成 30° 角，所以 BE 与 AD 成 30° 角. 又因为 AD 不是 BE 在面 PAD 内的射影，由最小角定理可知，BE 与面 PAD 所成角小于 30°. 故选 D.

13. ①② 【解析】斜二测画法保持平行性和相交性不变，即平行直线的直观图还是平行直线，相交直线的直观图还是相交直线，故①②正确；但是斜二测画法中平行于 y 轴的线段在直观图中长度为原来的一半，则正方形的直观图不是正方形，菱形的直观图不是菱形，所以③④不正确.

14. 3 【解析】$\sqrt{a^2+b^2}$ 表示点 M 到原点 $(0,0)$ 的距离，而点 M 在直线 $3x+4y-15=0$ 上，所以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值即为原点 $(0,0)$ 到直线 $3x+4y-15=0$ 的距离，其值为 3.

15. 2 【解析】因为点 A 不在直线 $x+2y-3=0$ 上，所以两条直线互相平行，且点 A 到它们的距离相等，

所以 $\begin{cases}2a=4,\\\frac{|1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+16}},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=-6\end{cases}$（舍去）.

16. $(x-1)^2+(y+1)^2=9$ 【解析】设圆心为 $M(x,y)$，由 $|AB|=6$ 知，则 M 的半径 $r=3$，则 $|MC|=3$，即

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=3$，所以$(x-1)^2+(y+1)^2=9$.

17.【解析】若 $m=0$，l_1 的方程为：$x=-6$，l_2 的方程为：$2x-3y=0$，此时 l_1 与 l_2 相交；若 $m\neq 0$，由$\frac{m-2}{1}=\frac{3}{m}$得 $m=-1$ 或 $m=3$，由$\frac{3}{m}=\frac{2m}{6}$得 $m=\pm 3$；

故(1)当 $m\neq -1$ 且 $m\neq 3$ 时，$\frac{m-2}{1}\neq\frac{3}{m}$，$l_1$ 与 l_2 相交；

(2)当 $m=-1$ 时，$\frac{m-2}{1}=\frac{3}{m}\neq\frac{2m}{6}$，$l_1$ 与 l_2 平行；

(3)当 $m=3$ 时，$\frac{m-2}{1}=\frac{3}{m}=\frac{2m}{6}$，$l_1$ 与 l_2 重合.

18.【解析】设圆柱的底面半径为 r，高为 h，

则 $V_{圆柱}=\pi r^2h$，

题图中圆锥的底面半径为 r，高为 h，

则 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$，

球的半径为 r，所以 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^2$，

又 $h=2r$，

所以 $V_{圆锥}:V_{球}:V_{圆柱}$

$=\left(\frac{1}{3}\pi r^2h\right):\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right):(\pi r^2h)$

$=\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right):\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right):(2\pi r^3)=1:2:3$.

19.【解析】$\odot C$ 的标准方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

(1)点 C 关于 x 轴的对称点为 $C'(2,-2)$，过点 A、C'的直线方程：$x+y=0$ 为光线 l 的方程.

(2)点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3,-3)$，设过点 A'的直线为 $y+3=k(x+3)$，即 $kx-y+3k-3=0$ 当该直线与 $\odot C$ 相切时，有$\frac{|2k-2+3k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1\Rightarrow k=\frac{4}{3}$或 $k=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 过 A'的$\odot C$ 的两条切线为 $y+3=\frac{4}{3}(x+3)$，$y+3=\frac{3}{4}(x+3)$，令 $y=0$，得 $x_1=-\frac{3}{4}$，$x_2=1$.

$\therefore$ 反射点 M 在 x 轴上的活动范围是$\left[-\frac{3}{4},1\right]$.

20.【解析】(1)设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 且$|a|=|b|$，①

又$\because P(1,2)$在直线 l 上，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. ②

由①②解得 $a=3$，$b=3$ 或 $a=-1$，$b=1$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为

$x+y-3=0$ 或 $x-y+1=0$.

(2)因为(1)中所求得的两条直线互相垂直，所以 y 轴被两直线截得的线段即是所求圆的直径且圆经过 P 点，令圆心为$(0,b)$，又 $x+y-3=0$ 和 $x-y+1=0$ 在 y 轴上的截距分别为 3 和 1，

则 $1^2+(b-2)^2=\left(\frac{3-1}{2}\right)^2=r^2$，得到 $b=2$.

