答案与解析

第一章　立体几何初步

1.1　空间几何体

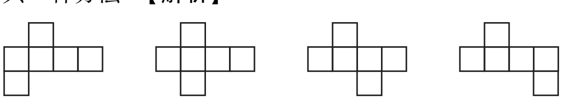
1.1.1　构成空间几何体的基本元素

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】平面是平直、无厚度、无限延展的. 所以①,②正确.
2. C 【解析】圆柱的侧面是一个曲面,但圆柱的侧面有无数条直线——母线.
3. B 【解析】被平面遮住的部分应画虚线,故(1)(4)正确.
4. 点动成线
5. 2　3 或 4 【解析】第二空,若两个平面平行,则它们将空间分成 3 部分,若两个平面相交,则它们将空间分成 4 部分.
6. (1)错误. 因为长方体由六个矩形(包括它的内部)围成,注意"平面"与"矩形"的本质区别;(2)正确;(3)正确.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】平面无大小、无厚度、无边际,所以只有④是正确的. 应选择 A.
2. B 【解析】正方体展开图有很多种,可以通过实物观察,选一个面作为底面,通过空间想象操作完成. 不妨选字母 D 所在的面为底面,可以得到 A,F 是相对的面,E 与 D 相对;若选 F 做底面,则仍然得到 A,F 是相对的面,E 与 D 相对,则与 B 相对的是字母 C.
3. C 【解析】直线的平移,可以形成平面或曲面,命题 A 不正确;当两直线平行时旋转形成柱面,命题 B 不正确;曲线平移的方向与曲线本身所在的平面平行时,不能形成曲面,D 不正确,只有 C 正确. 故选 C.
4. D 【解析】被遮住的地方应该画成虚线或不画,故 D 图错误.
5. ④ 【解析】①$ABCD$,②$A_1B_1C_1D_1$,③A_1B_1BA,按某一方面平移可以得到正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,④A_1BCD_1 平移不能得到正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
6. 正方体 【解析】题图中由六个正方形组成,可以动手折叠试验,得到正方体.
7. 顶点 A、B、C、D、M、N;棱 AB、BC、CD、DA、MA、MB、MC、MD、NA、NB、NC、ND;面 MAD、面 MAB、面 MBC、面 MDC,面 NAB、面 NAD,面 NDC,面 NBC.
8. 共 4 种方法 【解析】



第 8 题图

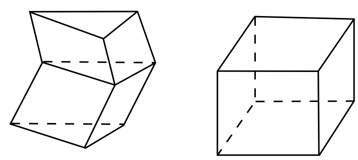
9. 需要剪断 7 条棱. 因为正方体有 6 个面,12 条棱,两个面有一条棱相连,展开后六个面就有 5 条棱相连,所以剪断 7 条棱. 规律是正方体的平面展开图只能有 5 条棱相连,但是,有 5 条棱相连的 6 个正方形图形不一定是正方体的平面展开图.

1.1.2　棱柱、棱锥和棱台的结构特征

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】A 错,两个底面;B 正确,最简单的是三棱柱.
2. C 【解析】由棱柱的定义及性质,易知①③④为棱柱,故选 C.
3. D 【解析】A、B 都错,反例如图(1);C 也错,反例如图(2),上、下底面是全等的菱形,各侧面是全等的正方形,它不是正方体;根据棱柱的定义,知 D 对.



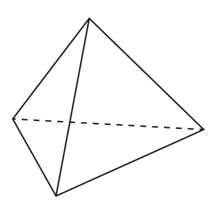
(1)　(2)

第 3 题图

4. 3 【解析】三个几何体都是棱柱.
5. 12 【解析】是五棱柱,侧棱长相等为 $60\div5=12(\mathrm{cm})$.
6. (1)直四棱柱;(2)正方体(或正六面体);(3)正八面体.

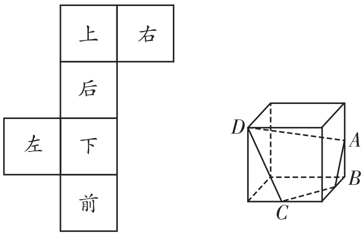
★ 课后作业 ★

1. B 【解析】根据平行六面体的定义可知,①是真命题;平行六面体的底面是矩形,不能保证它是长方体,只有再附加直棱柱的条件才可以,故②是假命题;直四棱柱的底面如果只是一般的四边形,那么不能成为直平行六面体,故③是假命题.
2. D 【解析】A、B、C 中底面多边形的边数与侧面数不相等.
3. C 【解析】图 C 不能围成正方体.
4. C 【解析】A、B 选项中的底面虽然是正方体,但不能保证是直棱柱,D 选项中虽然是直棱柱,但不能保证底面是正方形.
5. 4 【解析】搭成如图所示的三棱锥,共有 4 个三角形. 解答此题时思路不能只局限于平面图形,还应考虑立体图.



第 5 题图

6. $2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$ 【解析】将原展开图按图(1)所示位置折叠,可还原成正方体,如图(2).



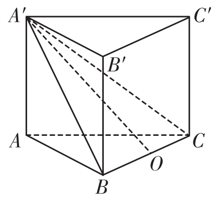
(1) (2)

第 6 题图

7. 如图,正三棱柱 $ABC-A'B'C'$,符合题意的截面为 $\triangle A'BC$.

在 $Rt\triangle A'B'B$ 中,$A'B'=4,BB'=6$,所以 $A'B=\sqrt{A'B'^2+BB'^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

在等腰 $\triangle A'BC$ 中,取 BC 中点 O,连接 $A'O$,则 $BO=\frac{1}{2}BC=2,A'O\perp BC$,所以 $A'O=\sqrt{A'B^2-BO^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-2^2}=4\sqrt{3}$,

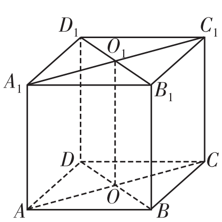


第 7 题图

所以 $S_{\triangle A'BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A'O=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$,

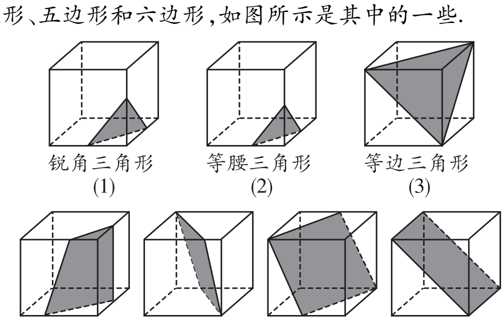
所以这个截面的面积为 $8\sqrt{3}$.

8. 如图所示,已知棱柱 AC_1 是直平行六面体,所以两个对角面都是矩形,其侧棱 AA_1 是矩形的高,$AB=23$ cm,$AD=11$ cm,$AA_1=23$ cm,且 $BD:AC=2:3$,设 $BD=2x$,则 $AC=3x$,由平行四边形对角线的性质得 $BD^2+AC^2=2(AB^2+AD^2)$,即 $(2x)^2+(3x)^2=2\times(23^2+11^2)$,化简得 $13x^2=1\ 300$,所以 $x=10$. 所以对角线 $BD=2x=20$ cm,$AC=3x=30$ cm,故对角面 BDD_1B_1 的面积是 $BD\cdot BB_1=20\times23=460(cm^2)$,对角面 ACC_1A_1 的面积是 $AC\cdot AA_1=30\times23=690(cm^2)$.

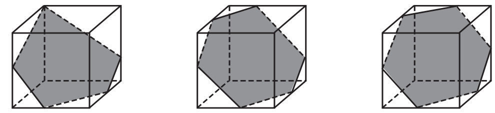


第 8 题图

9. 正方体中,随着截面位置的不同,截面可以是三角形、四边形、五边形和六边形,如图所示是其中的一些.


锐角三角形 (1) 等腰三角形 (2) 等边三角形 (3)

梯形 (4) 平行四边形 (5) 菱形 (6) 矩形 (7)


任意五边形 (8) 任意六边形 (9) 正六边形 (10)

第 9 题图

第二课时

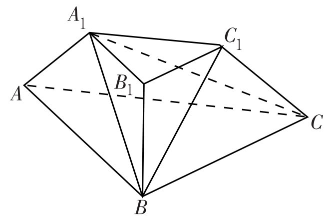
★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】每个三角形都可以作为底面.

2. D 【解析】只有 D 符合棱台的特征.

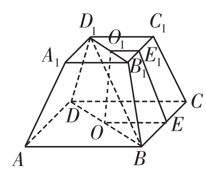
3. A 【解析】底面为八边形,须有 8 个侧面.

4. 3 【解析】如图,分割为 $A-A_1BC$, $B_1-A_1BC_1$, $C-A_1BC_1$,3 个三棱锥.



第 4 题图

5. $\sqrt{10}$ 【解析】如图,四边形 BDD_1B_1 是等腰梯形,$B_1D_1=5\sqrt{2}$, $BD=7\sqrt{2}$, $BD_1=9$, 所以 $OO_1=\sqrt{BD_1^2-\left(\frac{BD+B_1D_1}{2}\right)^2}=3$. 又 E_1,E 分别为 B_1C_1,BC 的中点, 所以 $O_1E_1=\frac{5}{2}$, $OE=\frac{7}{2}$. 所以在直角梯形 OEE_1O_1 中,斜高 $E_1E=\sqrt{OO_1^2+(OE-O_1E_1)^2}=\sqrt{10}$.



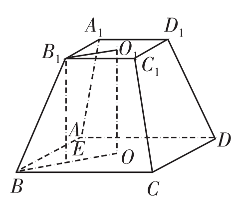
第 5 题图

6. (1)不正确. 四棱锥的底面是正方形,它的侧棱可以相等,也可以不等;(2)不正确. 五棱锥除了五条侧棱外,底面上还有五条棱,故共 10 条棱;(3)正确.

★ 课后作业 ★

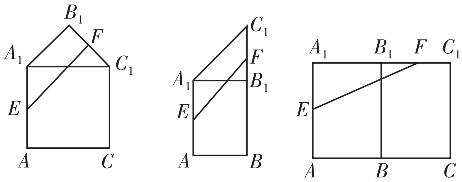
1. D 【解析】根据棱台的定义可知,棱台必备的两个条件:底面平行,侧棱延长后相交于一点.

2. C 【解析】如图,由题设可知 $O_1B_1=\sqrt{2}$, $OB=3\sqrt{2}$, $OO_1=2$,转化到直角梯形 BOO_1B_1 中,作 $B_1E\perp BO$ 于 E 点,则侧棱 $BB_1=\sqrt{2^2+(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$($O_1$,$O$ 分别为上、下底面的中心).



第 2 题图

3. C 【解析】从 E 到 F 有以下三种可能的走法路程较短,即三种棱柱的表面展形图如图(1),(2),(3).



(1) (2) (3)

第 3 题图

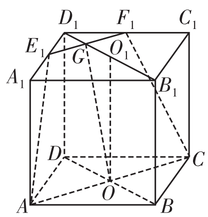
(1) 中 $EF=\frac{1}{2}(A_1B_1+AC_1)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

(2) 中 $EF=\sqrt{AB^2+\left(\frac{1}{2}BC_1\right)^2}=\sqrt{2+\frac{6+4\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}{2}$.