$\therefore$ 所求圆的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

21.【解析】(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，

$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AD'E$ 中，$AE=\sqrt{D'A^2+D'E^2}=\sqrt{2}$，

$\because AB^2=2^2=BE^2+AE^2$，

$\therefore AE\perp BE$.

$\because$ 平面 $AED'\perp$ 平面 $ABCE$，且交线为 AE，

$\therefore BE\perp$ 平面 AED'.

$\because AD'\subset$ 平面 AED'，

$\therefore AD'\perp BE$.

(2)设 AC 与 BE 相交于点 F，由(1)知 $AD'\perp BE$，

$\because AD'\perp ED'$，

$\therefore AD'\perp$ 平面 EBD'.

$\because AD'\subset$ 平面 ABD'，

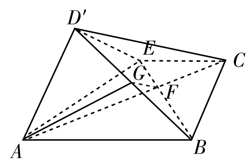
$\therefore$ 平面 $ABD'\perp$ 平面 EBD'，且交线为 BD'.

如图，作 $FG\perp BD'$，垂足为 G，则 $FG\perp$ 平面 ABD'，

连结 AG，则$\angle FAG$ 是直线 AC 与平面 ABD'所成的角.

由平面几何的知识可知$\frac{EF}{FB}=\frac{EC}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore EF=\frac{1}{3}EB=\frac{\sqrt{2}}{3}$.



第 21 题图

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2+\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBD'$ 中，$\frac{FG}{FB}=\frac{D'E}{D'B}$，可求得 $FG=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

$\therefore\sin\angle FAG=\frac{FG}{AF}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{9}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$.

即直线 AC 与平面 ABD'所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{15}$.

22.【解析】(1)如图①，连结 AC、BD 交于菱形的中心 O，过 O 作 $OG\perp AF$，G 为垂足. 连结 BG、DG. 由 $BD\perp AC$，$BD\perp CF$ 得 $BD\perp$ 平面 ACF，故 $BD\perp AF$. 于是 $AF\perp$ 平面 BGD，所以 $BG\perp AF$，$DG\perp AF$，$\angle BGD$ 为二面角 $B-AF-D$ 的平面角.

由 $FC\perp AC$，$FC=AC=2$，得$\angle FAC=\frac{\pi}{4}$，$OG=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $OB\perp OG$，$OB=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\angle BGD=2\angle BGO=\frac{\pi}{2}$.

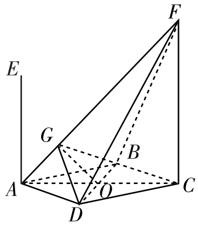
即二面角 $B-AF-D$ 的大小为$\frac{\pi}{2}$.

第 22 题图

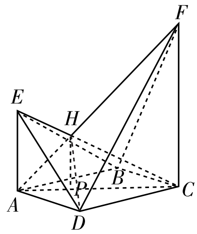
(2)如图②，连 EB、EC、ED、AC，设直线 AF 与直线 CE 相交于点 H，则四棱锥 $E-ABCD$ 与四棱锥 $F-ABCD$ 的公共部分为四棱锥 $H-ABCD$.

过 H 作 $HP\perp$ 平面 $ABCD$，P 为垂足.

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$FC\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面



①



②

ACFE ⊥ 平面 $ABCD$,从而 $P\in AC$,$HP\perp AC$.

由$\dfrac{HP}{CF}+\dfrac{HP}{AE}=\dfrac{AP}{AC}+\dfrac{PC}{AC}=1$,得 $HP=\dfrac{2}{3}$.

又因为 $S_{菱形ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\sqrt{2}$,

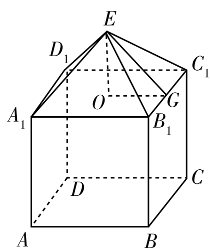
故四棱锥 $H-ABCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{菱形ABCD}\cdot HP=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

即四棱锥 $E-ABCD$ 与四棱锥 $F-ABCD$ 的公共部分的体积为$\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

期末测评试题(二)

1. C 【解析】由$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1\Rightarrow 3x-2y+6=0$. 故选 C.

2. A 【解析】将几何体还原,如图,该几何体是由一个边长为 4 的正方体和一个底面边长为 4,高为 2 的正四棱



第 2 题图

锥构成的. 在正四棱锥中,可得 $EG=2\sqrt{2}$. 四棱锥的侧面积为 $S_1=4\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=16\sqrt{2}$,正方体除去一个面的表面积为 $S_2=5\times4^2=80$,所以几何体的表面积 $S=80+16\sqrt{2}$.