(3) 中 $EF=\sqrt{A_1E^2+A_1F^2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

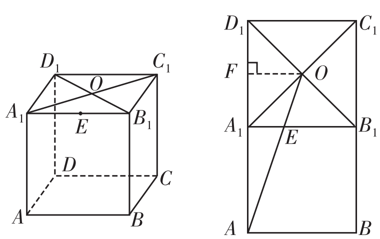
可见(1)中 EF 最短. 本题是将棱柱沿不同的表面展开,转化为求平面图形中线段的长度.

4. A 【解析】如图,取 C_1D_1 的中点 F_1,则梯形 ACF_1E_1 为过点 A,C,E_1 的截面,又梯形 ACF_1E_1 的高 $OG=\frac{3}{2\sqrt{2}}a$,故梯形 ACF_1E_1 的面积为 $S=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a+\sqrt{2}a\right)\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}}}{2}=\frac{9}{8}a^2$.



第 4 题图

5. $\frac{\sqrt{10}}{2}a$ 【解析】将面 ABB_1A_1 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开,如图(2),连接 AO 交 A_1B_1 于点 E,则此时 $AE+EO=AO$ 为所求最小值. 作 $OF\perp A_1D_1$,垂足为 F,则 $AF=\frac{3a}{2}$, $OF=\frac{1}{2}a$,所以 $AO=\sqrt{AF^2+OF^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}a$.

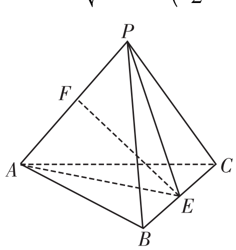


(1) (2)

第 5 题图

6. $2\sqrt{2}$ 【解析】如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,$AE=2\sqrt{3}$,在 $\triangle PBC$ 中,$PE=2\sqrt{3}$.

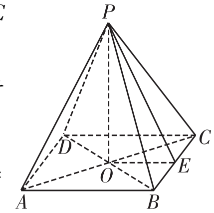
在 $\triangle PAE$ 中,$AE=PE=2\sqrt{3}$,$PA=4$,F 为 PA 的中点,所以 $EF\perp PA$,所以 $EF=\sqrt{AE^2-\left(\frac{1}{2}AP\right)^2}=2\sqrt{2}$.



第 6 题图

7. 如图,设 PO 为四棱锥的高,E 为 BC 的中点,则 $PE\perp BC$,PE 为斜高.

因为正方形 $ABCD$ 的面积为 36,所以边长 $AB=6$,所以 $OE=3$,$OB=3\sqrt{2}$,所以 $PB=\sqrt{PO^2+BO^2}=\sqrt{34}$,$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=5$,所以此四棱锥的侧棱长为 $\sqrt{34}$,斜高为 5.



第 7 题图

8. 沿长方体的一条棱剪开,使 A 和 C_1 在同一平面上,求线段 AC_1 的长即可,有如图所示的三种剪法:

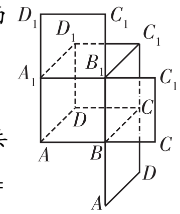
(1) 若将 C_1D_1 剪开,使面 AB_1 与面 A_1C_1 共面,可求得 $AC_1=\sqrt{4^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$.

(2) 若将 AD 剪开,使面 AC 与面 BC_1 共面,可求得 $AC_1=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=3\sqrt{10}$.

(3) 若将 CC_1 剪开,使面 BC_1 与面 AB_1 共面,可求得

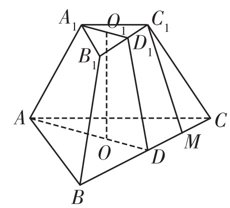
$AC_1=\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$.

比较可得蚂蚁爬行的最短路线长为 $\sqrt{74}$.



第 8 题图

9. 如图,D_1,D 分别为 B_1C_1 与 BC 的中点,则 D_1D 为斜高,作 $C_1M\perp BC$,垂足为 M,则 $C_1M=D_1D=\sqrt{CC_1^2-\left(\frac{BC-B_1C_1}{2}\right)^2}=2\sqrt{6}$ (cm),$O_1D_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (cm),$OD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=\sqrt{3}$ (cm),所以棱台的高



第 9 题图

$OO_1=\sqrt{D_1D^2-(OD-O_1D_1)^2}=\frac{\sqrt{213}}{3}$ (cm).

(2) 设截去的小正三棱锥的高为 x cm,

则根据相似三角形的性质,得

$\frac{x}{x+OO_1}=\frac{B_1C_1}{BC}$,即 $\frac{x}{x+\frac{\sqrt{213}}{3}}=\frac{4}{6}$,$x=\frac{2\sqrt{213}}{3}$.

所以截得此正三棱台的原正三棱锥的高为:

$\frac{2\sqrt{213}}{3}+\frac{\sqrt{213}}{3}=\sqrt{213}$ (cm).

1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】A 错误,这里需指明绕直角梯形与底边垂直的腰旋转;B 错误,圆锥是直角三角形绕一条直角边旋转而成;C 错误,圆柱是旋转体.

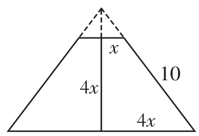
2. D

3. A 【解析】①错. 当两直线相交时,不形成柱面;②错. 也可能形成平面;③错. 若绕底边旋转,则形成组合体;④对. 据球的定义知,正确.

4. ④ 【解析】①错误. 圆柱的侧面展开图不一定是矩形,只有当圆柱沿它的一条母线切开,展开后才是一个矩形;②错误. 若两个一样的圆面不平行,那么这个几何体不是圆柱;③错误. 圆柱是一个封闭的几何体;④正确.

5. $480\ \text{cm}^2$ 【解析】所求截面是一个矩形,它的一边长为 15 cm,另一边长为 $2\times\sqrt{20^2-12^2}=32$ (cm),所以面积是 $15\times32=480(\text{cm}^2)$

6. 圆台的轴截面如图所示. 由题意可设圆台的上、下底面半径和高分别为 $x,4x,4x$,截得圆台的圆锥的高为 h,则 $(4x)^2+(4x-x)^2=10^2$. 因为 $x>0$,所以 $x=2$. 因为 $\frac{h}{h-4x}=\frac{4x}{x}$,所以 $h=\frac{16}{3}x=\frac{32}{3}$. 所以截得这个圆台的圆锥的底面积为 $\pi\times(4\times2)^2=64\pi$,高为 $\frac{32}{3}$.



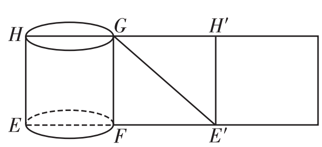
第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】只有将直角梯形 $ABCD$ 绕它垂直于两底的腰所在直线旋转一周时,形成的几何体才是圆台. 由于直角梯形 $ABCD$ 未指出哪两边平行,哪条腰与底垂直,故以 AB 边所在直线为轴旋转,形成的几何体形状不确定.

2. C 【解析】用旋转体截面性质进行判断. 平行于圆锥一条母线的截面不是多边形,因为它的边界有曲线段,只有过母线且过顶点作截面才会出现等腰三角形. 过圆台一个底面中心的截面若不经过轴,截面也不是多边形,更谈不上等腰梯形,只有过轴的截面才是等腰梯形,故 A、B、D 均错,故选 C.

3. D 【解析】圆柱的侧面展开如图所示,



第 3 题图

展开后 $E'F=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\pi$,

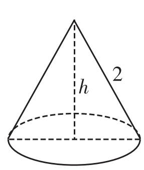
$\therefore E'G=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{4+\pi^2}$ (cm).

4. A 【解析】设圆锥的底面半径和高分别为 r、h,

$\because$ 扇形弧长为圆锥底面周长,

$\therefore \frac{1}{4}\times2\pi\times2=2\pi r$, $\therefore r=\frac{1}{2}$,

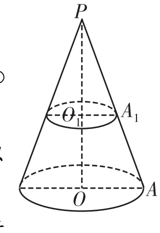
$\therefore$ 高 $h=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.



第 4 题图

$\therefore$ 轴截面面积 $S=\frac{1}{2}\times2r\cdot h=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

5. $1:(\sqrt{3}-1)$ 【解析】如图,由题意可知,$\frac{\pi\cdot O_1A_1\cdot PA_1}{\pi\cdot OA\cdot PA}=\frac{1}{3}$. 因为 $\triangle PO_1A_1\backsim\triangle POA$,所以 $\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{PA_1}{PA}=\frac{PO_1}{PO}$,所以 $\left(\frac{PO_1}{PO}\right)^2=\frac{O_1A_1\cdot PA_1}{OA\cdot PA}=\frac{1}{3}$,即 $\frac{PO_1}{PO}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $\frac{PO_1}{O_1O}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

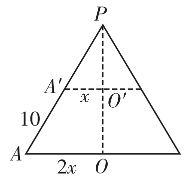


第 5 题图

6. 20 cm 【解析】由已知条件可知,该圆台上、下底面半径的比为 1∶2. 如图,设圆锥的母线长为 y cm,上、下底面半径分别为 x cm,$2x$ cm,在 $\text{Rt}\triangle POA$ 和 $\text{Rt}\triangle PO'A'$ 中,$O'A'\,/\!/\,OA$,

所以 $\frac{PA'}{PA}=\frac{O'A'}{OA}$,所以 $\frac{y-10}{y}=\frac{x}{2x}$,

所以 $y=20$.



第 6 题图

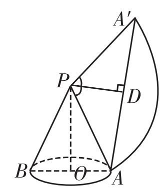
7. 如图所示,$\because OA=1, PO=2\sqrt{2}$, $\therefore PA=3$,

$\therefore \angle APA'=\frac{1}{3}\times360^\circ=120^\circ$.

作 $PD\perp AA'$,则 $\angle APD=60^\circ$,

$\therefore AA'=2AD=2\times3\times\sin60^\circ=3\sqrt{3}$,

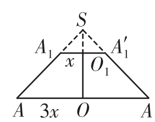
$\therefore$ 最短绳长为 $3\sqrt{3}$.



第 7 题图

8. 如图是圆台的轴截面.

依题意可设圆台上、下底面半径分别为 x cm,$3x$ cm,延长 AA_1,$A'A'_1$ 交 OO_1 的延长线于 S. 在 $\text{Rt}\triangle SOA$ 中,$\angle ASO=45^\circ$,则 $A_1O_1=SO_1=x$,$\angle SAO=45^\circ$,所以 $SO=AO=3x$,所以 $OO_1=2x$. $S_{轴截面}=\frac{1}{2}(6x+2x)\cdot2x=392$,所以 $x=7$. 所以圆台的高 $OO_1=2x=14$ (cm),母线长 $AA_1=\sqrt{2}OO_1=14\sqrt{2}$ cm.