3. B 【解析】由三视图易知共有 4 块长方体木块.

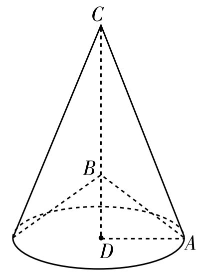
4. B 【解析】AB 中点为$\left(\dfrac{1+3}{2},\dfrac{2+1}{2}\right)$,即$\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$,$k_{AB}=\dfrac{2-1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$,$AB$ 的中垂线的斜率为 2,只有 B 项符合要求. 故选 B.

5. C 【解析】由题意知圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2+2-14|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$,∴ 圆上点到直线的距离最大值为 $d+r=8\sqrt{2}$,最小值为 $d-r=2\sqrt{2}$,因此最大距离与最小距离的差为 $6\sqrt{2}$,故选 C.

6. D 【解析】如图,$\triangle ABC$ 绕直线 BC 旋转一周形成一个组合体:圆锥 CD 中挖去一个小圆锥 BD,且两圆锥同底.

∵ $\angle ABD=60°$,$AB=2$,∴ $AD=\sqrt{3}$,$BD=1$.

∴ 该几何体体积为 $V=V_{CD}-C_{BD}=\dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot(2.5-1)=\dfrac{3}{2}\pi$.



第 6 题图

7. C 【解析】由题意知圆心 Q 的坐标为$(1,0)$,因为 $QP\perp AB$,$k_{QP}=-1$,所以 $k_{AB}=1$,所以直线 AB 的方程为 $y+1=x-2$,即 $x-y-3=0$,故选 C.

8. C 【解析】由三视图可知底面三角形斜边的中点即为外接球的球心,所以外接球的半径 $r=1$,故表面积为 $4\pi r^2=4\pi$.

9. A 【解析】在正三棱锥 $S-ABC$ 中,易得 $SA\perp BC$. 又 $SA\perp BE$,因此 $SA\perp$ 平面 SBC,故正三棱锥 $S-ABC$ 的各侧面是全等的等腰直角三角形,设$\triangle ABC$ 的中心为点 O,则 O 为点 S 在底面 ABC 内的射影,所以有 $\cos\angle SBA=\cos\angle ABO\cdot\cos\angle SBO$,即 $\cos45°=\cos30°\cdot\cos\angle SBO$,∴ $\cos\angle SBO=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,选 A.

10. D 【解析】$A(2,1)$、$B(4,2)$、$C(2,\lg2)$、$D(4,\lg4)$,

所以 $k_{AB}=\dfrac{1}{2}$,$k_{CD}=\dfrac{\lg2}{2}$,

所以 AB 的方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$,即 $y=\dfrac{1}{2}x$;

CD 的方程为 $y-\lg2=\dfrac{\lg2}{2}(x-2)$,即 $y=\dfrac{\lg2}{2}\cdot x$.

11. C 【解析】由已知得,圆心为 $C(5,1)$,半径为$\sqrt{2}$,设过点 P 作的两条切线与圆的切点分别为 M、N,当 CP 垂直于直线 $y=x$ 时,l_1、l_2 关于 $y=x$ 对称. $|CP|$ 为圆心到直线 $y=x$ 的距离,即$|CP|=\dfrac{|5-1|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$,$|CM|=\sqrt{2}$,故$\angle CPM=30°$,$\angle NPM=60°$,选 C.

12. D 【解析】两圆关于直线 l 对称，则直线 l 为两圆圆心连线的垂直平分线. 圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $O(0,0)$，圆 $x^2+y^2-6x+6y+14=0$ 的圆心为 $P(3,-3)$，则线段 OP 的中点为 $Q\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，其斜率 $k_{OP}=\frac{-\frac{3}{2}-0}{\frac{3}{2}-0}=-1$，则直线 l 的斜率为 $k=1$，故直线 l 的方程为 $y-\left(-\frac{3}{2}\right)=x-\frac{3}{2}$，即 $x-y-3=0$，故选 D.

13. $\frac{3\pi}{4}$(或 $135°$) 【解析】$\because$ 直线 $ax+my-2a=0$ 过点 $(1,1)$，$\therefore m=a$，$\therefore$ 直线 $ax+my-2a=0$ 可化为 $ax+ay-2a=0$，又 $\because m\neq 0$，$\therefore a\neq 0$，直线斜率 $k=-1$，$\therefore$ 直线的倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$(或 $135°$).

14. -10 【解析】由点 A 关于直线 $y=1-2x$ 的对称点 B 也在圆 C 上，知直线 $y=1-2x$ 垂直平分线段 AB，所以直线 $y=1-2x$ 过圆 $C:x^2+y^2+4x+my-5=0$ 的圆心 $\left(-2,-\frac{m}{2}\right)$，解得 $m=-10$.

15. 6 $2\sqrt{3}$ 【解析】由 $4\pi R^2=144\pi$，得 $R=6$，

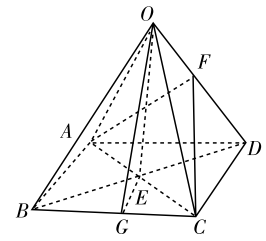
又 P、Q、R 三点中每两点间的球面距离均为 3π，

$\therefore \angle POQ=\angle POR=\angle QOR=\frac{\pi}{2}$，$PQ=PR=RQ=6\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle PQR$ 外接圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{6}$，

$\therefore d=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$.

16. ①②③ 【解析】如图，设 BD，AC 交于点 E，则 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore OE\perp BD$. 又 $BD\perp AC$，$AC\cap OE=E$，$\therefore BD\perp$ 平面 AOC，$\therefore BD\perp OA$，①正确；易知 $OD>ED$，$OC>EC$，且 $OD=OC$，又 $ED^2+EC^2=CD^2$，$\therefore OD^2+OC^2>CD^2$，$\therefore$ 侧面为锐角三角形，②正确；作 $EG\perp BC$ 于 G，连接 OG，则 $\tan\angle OGE=\frac{OE}{EG}=\frac{2OE}{AD}$，即侧面与底面所成二面角的正切值为 $\frac{2OE}{AD}$，又易知侧棱与底面所成角的正切值为 $\frac{2OE}{BD}$，又 $AD<BD$，故 $\frac{2OE}{AD}>\frac{2OE}{BD}$，③正确；作 $CF\perp OD$ 于 F，连接 AF，则 $AF\perp OD$，$\angle AFC$ 为二面角 $A-OD-C$ 的平面角，又 $AF^2+CF^2-AC^2=AD^2-FD^2+CD^2-FD^2-CD^2-AD^2<0$，易知 $\angle AFC$ 为钝角，$\therefore$ 相邻两侧面所成的二面角一定为钝角，故④错误.



第 16 题图

17.【解析】(1)设 $P(2,3)$ 关于 l 对称的点为 $P'(a,b)$，则有 $P'P\perp l$ 且 $P'P$ 的中点在直线 l 上，

则有 $\begin{cases}\frac{b-3}{a-2}\times 2=-1,\\ 2\times\frac{a+2}{2}-\frac{b+3}{2}-4=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{22}{5},\\ b=\frac{9}{5},\end{cases}$ $\therefore P'\left(\frac{22}{5},\frac{9}{5}\right)$.

(2)设 $P(x,y)$ 是所求对称直线 l_2 上任意一点，则 $P(x,y)$ 关于直线 l 的对称点 $P'(x_1,y_1)$ 必在 l_1 上，由题意得

$\begin{cases}\frac{x+x_1}{2}+\frac{y+y_1}{2}-2=0,\\ \frac{y-y_1}{x-x_1}\times(-1)=-1,\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=-y+2,\\ y_1=-x+2,\end{cases}$

又 $\because P'(x_1,y_1)$ 在直线 l_1 上，

$\therefore -y+2+7(-x+2)-6=0$，

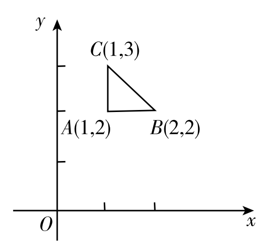
化简得直线 l_2 的方程为 $7x+y-10=0$.