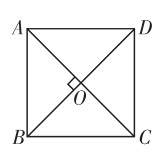
第 8 题图

第二课时

★ 课堂作业 ★

1. C

2. B 【解析】如图 $\triangle ABO$ 与 $\triangle CBO$ 绕 AC 旋转,分别得到一个圆锥.



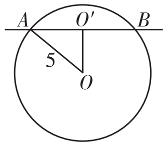
第 2 题图

3. B 【解析】设截面圆的半径为 r,则 $\pi r^2=16\pi$,所以 $r=4$,所以球心到截面圆圆心的距离 $d=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

4. ①③ 【解析】利用球的结构特征判断:①正确;②不正确,因为直径必过球心;③正确.

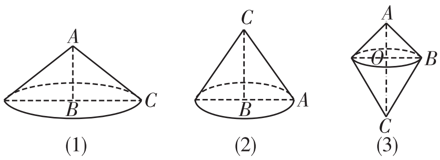
5. 4 【解析】过直线与球心作截面如图,则 $OA=5$,$AO'=$

3，$\therefore OO'=4$.



第 5 题图

6. 在 Rt△ABC 中，分别以三条边 AB、BC、AC 所在直线为轴旋转一周所得的几何体，如图. 其中图(1)和图(2)是两个不同的圆锥，它们的底面分别是半径为 4 和 3 的圆面，母线长均为 5. 图(3)是由两个同底圆锥构成的组合体，在圆锥 AO 中，AB 为母线，在圆锥 CO 中，CB 为母线.



第 6 题图

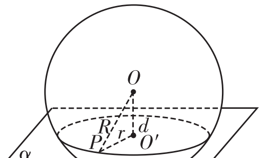
★ 课后作业 ★

1. B 【解析】外面的圆旋转形成一个球，里面的长方形旋转形成一个圆柱.

2. D 【解析】圆锥的除过轴的截面外，其他截面截圆锥得到的都不是三角形.

3. D 【解析】由题意得甲、乙两地所在大圆的圆心角为：$50°+70°=120°$，故球面距离为$\dfrac{120\times\pi R}{180}=\dfrac{2}{3}\pi R$. 明确经度、纬度的概念是解本题的关键.

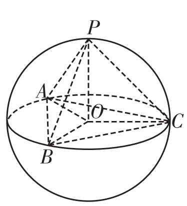
4. C 【解析】如图，设球的半径为 R，根据题意知截面圆的半径 $r=12$，球心与截面圆的距离 $d=R-8$. 由截面性质得：$r^2+d^2=R^2$，即 $12^2+(R-8)^2=R^2$，解得 $R=13$，所以选 C.



第 4 题图

5. 20 【解析】截面小圆半径 $r=15$ cm，球半球 $R=25$cm，$\therefore$ 截面到球心距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=20$ cm.

6. $\dfrac{7}{3}\pi R$ 【解析】如图，所求的最短路程为 P,A 间的球面距离加 A 与 B,B 与 C,C 与 P 之间的球面距离，由 $\angle AOB=\angle BOC=120°$，$\angle POA=\angle POC=90°$ 知所求距离为 $2\times\dfrac{120\pi R}{180}+2\times\dfrac{90\pi R}{180}=\dfrac{7}{3}\pi R$.

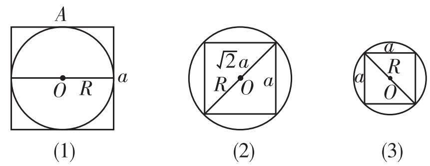


第 6 题图

7. (1) 正方体的内切球与各面的切点为正方体各面的中心，故作出经过正方体相对两面的中心且与棱平行的截面，则球的一个大圆是该正方形截面的内切圆. 如图(1)所示，易求得内切球的半径为$\dfrac{a}{2}$.

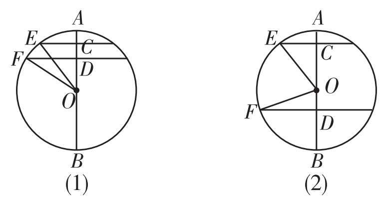
(2) 正方体的外接球与正方体的连接点为正方体各个顶点，故作出正方体的对角面，则球的一个大圆为对角面矩形的外接圆. 如图(2)所示，设外接球半径为 R，则 $(2R)^2=(\sqrt{2}a)^2+a^2$，解得 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

(3) 与正方体的各棱均相切的球与正方体相连接的点是正方体各棱的中点，应作出经过正方体一组平行棱中点的截面，则球的轴截面是该正方形截面的外接圆. 如图(3)所示，易求得球的半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.



第 7 题图

8. 如图所示，设球的大圆为圆 O，C、D 为两截面圆的圆心且两圆半径分别是 6 和 8，AB 为经过 C、O、D 的直径. 当两截面在球心同侧时，如图(1).



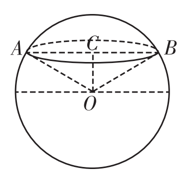
第 8 题图

则 $CD=OC-OD=\sqrt{OE^2-EC^2}-\sqrt{OF^2-DF^2}=2$.

当两截面在球心两侧时，如图(2).

则 $CD=OC+OD=\sqrt{OE^2-EC^2}+\sqrt{OF^2-DF^2}=14$.

9. 如图，设地球半径为 R，北纬 60°圆圆心为 C，半径为 r，在 Rt△OAC 中，$\angle OAC=60°$，$r=R\cos 60°=\dfrac{1}{2}R$. 又 A、B 两点的经度差为 180°，即 AB 为圆 C 的直径，所以 A、B 在北纬 60°圆上的距离为$\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r=\pi r=\dfrac{1}{2}\pi R$.



第 9 题图

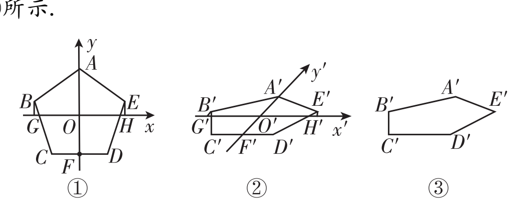
又 A、B 两点的球面距离为$\dfrac{1}{6}\cdot 2\pi R=\dfrac{\pi}{3}R$，

故$\dfrac{\dfrac{1}{2}\pi R}{\dfrac{1}{3}\pi R}=1.5$，即 A、B 两点沿纬度圆的距离是 A、B 两点球面距离的 1.5 倍.

1.1.4　投影与直观图

★ 课堂作业 ★

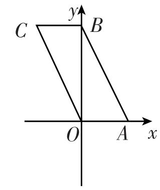
1. A
2. C 【解析】由点光源的中心投影的性质可知影子应为圆形.
3. B 【解析】平行线在斜二测直观图中仍为平行线，∴ 四边形 $A'B'C'D'$ 为平行四边形，$\angle D'A'B'=45°$，$A'B'=4$，$A'D'=\frac{1}{2}\times 2=1$. 作 $D'E\perp A'B'$，垂足为 E，∴ $D'E=1\times\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $S_{\text{四边形}A'B'C'D'}=A'B'\cdot D'E=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.
4. ②③ 【解析】因为当直线或线段与投射线平行时，其平行投影为一个点，故①不正确；②正确；因为经平行投影后的角度可以改变，平行性不变，故平行四边形的平行投影可能是矩形，故③正确；因为两平行直线的平行投影可能是一条直线或两个点，故④不正确；因为⑤中的两线段不一定平行，故⑤不正确.
5. 中位线
6. (1)如图①所示，在已知五边形 $ABCDE$ 中，取中心 O 为原点，对称轴 FA 为 y 轴，过点 O 与 y 轴垂直的是 x 轴，分别过 B、E 作 $GB/\!/y$ 轴，$HE/\!/y$ 轴，与 x 轴分别交于点 G、H，画对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$；
(2)如图②所示，以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $G'H'=GH$，分别过 G'、H' 在 x' 轴的上方作 $G'B'/\!/y'$ 轴，使 $G'B'=\frac{1}{2}GB$；作 $H'E'/\!/y'$轴，使 $H'E'=\frac{1}{2}HE$；在 y' 轴的点 O' 上方取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$，在点 O' 下方取 $O'F'=\frac{1}{2}OF$，并且以点 F' 为中点，画 $C'D'/\!/x'$ 轴，且使 $C'D'=CD$；
(3)连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$ 所得正五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图，如图③所示.



第 6 题图

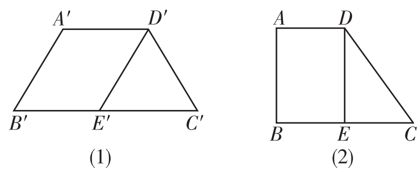
★ 课后作业 ★

1. A 【解析】因为当平面图形与投射线平行时，所得的投影是线段，所以题中的三个命题均为假命题.
2. C 【解析】原图是以 BC 为底边的等腰三角形，由 D 是 BC 的中点，知 $AD\perp BC$，故 $AB=AC>AD$.
3. B 【解析】画出原图形如图，该图为平行四边形，其一边 $OA=1$ cm，对角线 $OB=2\sqrt{2}$ cm，所以边 $AB=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$(cm)，所以其周长为 $2\times(1+3)=8$(cm).



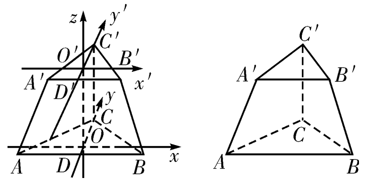
第 3 题图

4. D 【解析】如图(1)所示，等腰梯形 $A'B'C'D'$ 为水平放置的原平面图形的直观图，作 $D'E'/\!/A'B'$ 交 $B'C'$ 于 E'，由斜二测直观图的画法规则，直观图为等腰梯形$A'B'C'D'$的原平面图形为如图(2)所示的直角梯形$ABCD$，且 $AB=2$，$BC=1+\sqrt{2}$，$AD=1$，所以面积 $S_{\text{直角梯形}}=2+\sqrt{2}$.



第 4 题图

5. $\frac{2}{3}$ 【解析】由题知 $C_1D_1/\!/B_1A_1$，$CC_1/\!/B_1B$，则有 $\frac{C_1C}{B_1B}=\frac{SC_1}{SB_1}=\frac{C_1D_1}{B_1A_1}=\frac{2}{3}$.
6. ④ 【解析】对于①，若以该正方形的一组邻边所在的直线为 x 轴、y 轴，则结论正确；但若以该正方形的两条对角线所在的直线为 x 轴、y 轴，由于此时该正方形的各边均不在坐标轴上或与坐标轴平行，则其直观图中相邻两边长不一定符合“横不变，纵减半”的规则；对于②，水平放置的正三角形的直观图是一个底边长不变，高比原三角形高的一半还要短的三角形；对于③，只要坐标系选取的恰当，不等边三角形的水平放置的直观图可以是等边三角形.
7. (1)画轴，以底面$\triangle ABC$ 的垂心 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，平行于 AB 的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，以上底面$\triangle A'B'C'$ 的垂心 O' 与 O 的连线为 z 轴，建立空间坐标系；
(2)画下底面，在 xOy 平面上画$\triangle ABC$ 的直观图，在 y 轴上量取 $OC=\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm，$OD=\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm. 过 D 作 $AB/\!/x$ 轴，且 $AB=2$ cm，以 D 为中点，则$\triangle ABC$ 为下底面三角形的直观图；
(3)画上底面，在 z 轴上截取 $OO'=2$ cm，过 O' 作 x'轴$/\!/x$ 轴，y'轴$/\!/y$ 轴，在 y' 轴上量取 $O'C'=\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm，$O'D'=\frac{\sqrt{3}}{12}$ cm，过 D' 作 $A'B'/\!/x'$轴，且 $A'B'=1$ cm，且以 D'为中点，则$\triangle A'B'C'$为上底面三角形的直观图；
(4)连线成图，连接 AA'、BB'、CC'，并擦去辅助线，则三棱台 $ABC-A'B'C'$ 即为所要画的正三棱台的直观图.



第 7 题图

8. (1) 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=60°$，$AB=1.6$ 米，

则 $AC=\dfrac{AB}{\tan\angle ACB}=\dfrac{\sqrt{3}AB}{3}$，

$\therefore AC=\dfrac{1.6}{\sqrt{3}}\approx 0.92$（米）.

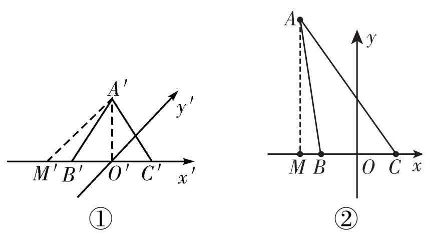
当 $0<AC\leqslant 0.92$ 米时，太阳光可直接射入室内.

(2) 当 $AC>0.92$ 米时，太阳光不能直接射入室内.

9. 如图①，(1) 取 $B'C'$ 所在的直线为 x' 轴，过 $B'C'$ 中点 O' 与 $O'x'$ 成 45°角的直线为 y' 轴，建立坐标系 $x'O'y'$；

(2) 过点 A' 作 $A'M'\,/\!/\,y'$ 轴交 x' 轴于 M' 点，连接 $O'A'$. 在正△$A'B'C'$ 中，设它的边长为 x，

因为 $O'A'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$\angle A'M'O'=45°$，所以 $O'A'=O'M'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，故 $A'M'=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x$；



第 9 题图

(3) 在直角坐标系 xOy 中，在 x 轴上 O 点左右两侧取到原点 O 距离为 $\dfrac{x}{2}$ 的点 B、C. 在 x 轴上 O 点左侧取到原点 O 距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 的点 M. 过点 M 在 x 轴上方作 y 轴的平行线并截取 $MA=\sqrt{6}x$，连接 AB、AC，则 △ABC 为 △$A'B'C'$ 的原图形（如图②）.

根据 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$，得 $\dfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{6}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$，所以 $x=a$.

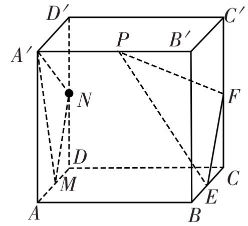
故 △$A'B'C'$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

1.1.5 三视图

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】球的三视图与它的摆放位置无关. 从任何方向看都是圆.

2. D 【解析】取 AD、DD' 的中点 M、N，即为 E、F 在平面 $ADD'A'$ 上的投影，P 在平面 $ADD'A'$ 上的投影是 A'，$\therefore$ △$A'MN$ 是截面 △PEF 在平面 $ADD'A'$ 上的投影，且 $A'M=A'N$，故 △$A'MN$ 是等腰三角形.



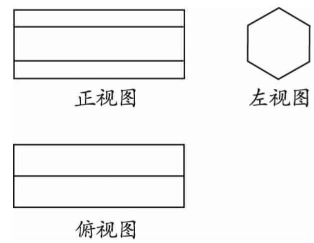
第 2 题图

3. D 【解析】由三视图可知该几何体为圆台.

4. 下面　右面

5. 圆锥

6. 所画三视图如图所示.

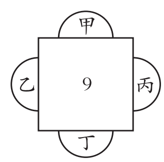


第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】分别将正方体六个面作为投射面，一一找出四边形 $AGFE$ 在该正方体面上的正投影即可，只有答案 B 不是.

2. D 【解析】按照叙述甲说他看到“6”，甲应该在上方的座位；乙说他看到“ᘏ”，应该在左侧的座位，同理，丁在下方，丙在右侧，这四个人的位置如图所示，故选 D.



第 2 题图

3. D 【解析】只有球的三视图都是圆，圆锥的俯视图和左视图不同，正方体放置的位置不同时三视图并不相同，圆柱的俯视图和主视图不同，正四面体的三视图并不相同.

4. B 【解析】由所给三视图，可以判定其对应的几何体为四棱锥.

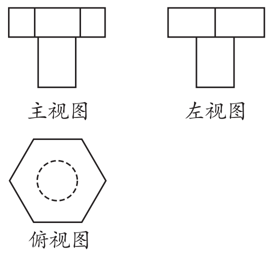
5. 正六棱台 【解析】由主视图和左视图可知此几何体为正棱台，再由俯视图可知它是正六棱台.

6. 10　15 【解析】由俯视图可知此几何体应是有三行和三列，且第一行的第二列、第三列都没有小立方块，其余的各列各行都有小立方块；再根据主视图，第一列中至少有一行是三层，第二列中至少有一行是二层，第三列只有一个层，这样就可推出小立方块的个数，最少要 10 个小立方块，最多要 15 个小立方块.

7. 主视图中底边长为 20，即为圆的直径，所以 $S_{底}=\pi\left(\dfrac{20}{2}\right)^2=100\pi$；$l_{母线}=\sqrt{30^2+\left(\dfrac{20}{2}\right)^2}=10\sqrt{10}$.

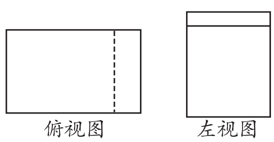
8. 该物体是由一个正六棱柱和一个圆柱组合而成的. 主视

图反映正六棱柱的三个侧面和圆柱侧面,左视图反映正六棱柱的两个侧面和圆柱侧面,俯视图反映该物体投影后是一个正六边形和一个圆(中心重合),它的三视图如图所示.

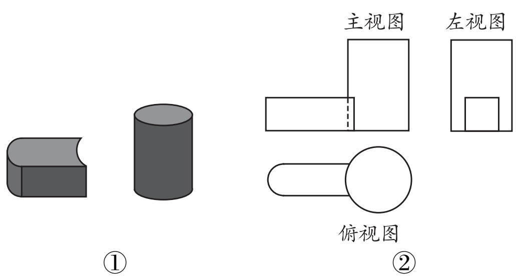


第 8 题图

9. 在题图中,题图(1)是由两个长方体组合而成的,主视图正确,俯视图错误,俯视图应该画出不可见轮廓线(用虚线表示),左视图轮廓是一个矩形,有一条可视的交线(用实线表示),正确画法如图甲. 题图(3)中的组合体可以看作是乙图①中几何体的组合,主视图与俯视图中都应画出中间的交线. 所以题图(4)不正确,正确画法如乙图②.



甲



乙

第 9 题图

1.1.6　棱柱、棱锥、棱台和球的表面积

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】设正方体的棱长为 a,正四面体的棱长为 $\sqrt{2}a$,则 $\frac{S_{正方体}}{S_{正四面体}}=\frac{6a^2}{4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3}$.

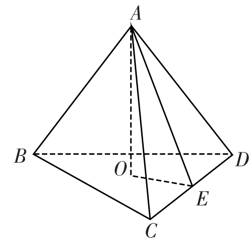
2. B 【解析】正四棱锥的底面积为 $S_底=a^2$,侧面积为 $S_侧=4\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}a^2$,故表面积为 $S_表=S_底+S_侧=(1+\sqrt{3})a^2$.

3. C 【解析】由 $C=2\pi r$ 得 $r=\frac{C}{2\pi}$,所以球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2=\frac{C^2}{\pi}$.

4. 8π 【解析】$S_侧=\pi Rl=\pi\times2\times\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=8\pi$.

5. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$ 【解析】本题中正三棱锥的侧面都是全等的等腰三角形,故全面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$.

6. 如图,设斜高 h',则 $h'=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}a$,所以侧面积 $S=3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{6}a\times a=\frac{\sqrt{15}}{4}a^2$.



第 6 题图

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】斜高 $h'=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{1}{2}a$,则 $S_侧=\frac{1}{2}\cdot3a\cdot\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}a^2$.

2. A 【解析】$S_{两底}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times6\times2=48\sqrt{3}$,$S_侧=6\times4\times6=144$,$\therefore S_表=144+48\sqrt{3}=48(3+\sqrt{3})$.

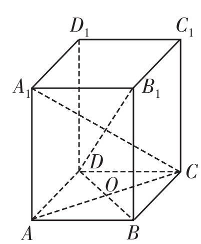
3. D 【解析】由三视图可知该几何体是底面为等腰梯形的直四棱柱(放倒了). 从三视图观察可得,该几何体由四个矩形面和两个等腰梯形面构成. $S_梯=\frac{(2+8)\times4}{2}=20$,$S_上=2\times10=20$,$S_下=8\times10=80$,$S_侧=10\times\sqrt{3^2+4^2}=50$. 所以该几何体的表面积为:$2\times S_梯+2\times S_侧+S_上+S_下=40+100+20+80=240$.

4. $\frac{3\pi}{2}$ 【解析】该几何体是底面直径为 1,母线长为 1 的圆柱,则其表面积是 $\pi\times1\times1+2\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3\pi}{2}$.

5. $\frac{10}{7}$ 【解析】两底面的面积分别为 4,25,所以侧面积为 29,设斜高为 h',则 $(2+5)h'\times\frac{1}{2}\times4=29$,得 $h'=\frac{29}{14}$,所以高 $h=\sqrt{\left(\frac{29}{14}\right)^2-\left(\frac{5-2}{2}\right)^2}=\frac{10}{7}$.

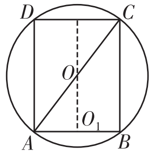
6. 如图,设底面对角线 $AC=a$,$BD=b$,交点为 O,体对角线 $A_1C=15$,$B_1D=9$,所以 $a^2+5^2=15^2$,$b^2+5^2=9^2$,所以 $a^2=200$,$b^2=56$.

因为底面是菱形,所以 $AB^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{200+56}{4}=64$,即 $AB=8$,所以直四棱柱的侧面积 $S=4\times8\times5=160$.