18.【解析】如图所示，设 $P(x,y)$，则 $l_{BC}:x+y-4=0$，

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}(y-2)$，

$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot|x+y-4|$，

$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}(x-1)$，



第 18 题图

由 $\begin{cases}\frac{y-2}{x-1}=\frac{1}{3},\\ \frac{y-2}{|x+y-4|}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=\frac{13}{6}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=\frac{5}{2}.\end{cases}$ (舍)

所以 $P\left(\frac{3}{2},\frac{13}{6}\right)$.

19.【解析】如图. (1)$\because PA^2+AB^2=5$，$PB^2=5$，$\therefore PA\perp AB$，

同理可知：$PA\perp AD$，

$\because AB\cap AD=A$，

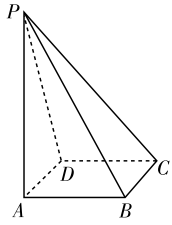
$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore CB\perp PA$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore CB\perp AB$，又 $AB\cap PA=A$，

$\therefore CB\perp$平面 PAB.

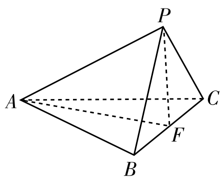


第 19 题图

(2)由(1)知 PA 为棱锥的高，

$\therefore V_{四棱锥P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\cdot PA=\frac{2}{3}$.

20.【证明】(1)如图，由 $PB=PC=2$，$PA=3$，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60°$，得 $BC=2$，$AC=\sqrt{7}$，$AB=\sqrt{7}$. 取 CB 中点 F，连结 AF、PF.



第 20 题图

在等边三角形 BPC 中，$PF\perp BC$.

在等腰三角形 BAC 中，$AF\perp BC$，

所以 $BC\perp$平面 PAF，则 $BC\perp PA$.

(2)在等边三角形 BPC 中，$PF=\sqrt{3}$，$BC=2$.

在等腰三角形 BAC 中，$AF=\sqrt{AC^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$.

又 $PA=3$，而 $(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2=3^2$，即 $AF^2+PF^2=PA^2$，

所以 $PF\perp AF$. 又 $PF\perp BC$，所以 $PF\perp$平面 ABC.

又 $PF\subset$平面 PBC，

故平面 $PBC\perp$平面 ABC.

21.【解析】(1) $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(AD+BC)\times AB\times SA=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1\times1=\frac{1}{4}$.

(2) $\because SA\perp$面 $ABCD$，$BC\subset$面 $ABCD$，$\therefore SA\perp BC$.

又 $\because AB\perp BC$，$SA\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$面 SAB.

$\because BC\subset$面 SBC，$\therefore$ 面 $SAB\perp$面 SBC.

(3)连接 AC，则 $\angle SCA$ 就是 SC 与底面 $ABCD$ 所成的角.

在 $Rt\triangle SCA$ 中，$SA=1$，$AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\tan\angle SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$即为所求.

22.【解析】(1)由题设，圆心 C 是直线 $y=2x-4$ 和 $y=x-1$ 的交点，解得点 $C(3,2)$，于是切线的斜率必存在. 设过 $A(0,3)$ 的圆 C 的切线方程为 $y=kx+3$.

由题意，得$\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{3}{4}$，

故所求切线方程为 $y=3$ 或 $3x+4y-12=0$.

(2)因为圆心在直线 $y=2x-4$ 上，

所以圆 C 的方程为 $(x-a)^2+[y-2(a-2)]^2=1$.

设点 $M(x,y)$，因为 $MA=2MO$，

所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，化简得 $x^2+y^2+2y-3=0$，即 $x^2+(y+1)^2=4$，所以点 M 在以 $D(0,-1)$ 为圆心，2 为半径的圆上.

由题意，点 $M(x,y)$ 在圆 C 上，所以圆 C 与圆 D 有公共点，

则 $|2-1|\leqslant CD\leqslant2+1$，即 $1\leqslant\sqrt{a^2+(2a-3)^2}\leqslant3$.

整理，得 $-8\leqslant5a^2-12a\leqslant0$.

由 $5a^2-12a+8\geqslant0$，得 $a\in\mathbf{R}$；

由 $5a^2-12a\leqslant0$，得 $0\leqslant a\leqslant\frac{12}{5}$.

所以点 C 的横坐标 a 的取值范围为 $[0,\frac{12}{5}]$.