第 6 题图

7. 作圆柱的轴截面如图所示，则球心为 AC 的中点 O，球半径 $OA=1$. 设圆柱底半径 $AO_1=r$，高 $BC=h$，则有$4r^2+h^2=4$，所以 $h=2\sqrt{1-r^2}$，所以圆柱的侧面积 $S=2\pi r\cdot h=2\pi r\cdot 2\sqrt{1-r^2}=4\pi\sqrt{-r^4+r^2}=4\pi\sqrt{-\left(r^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leqslant 2\pi$. 当 $r^2=\frac{1}{2}$ 时，圆柱的侧面积最大，此时圆柱的底面圆的半径$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



第 7 题图

1.1.7 柱、锥、台和球的体积

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】设棱长为 k、$2k$、$3k$，则 $\sqrt{k^2+(2k)^2+(3k)^2}=2\sqrt{14}$，解得 $k=2$，棱长为 2、4、6，体积为 $2\times4\times6=48$.

2. C 【解析】这是一个四棱锥，底面是边长为 1 的正方形，高为 1，$\therefore V=\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$.

3. D 【解析】设球的半径为 R，正三棱柱的底面边长为 a，高为 h，则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$，$R=2$，$h=2R=4$，$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=2R$，$a=4\sqrt{3}$. 所以体积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times4=48\sqrt{3}$.

4. $\frac{1}{12}a^3$ 【解析】由题意易知 O 为正三角形 ABC 的中心，所以三棱锥的高 $h=SO=AO=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{12}a^3$.

5. $4\sqrt{5}$ $2\sqrt{5}$ 【解析】设长方体的长、宽分别为 a、$b(a\geqslant b)$，根据圆内接矩形的对角线即为圆的直径，圆柱的内接长方体的体积为 800，于是有 $\begin{cases}a^2+b^2=10^2,\\ ab\cdot20=800,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=4\sqrt{5},\\ b=2\sqrt{5}.\end{cases}$

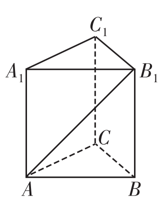
6. 如图为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，则有 $AB_1=2$，$\angle B_1AB=45°$，

$\therefore AB=BB_1=\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore V_{三棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

即此三棱柱的体积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.



第 6 题图

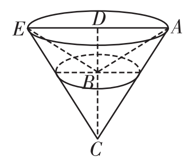
★ 课后作业 ★

1. B 【解析】由三视图可知，该几何体是底面为等腰直角三角形，高为 2 的三棱锥. 则 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$.

2. A 【解析】可设出两球的半径 r_1，r_2，则有 $\frac{4}{3}\pi(r_1^3+r_2^3)=12\pi$，即 $r_1^3+r_2^3=9$. 又$\because 2\pi(r_1+r_2)=6\pi$，$\therefore r_1+r_2=3$. 由 $r_1^3+r_2^3=(r_1+r_2)[(r_1+r_2)^2-3r_1r_2]$，可得 $r_1r_2=2$，从而$|r_1-r_2|=\sqrt{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2}=1$.

3. D 【解析】由题意，得 $V_{B'-ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC-A'B'C'}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. D 【解析】如图所示，该旋转体的体积为圆锥 CD 与圆锥 BD 的体积之差，由已知求得 $BD=1$，$AD=\sqrt{3}$. 所以 $V=V_{圆锥CD}-V_{圆锥BD}=\frac{1}{3}\times\pi\times3\times\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\times\pi\times3\times1=\frac{3\pi}{2}$.

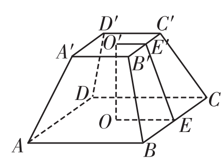


第 4 题图

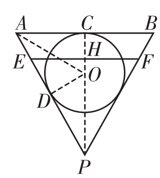
5. 2 cm 【解析】如图所示，设正四棱台 AC' 的上底面边长为 $2a$，则斜高 EE'和下底面边长分别为 $5a$、$8a$. 高 $OO'=\sqrt{(5a)^2-(4a-a)^2}=4a$.

又$\because \frac{1}{3}\times4a\times(64a^2+4a^2+\sqrt{4a^2\cdot64a^2})=14$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，即高为 2 cm.



第 5 题图



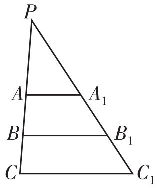
第 6 题图

6. $\sqrt[3]{15}r$ 【解析】如图所示，设球未取出时 $PC=b$，球取出后，水面高 $PH=x$. 因为 $AC=\sqrt{3}r$，$PC=3r$，所以以 AB 为底面直径的圆锥形容器的容积 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi AC^2\cdot PC=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}r)^2\cdot3r=3\pi r^3$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$. 球取出后水面下降到 EF，水的体积 $V_{水}=\frac{1}{3}\pi EH^2\cdot PH=\frac{1}{3}\pi(PH\tan30°)^2\cdot PH=\frac{1}{9}\pi x^3$，

而 $V_{水}=V_{圆锥}-V_{球}$，即 $\frac{1}{9}\pi x^3=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3$，所以 $x=$

$\sqrt[3]{15}r$.

7. 如图,将棱台还原成棱锥,AA_1、BB_1、CC_1分别是轴截面与小锥、中锥、大锥底面的交线,



第 7 题图

则 $AA_1:CC_1=\sqrt{16}:\sqrt{64}=1:2$.

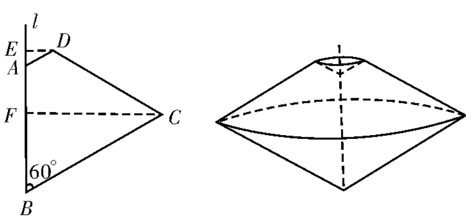
$\because BB_1$ 为棱台轴截面的中位线,

$\therefore AA_1:BB_1:CC_1=1:\frac{3}{2}:2=2:3:4$,

$\therefore V_{小}:V_{中}:V_{大}=2^3:3^3:4^3=8:27:64$,

$\therefore (V_{中}-V_{小}):(V_{大}-V_{中})=(27-8):(64-27)=19:37$,即上、下两部分体积之比为 19:37.

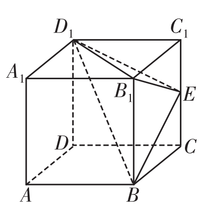
8. 如图甲所示,过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E,过 C 作 $CF\perp AB$ 于 F,所以 Rt$\triangle BCF$ 绕 AB 所在直线旋转一周形成以 CF 为底面半径,BC 为母线长的圆锥;直角梯形 $CFED$ 绕 AB 所在直线旋转一周形成圆台;Rt$\triangle ADE$ 绕 AB 所在直线旋转一周形成一个圆锥. 那么梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所得的几何体是以 CF 为底面半径的圆锥和圆台,挖去以 A 为顶点,以 DE 为底面半径的圆锥的组合体,如图乙所示. $\because AD=2\text{cm}, BC=10\text{cm}, \angle ABC=60°$, $\therefore BF=5\text{cm}, ED=\sqrt{3}\text{cm}, AE=1\text{cm}, FC=5\sqrt{3}\text{cm}, EF=4\text{cm}, AB=8\text{cm}$, $\therefore$ 旋转后所得几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi\cdot FC^2\cdot BF+\frac{1}{3}\pi\cdot EF\cdot(DE^2+FC^2+DE\cdot FC)-\frac{1}{3}\pi\cdot DE^2\cdot AE=248\pi(\text{cm}^3)$. $\therefore$ 所得旋转体的体积为 $248\pi\text{cm}^3$.



甲　　　　乙

第 8 题图

9. 如图,在三棱锥 B_1-BED_1 中,B_1 到平面 BED_1 的距离就是以$\triangle BED_1$ 为底面的三棱锥 B_1-BED_1 的高. 三棱锥 B_1-BED_1 可以看成以 D_1 为顶点,以$\triangle BB_1E$ 为底面的三棱锥,这时体积 $V_{D_1-BB_1E}=\frac{1}{3}S_{\triangle BB_1E}\cdot C_1D_1$,



第 9 题图

$S_{\triangle BB_1E}=\frac{1}{2}a^2, C_1D_1=a$,所以 $V_{D_1-BB_1E}=\frac{1}{6}a^3$. 在正方体中,$D_1E=BE=\frac{\sqrt{5}}{2}a, D_1B=\sqrt{3}a$,$\triangle BD_1E$ 中 BD_1 边上的高为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以 $S_{\triangle BD_1E}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{6}a^2}{4}$. 设点 B_1 到平面 BED_1 的距离为 x,则 $\frac{1}{3}S_{\triangle BD_1E}\cdot x=\frac{1}{6}a^3, \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}a^2}{4}=\frac{1}{6}a^3, x=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,故点 B_1 到平面 BED_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

1.2　点、线、面之间的位置关系

1.2.1　平面的基本性质与推论

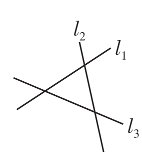
第一课时

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】①中应为 $l\subset\alpha$;②中空间四边形对角线异面;③中平面没有边界线.
2. C
3. B
4. 1 个或 3 个
5. 过直线和直线外一点有且只有一个平面
6. 设$\triangle ABC$ 所在的平面为 β,则 P、Q、R 为平面 α 与平面 β 的公共点,所以 P、Q、R 三点共线.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】由题意知平面 ABC 与平面 β 有公共点 C,根据基本性质 3,这两平面必定相交,有且只有一条经过点 C 的交线. 由于两点确定一条直线,所以只要再找到两平面的另一个公共点即可. 显然点 D 在直线 AB 上,从而它在平面 ABC 内;而 D 在直线 l 上,所以它又在平面 β 内,这样 D 也是平面 ABC 与平面 β 的公共点. 因此平面 ABC 与平面 β 的交线是直线 CD.
2. D 【解析】若 a、b、c 两两异面,不能确定平面,为 0 个;若三线共面,为 1 个;若其中两条是异面直线,第 3 条与它们都相交,确定 2 个平面;若两两相交不共面,或三线交于一点且不共面,则确定 3 个平面.
3. C 【解析】作出这三个平面的截面,如图所示,把空间分为 7 部分.



第 3 题图

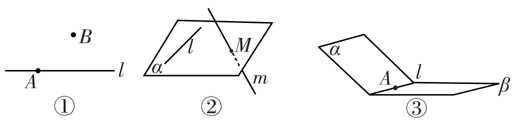
4. B 【解析】四棱柱中每个面都有四个点,但这四个点中没有三点是共线的,所以①错;对于④,三点不共线但四点可以共面.
5. 0 【解析】①中"$a\in\alpha$"符号不对;②中 A 可以在 α 内,也可以在 α 外,故不正确;③中"$A\subset\alpha$"符号不对.
6. ①③ 【解析】题图①,③中的 $PS\parallel QR$,所以 P、Q、R、S

共面,而题图②,④中的 PS 与 QR 是异面直线,所以这四个点不共面.

7. (1)符号:$A\in l,B\notin l$,如图①所示;

(2)符号:$l\subset\alpha,m\cap\alpha=M$,如图②所示;

(3)符号:$\alpha\cap\beta=l,A\in l$,如图③所示.



第7题图

8. 假设 A、B、C 三点共线,设都在直线 l 上.

$\because A,B,C\in\alpha$, $\therefore l\subset\alpha,c\cap l=C$,

$\therefore c$ 与 l 可确定一个平面 β.

$\because c\cap a=M$, $\therefore M\in\beta$. 又 $A\in\beta$,

$\therefore a\subset\beta$,同理可证 $b\subset\beta$.

$\therefore$ 直线 a、b 共面,这与已知 a 与 b 不共面矛盾,

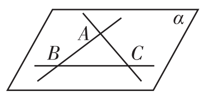
$\therefore A$、B、C 三点不共线.

9. 方法一:$\because AC\cap AB=A$,

$\therefore$ 直线 AB、AC 确定一个平面 α.

$\because B\in AB,C\in AC$, $\therefore B\in\alpha,C\in\alpha$.

故 $BC\subset\alpha$.



第9题图

因此直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内,

$\therefore AB$、BC、AC 共面.

方法二:$\because A$、B、C 三点不在一条直线上,$\therefore$ 过 A、B、C 三点可以确定平面 α.

$\because A\in\alpha,B\in\alpha$, $\therefore AB\subset\alpha$,

同理,$BC\subset\alpha,AC\subset\alpha$, $\therefore AB$、BC、AC 共面.

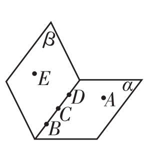
第二课时

★ 课堂作业 ★

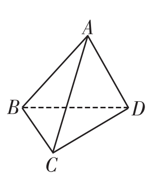
1. B 【解析】依据异面直线的判定定理找与 AA_1 异面的棱. $\because AA_1$ 在面 A_1ABB_1 内,B_1 在面 A_1ABB_1 内,C_1 不在面 A_1ABB_1 内,$\therefore C_1B_1$ 是与 AA_1 异面的棱. 同理,BC、CD、C_1D_1 都是与 AA_1 异面的棱.

2. C 【解析】①错,不共线的三点确定一个平面,共线时,过这三点有无穷多个平面;②错,当点不在直线上时,能确定一个平面,当点在直线上时,过这一点和这条直线有无穷多个平面;③、④都对,选 C.

3. B 【解析】当三点 B,C,D 不共线时,这五点一定共面;当点 D,B,C 共线时如图,点 B,C,D 在平面 α 与 β 的交线上,$A\in\alpha,E\in\beta$,此时五点不共面,所以选 B.



第3题图



第5题图

4. (1)C (2)D (3)A (4)B

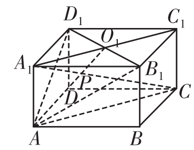
5. 0 【解析】①两两相交共点时,可能不共面;②两两平行,如三棱柱的三条侧棱所在直线不共面;③如图,三棱锥 $A-BCD$ 中,BD 与两直线 BC、AD 都相交,但不共面. 因此,题中所列出的三个条件,都不能确定一个平面.

6. 连接 AC(如图所示).

$\because A_1C$ 交截面 B_1D_1A 于点 P,

$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1,

$\therefore P\in$ 平面 B_1D_1A,且 $P\in$ 平面 ACC_1A_1.



第6题图

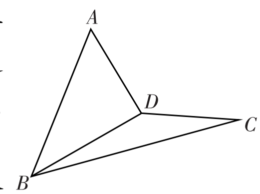
又$\because$ 平面 $B_1D_1A\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AO_1$,

$\therefore P\in AO_1$(基本性质3),$\therefore O_1,P,A$ 三点在同一直线上.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】选项 A、B 中 RS 与 PQ 平行;选项 D 中 RS 与 PQ 的延长线相交;选项 C 中的 PQ 与下底面平行,它与下底面中的 RS 不平行,不相交.

2. C 【解析】本题实质是考查共面、异面问题. 如图,空间四边形 $ABCD$ 中,$AB=CD,BC=AD$,所以 C 错.



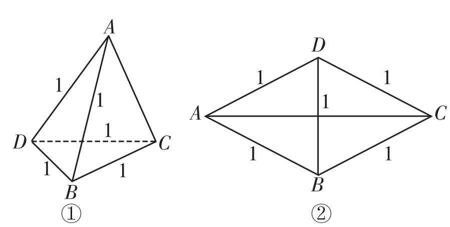
第2题图

3. D 【解析】因为 $l_1/\!/l_2$,由推论3知经过直线 l_1 与 l_2 有且只有一个平面,所以由直线 l_1,l_2 上这五个点只能确定一个平面.

4. C 【解析】2条直线最多确定 $1=\frac{2\times1}{2}$ 个平面;3条最多确定 $3=\frac{3\times2}{2}$ 个;4条最多确定 $\frac{4\times3}{2}=6$ 个.

5. ③④ 【解析】①中线段可与平面相交;②中的四边形可以是空间四边形;③中平行的对边能确定平面,所以是平行四边形;④中由四边形的三条边在同一平面内,可推知第四条边的两个端点也在这个平面内,所以第四条边在这个平面内;⑤中点 A 和平面 α 内的任意一条直线都能确定一个平面.

6. $(0,\sqrt{3})$ 【解析】如图①所示,$\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 均为边长为1的正三角形,当 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 重合时,$AC=0$. 将 $\triangle ABD$ 以 BD 所在直线为轴转动,到 A,B,C,D 四点共平面时,$AC=\sqrt{3}$,如图②,故 AC 的取值范围是 $0<AC<\sqrt{3}$.

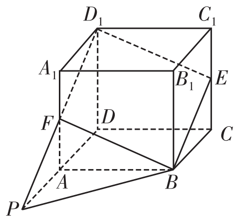


第6题图

7. 在平面 AA_1D_1D 内,延长 D_1F,$\because D_1F$ 与 DA 不平行,因此 D_1F 与 DA 必相交于一点,设为 P,则 $P\in D_1F,P\in DA$.

又∵ $D_1F\subset$ 平面 BED_1F，P 在平面 BED_1F 内，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$P\in$ 平面 $ABCD$，又 B 为平面 $ABCD$ 与平面 BED_1F 的公共点，

∴ 连接 PB，PB 即为平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.



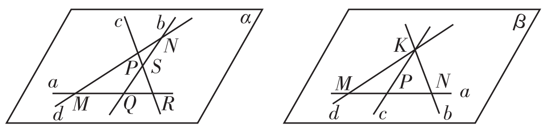
第 7 题图

8. (1) 无三线共点的情况，如图①，

设 $a\cap d=M$，$b\cap d=N$，$c\cap d=P$，$a\cap b=Q$，$a\cap c=R$，$b\cap c=S$.

∵ $a\cap d=M$，∴ a、d 可确定一个平面 α.

∵ $N\in d$，$Q\in a$，∴ $N\in\alpha$，$Q\in\alpha$，$NQ\subset\alpha$，即 $b\subset\alpha$.



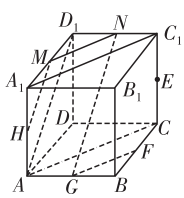
① ②

第 8 题图

同理 $c\subset\alpha$，∴ a、b、c、d 共面. (2) 有三线共点的情况，如图②，设 b、c、d 三线相交于点 K，与 a 分别交于 N、P、M，且 $K\notin a$，∵ $K\notin a$，∴ K 和 a 确定一个平面，设为 β. ∵ $N\in a$，$a\subset\beta$，∴ $N\in\beta$. ∴ $NK\subset\beta$，即 $b\subset\beta$. 同理 $c\subset\beta$，$d\subset\beta$.

∴ a、b、c、d 共面. 由(1)(2)可知 a、b、c、d 共面.

9. 如图，连接 MN，A_1C_1，AC，GF，MH，GN，AD_1. 因为 M，N 分别为 A_1D_1，C_1D_1 的中点，所以 $MN\parallel A_1C_1$，同理 $GF\parallel AC$. 又因为 $AC\parallel A_1C_1$，所以 $MN\parallel GF$，所以 MN 与 GF 确定一个平面 α. 同上可证 $MH\parallel AD_1$. 因为 $GN\parallel AD_1$，所以 $MH\parallel GN$，所以 MH 与 GN 确定一个平面 β. 因为经过 M，N，G 三个不共线点的平面只有一个，所以 β 与 α 重合，所以 H 在 α 内，同理可证 E 在 α 内，所以 E，F，G，H，M，N 共面.



第 9 题图

1.2.2 空间中的平行关系

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. B
2. B 【解析】四边形 D_1PBQ 是平行四边形，又在正方体中，P，Q 为棱的中点，$BQ^2=BC^2+CQ^2=AB^2+AP^2=BP^2$，∴ $BQ=BP$，∴ 四边形 D_1PBQ 为菱形.
3. D
4. 梯形
5. < 【解析】取 BC 的中点 E，连接 EM，EN，则

$$\begin{cases}EM=\dfrac{1}{2}AC,\\ EN=\dfrac{1}{2}BD,\end{cases}\text{相加得 } EM+EN=\frac{1}{2}(AC+BD).$$

又 $EM+EN>MN$，所以 $MN<\dfrac{1}{2}(AC+BD)$.

6. 方法一：如图，连接 M_1M，M_1、M 分别是 A_1D_1 和 AD 的中点 $\Rightarrow A_1M_1\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}AM\Rightarrow AMM_1A_1$ 为平行四边形

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AA_1\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}MM_1\\ AA_1\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}BB_1\end{array}\right\}\Rightarrow MM_1\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}BB_1$$

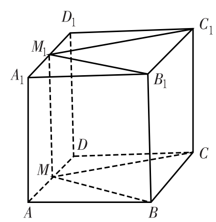
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{四边形 } BB_1M_1M \text{ 为平行四边形}\\ \Rightarrow M_1B_1\parallel MB.\\ \text{同理},M_1C_1\parallel MC.\\ \angle B_1M_1C_1 \text{ 的两边与} \angle BMC \text{ 的两边方向相同}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.

方法二：同上可证 M_1B_1BM 为平行四边形

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow M_1B_1=MB\\ \text{同理},C_1M_1=CM\\ \text{又 } B_1C_1=BC\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle M_1C_1B_1\cong\triangle MCB\Rightarrow$$

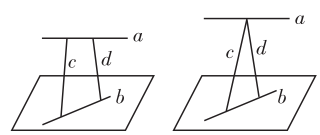
$\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.



第 6 题图

★ 课后作业 ★

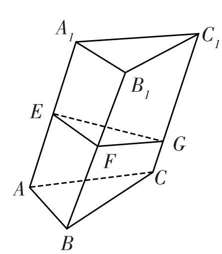
1. D 【解析】如图，a、b 为异面直线，c、d 分别与 a、b 都相交. 图(1)中 c、d 异面，图(2)中 c、d 相交.



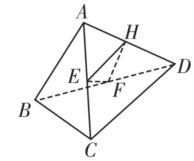
(1) (2)

第 1 题图

2. C 【解析】由等角定理，$OA\parallel O_1A_1$，$OB\parallel O_1B_1$ 时，其方向有三种情形：相同、相反、一相同一相反，前两种情形下 $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，第三种情况下 $\angle AOB$ 与 $\angle A_1O_1B_1$ 互补，应用等角定理时应注意两个条件：①两边分别平行；②方向分别相同.
3. A 【解析】正四棱台是由正四棱锥截得的，故侧棱 AA_1 与 CC_1 必相交，∴ ①正确，排除 B、D；如图，在三棱柱中，由条件知 FG 与 BC 不平行，又 FG 与 BC 在同一平面内，故 FG 与 BC 必相交，由此可判定平面 EFG 与平面 ABC 必相交，故②正确，排除 C，∴ 选 A.



第 3 题图



第 4 题图

4\. A 【解析】取 AD 的中点 H，连 FH、EH，在 $\triangle EFH$ 中，$\angle EFH=90°$，$HE=2HF$，从而 $\angle FEH=30°$，故选 A.

5\. (1)菱 (2)矩 (3)正方 【解析】由 E,F,G,H 分别为中点，可判断出四边形 $EFGH$ 是平行四边形，(1)中又具备了 $AC=BD$，所以可断定四边形 $EFGH$ 的邻边相等，于是四边形 $EFGH$ 是菱形；(2)中具备 $AC\perp BD$，可由此断定四边形 $EFGH$ 的邻边垂直，于是四边形 $EFGH$ 是矩形；(3)中同时具备(1)(2)的条件，所以四边形 $EFGH$ 必为正方形.

6\. $AE=C_1F$，$A_1E=CF$ 等 【解析】四点 D_1、E、B、F 共面，显然直线 D_1E 与 BF 无公共点，故 $D_1E\parallel BF$，同理可知 $D_1F\parallel BE$，故只需使四边形 D_1EBF 为平行四边形. 当 $AE=C_1F$时，四点 D_1、E、B、F 共面，在 B_1B 上取点 G，使 $B_1G=A_1E$，$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1E\parallel B_1G$，$\therefore$ 四边形 A_1B_1GE 为平行四边形，$\therefore$ $EG\underline{\parallel}A_1B_1$，又 $\because A_1B_1\underline{\parallel}C_1D_1$，$\therefore EG\underline{\parallel}C_1D_1$，$\therefore$ 四边形 EGC_1D_1 为平行四边形，$\therefore$ $D_1E\underline{\parallel}C_1G$，又 $\because$ $C_1F\underline{\parallel}BG$，$\therefore$ $C_1G\underline{\parallel}BF$，$\therefore D_1E\underline{\parallel}BF$，$\therefore$ 四边形 BFD_1E 为平行四边形，故 D_1、E、B、F 四点共面.

7\. (1)在 $\triangle ABD$ 中，P、H 为 AB、AD 的中点，

$\therefore PH\underline{\parallel}\frac{1}{2}BD$，同理，$QR\underline{\parallel}\frac{1}{2}BD$，$\therefore PH\underline{\parallel}QR$，

$\therefore$ 四边形 $PQRH$ 为平行四边形.

$\because AC\perp BD$，$PH\parallel BD$，$PQ\parallel AC$，

$\therefore \angle HPQ=90°$，$\therefore$ 四边形 $PQRH$ 为矩形.

(2)空间四边形 $ABCD$ 中，若 $AC=BD$ 且$AC\perp BD$时，四边形 $PQRH$ 为正方形.

8\. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，E、F 分别为 BC、AD 的中点，

$\therefore EF\parallel AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$，又 $C'D'\parallel EF$，$EF\parallel AB$，$\therefore C'D'\parallel AB$.

$\because$ G、H 分别为 AD'、BC'的中点，

$\therefore GH\parallel AB$ 且 $GH=\frac{1}{2}(AB+C'D')=\frac{1}{2}(AB+CD)$

$\therefore GH\underline{\parallel}EF$，$\therefore EFGH$ 为平行四边形.

9\. (1)连接 AM 并延长交 BC 于 E，连接 AN 并延长交 CD 于 F，连接 EF.

由 M、N 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的重心，知 E、F 分别是 BC、CD 的中点，故 $EF\parallel BD$，且 $EF=\frac{1}{2}BD$.

由重心性质可得$\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AF}=\frac{2}{3}$，故 $MN\parallel EF$. 从而 $MN=\frac{2}{3}EF=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}BD=2$.

(2)由(1)知 MN 的长与点 A 的位置没有关系，是定值，但若点 A 位置发生变化，线段 MN 的位置也会改变.

【解析】重心是三角形三条中线的交点，连 AM、AN 并延长交 BC、CD 于 E、F. 由$\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AF}=\frac{2}{3}$可得 $MN\parallel EF$，又 $EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}BD$，从而可求 MN 的长.

第二课时

★ 课堂作业 ★

1\. A

2\. B 【解析】由棱台的定义知，棱台的所有侧棱所在的直线都交于同一点，而任一侧面所在的平面由两条侧棱所在直线确定，故这条侧棱与不含这条侧棱的任意一个侧面所在的平面都相交.

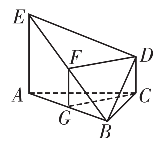
3\. B 【解析】由题意知，m 与 α 相交，选 B.

4\. 且只有一 无数 无数 且只有一

5\. 18 或 9 【解析】由 $PA=6$，$AB=2$ 知，P 点不可能在 α 与 β 之间，$\therefore$ 点 P 在两平行平面所夹空间外面，

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BD}$或$\frac{PB}{PA}=\frac{BD}{AC}$，$\therefore AC=9$ 或 $AC=18$.

6\. 如图所示，取 AB 的中点 G，连接 FG、CG.



第 6 题图

$\because$ F、G 分别是 BE、AB 的中点，

$\therefore FG\underline{\parallel}\frac{1}{2}AE$，又 $AE=2a$，$CD=a$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AE$，而 $AE\parallel CD$，$\therefore CD\underline{\parallel}FG$，

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 为平行四边形，$\therefore DF\parallel CG$.

又 $CG\subset$平面 ABC，$DF\not\subset$平面 ABC，$\therefore DF\parallel$平面 ABC.

★ 课后作业 ★

1\. B 【解析】有平面 D_1C_1CD、平面 C_1B_1BC、平面 BB_1D_1D 三个.

2\. D 【解析】A 不正确，这条直线可能在一个平面内；B 不正确，这条直线如果和两个平面都相交，那么它与两个平面的交线相交或异面，这与已知不符；C 不正确，这条直线如果在两个平面内则必为这两个平面的交线，即与两个平面的交线重合，这与已知不符；D 正确，这条直线与两个平面的交线平行，有两种情形，其一是分别与这两个平面平行，其二是在一个面内平行于另一个平面，$\therefore$ 至少与一个平面平行，$\therefore$ 选 D.

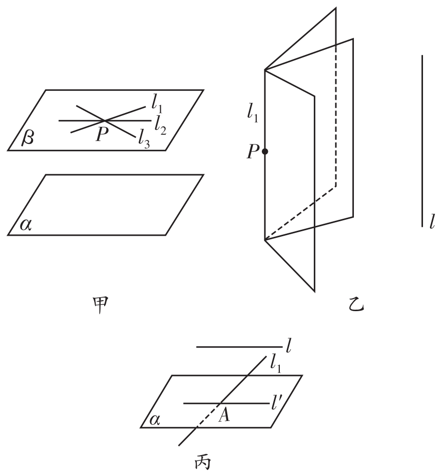
3\. B 【解析】其中(3)，(4)正确.

4\. A 【解析】取 D_1B_1 的中点 O，连 OF、OB，$\because$ $OF\underline{\parallel}\frac{1}{2}B_1C_1$，$BE\underline{\parallel}\frac{1}{2}B_1C_1$，$\therefore OF\underline{\parallel}BE$，$\therefore$ 四边形 $OFEB$ 为平行四边形，$\therefore EF\parallel BO$. $\because$ $EF\not\subset$平面 BB_1D_1D，$OB\subset$平面 BB_1D_1D，$\therefore EF\parallel$平面 BB_1D_1D，故选 A.

5\. $\frac{20}{9}$ 【解析】$\because$ $a\parallel\alpha$，$\alpha\cap$平面 $ABD=EG$，$\therefore$ $a\parallel EG$，即 $BD\parallel EG$，$\therefore \frac{EG}{BD}=\frac{AF}{AC}=\frac{AF}{AF+FC}$，则 $EG=\frac{AF\cdot BD}{AF+FC}=\frac{5\times4}{5+4}=\frac{20}{9}$.

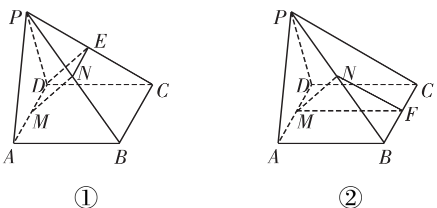
6\. ②③⑥ 【解析】①错，②对，见图甲，过 P 有无数条直线都与 α 平行，这无数条直线都在平面 β 内，有且只有一个平面 $\beta\parallel\alpha$；③对，④错，见图乙，想一想打开的书页，一支笔与书脊平行；⑤错，可以在其中一个平面内；⑥对，见图丙，假设 l_1 不在 α 内，直线 l 与点 A 确定一个

平面β,与 α 相交得交线 l',$\because l /\!/ \alpha$,$\therefore l /\!/ l'$. 又 $l /\!/ l_1$,
$\therefore l_1 /\!/ l'$,这与 $l_1 \cap l' = A$ 矛盾,故 $l_1 \subset \alpha$.



第 6 题图

7. 方法一:如图①,取 PC 的中点 E,连接 DE,EN.

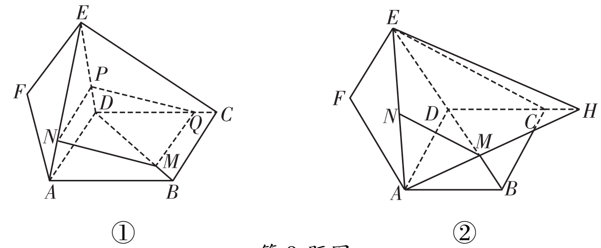


第 7 题图

因为 M,N 分别是 AD,PB 的中点,所以 $EN \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BC \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} MD$,所以四边形 $MNED$ 是平行四边形,所以 $MN /\!/ DE$.
因为 $MN \not\subset$ 平面 PDC,$DE \subset$ 平面 PDC,所以 $MN /\!/$ 平面 PDC.
方法二:如图②,取 BC 的中点 F,连接 NF,MF. 因为 M,N 分别是 AD,PB 的中点,所以 $NF /\!/ PC$,$MF /\!/ DC$. 因为 $NF \cap MF = F$,所以平面 $MNF /\!/$ 平面 PDC.
因为 $MN \subset$ 平面 MNF,所以 $MN /\!/$ 平面 PDC.

8. 当点 M 为 AC 的中点时,$MB /\!/$ 平面 AEF. 证明如下:因为 M 为 AC 的中点,取 AE 的中点 D,连接 MD,DF,则 DM 为 $\triangle AEC$ 的中位线,所以 $DM /\!/ EC$ 且 $DM = \frac{1}{2}EC$,而 $FB /\!/ EC$ 且 $FB = \frac{1}{2}EC$,
所以 $DM /\!/ FB$ 且 $DM = FB$,所以四边形 $DMBF$ 为平行四边形.
所以 $DF /\!/ BM$,而 $MB \not\subset$ 平面 AEF,$DF \subset$ 平面 AEF.
所以 $MB /\!/$ 平面 AEF.
【点评】先逆推可知 M 为 AC 的中点时,$MB /\!/$ 平面 AEF. 证明时,可构造平行四边形来证.

9. 方法一:如图①,作 $NP /\!/ AD$ 交 DE 于 P,作 $MQ /\!/ AD$ 交 DC 于 Q,连接 PQ,则 $NP /\!/ MQ$. $\because AN = BM$,$\therefore NE = DM$,
$\therefore \frac{NE}{AE} = \frac{DM}{BD}$,又$\frac{NP}{AD} = \frac{NE}{AE}$,$\frac{MQ}{BC} = \frac{DM}{BD}$,$AD = BC$,
$\therefore NP = MQ$,$\therefore NP \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} MQ$,
$\therefore MNPQ$ 为平行四边形,$\therefore MN /\!/ PQ$.
又 $PQ \subset$ 平面 EDC,$MN \not\subset$ 平面 EDC,
$\therefore MN /\!/$ 平面 EDC.



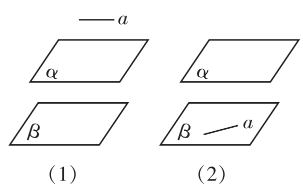
第 9 题图

方法二:如图②,连 AM 并延长交直线 DC 于 H,连 EH.
$\because AB /\!/ CD$,$\therefore \frac{BM}{BD} = \frac{AM}{AH}$.
又 $BM = AN$,$BD = AE$,$\therefore \frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AH}$,$\therefore NM /\!/ EH$.
$\because MN \not\subset$ 平面 EDC,$EH \subset$ 平面 EDC,
$\therefore MN /\!/$ 平面 EDC.

第三课时

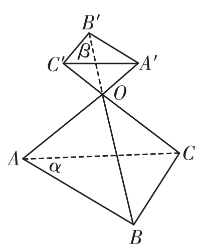
★ 课堂作业 ★

1. D
2. D **【解析】**$\because$ 两个平面平行,$\therefore$ 这两个平面无公共点,因此分别在这两个平面内的直线无公共点,故它们平行或异面.
3. D **【解析】**如图(1)满足 $a /\!/ \alpha$,$a /\!/ \beta$,此时 $\alpha /\!/ \beta$;如图(2)满足 $a /\!/ \alpha$,$\alpha /\!/ \beta$,此时 $a \subset \beta$,故选 D.



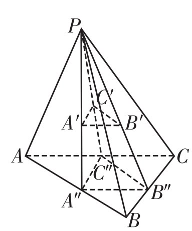
第 3 题图

4. ④
5. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **【解析】**如图,$\because \alpha /\!/ \beta$,
$\therefore BC /\!/ B'C'$,$AB /\!/ A'B'$,$AC /\!/ A'C'$,
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,且由 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{3}{2}$知相似比为$\frac{3}{2}$,
又由 $AB = 2$,$AC = 1$,$\angle BAC = 60°$,知
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot (AC \cdot \sin 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\therefore S_{\triangle A'B'C'} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.



第 5 题图

6. (1)证明:如图,连 PA'并延长交 AB 于 A'',
连 PB'并延长交 BC 于 B'',
连 PC'并延长交 AC 于 C'',
连 $A''B''$,$B''C''$.
$\because A'$,B' 分别为 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$ 的重心,$\therefore \frac{PA'}{PA''} = \frac{PB'}{PB''}$,
$\therefore A'B' /\!/ A''B''$,同理 $B''C'' /\!/ B'C'$,
$\therefore A'B' \cap B'C' = B'$.$\therefore$ 平面 $A'B'C' /\!/$ 平



第 6 题图

面 $A''B''C''$，平面 $A'B'C'$ // 平面 ABC. 又∵ $AB\subset$ 平面 ABC，
∴ AB // 平面 $A'B'C'$.

(2)解：由(1)可知 $\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{PB'}{PB''}=\frac{2}{3}$，

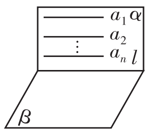
∴ $A'B'=\frac{2}{3}A''B''$，又 $A''B''=\frac{1}{2}AC$，∴ $A'B'=\frac{1}{3}AC$，

同理 $B'C'=\frac{1}{3}AB$，$A'C'=\frac{1}{3}BC$，∴ $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{9}$.

★ 课后作业 ★

1. D

2. D 【解析】如图，设 $\alpha\cap\beta=l$，则在 α 内与 l 平行的直线可以有无数条 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，它们是一组平行线. 这时 $a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$ 与平面 β 都平行，但此时 $\alpha\cap\beta=l$.



第 2 题图

3. C 【解析】m // 平面 α，则 m 与平面 α 没有公共点，∴ m 与 l 无公共点，同理，由 n // β 知，n 与 l 无公共点，故 l 与 m、n 都没有公共点.

4. C 【解析】①三线平行公理；
②两直线同时平行于一平面，这两直线可相交，平行或异面；
③两平面同时平行于一直线，这两个平面相交或平行；
④面面平行传递性；
⑤一直线和一平面同时平行于另一直线，这条直线和平面平行或直线在平面内；
⑥一直线和一平面同时平行于另一平面，这直线和平面可能平行也可能直线在平面内，故①、④正确.

5. $\frac{15}{4}$ cm　$\frac{45}{4}$ cm　15 cm 【解析】容易证明 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$(1)，$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$(2)，由(1)得 $\frac{1}{3}=\frac{5}{EF}$，∴ $EF=15$，∴ $DF=DE+EF=20$，

代入(2)得 $\frac{AB}{15}=\frac{5}{20}$，

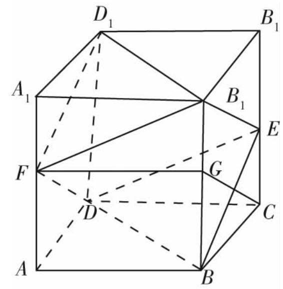
∴ $AB=\frac{15}{4}$，∴ $BC=AC-AB=15-\frac{15}{4}=\frac{45}{4}$，

∴ AB、BC、EF 的长分别为 $\frac{15}{4}$ cm、$\frac{45}{4}$ cm、15 cm.

6. 点 M 在 FH 上 【解析】∵ FH // BB_1，HN // BD，$FH\cap HN=H$，∴ 平面 FHN // 平面 B_1BDD_1，又平面 $FHN\cap$ 平面 $EFGH=FH$，∴ 当 $M\in FH$ 时，$MN\subset$ 平面 FHN，∴ MN // 平面 B_1BDD_1.

7. ∵ P_1,Q_1；P_2,Q_2 分别为 AB，BC 的三等分点，
∴ P_1P_2 // Q_1Q_2，
同理 P_3,Q_3 为 CD 三等分点，有 P_2P_3 // Q_2Q_3，
∴ P_1P_2 // 平面 $Q_1Q_2Q_3$，P_2P_3 // 平面 $Q_1Q_2Q_3$，
∵ $P_1P_2\cap P_2P_3=P_2$，∴ 平面 $P_1P_2P_3$ // $Q_1Q_2Q_3$.

8. 设 G 是 BB_1 的中点，连接 FG、CG.
∵ $FG\underline{\parallel}AB$，$AB\underline{\parallel}DC$，∴ $FG\underline{\parallel}DC$.
∴ 四边形 $FGCD$ 是平行四边形. 则 $DF\underline{\parallel}CG$.
由题设可得 $EB_1\underline{\parallel}CG$，则 $DF\underline{\parallel}EB_1$，∴ 四边形 DFB_1E 是平行四边形，
∴ B_1F // ED. ∵ $B_1F\not\subset$ 平面 BDE，$ED\subset$ 平面 BDE，
∴ B_1F // 平面 BDE. 又∵ B_1D_1 // BD，$B_1D_1\not\subset$ 平面 BDE，$BD\subset$ 平面 BDE.
∴ B_1D_1 // 平面 BDE.
∵ $B_1D_1\cap B_1F=B_1$，∴ 平面 BDE // 平面 B_1D_1F.



第 8 题图

9. 当 Q 为 CC_1 的中点时，平面 D_1BQ // 平面 PAO.
证明如下：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 PQ.
∵ P,Q 分别为 DD_1，CC_1 的中点，
∴ $PQ\underline{\parallel}CD$，$CD\underline{\parallel}AB$，
∴ $PQ\underline{\parallel}AB$，∴ 四边形 $ABQP$ 是平行四边形，
∴ PA // QB.
又∵ $QB\subset$ 平面 D_1BQ，$PA\not\subset$ 平面 D_1BQ，
∴ PA // 平面 D_1BQ.
同理可得 PO // 平面 D_1BQ.
又∵ $PA\cap PO=P$，
∴ 平面 D_1BQ // 平面 PAO.

1.2.3 空间中的垂直关系

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. A

2. B 【解析】A 选项还有异面或者相交的情况，C、D 不一定.

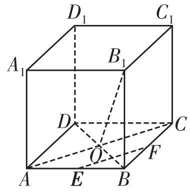
3. A 【解析】因为 $a\perp\alpha$，所以 a 垂直于平面 α 内的任意直线，所以①正确；若两条平行线中的一条直线与一个平面垂直，则另一条直线也与这个平面垂直，所以②正确；由线面平行的性质及空间内两条直线所成角的定义知，若 $a\perp\alpha$，b // α，则 $a\perp b$，所以③正确；由线面垂直的判定定理可知，④不正确；当 a // α，$a\perp b$ 时，b 可与 α 平行、垂直，或 b 在 α 内，所以⑤不正确；当 $a\perp\alpha$，$b\perp a$ 时，b 可与 α 平行，b 也可在 α 内，故⑥不正确.

4. 菱形 【解析】∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $PA\perp BD$. 又∵ $PC\perp BD$，$PA\cap PC=P$，∴ $BD\perp$ 平面 PAC，∴ $BD\perp AC$，∴ 平行四边形 $ABCD$ 一定是菱形.

5. $4\sqrt{5}$ 【解析】取 BC 的中点 O，连接 AO，PO.
因为 $AB=AC$，O 为 BC 的中点，所以 $BC\perp AO$. 又因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，因为 $AO\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAO. 所以 $BC\perp PO$，所以线段 PO 的长度即为点 P 到直线 BC 的距离. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，$PO=\sqrt{PA^2+AO^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

6. 如图所示，连接 AC，BD，则 O 为 AC 和 BD 的交点.
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AC\perp BO$.

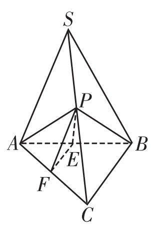
又$\because B_1B\perp$面$ABCD$，$AC\subset$面$ABCD$，
$\therefore BB_1\perp AC$. 又$BO\cap BB_1=B$，$\therefore AC\perp$面BB_1O. 又$\because E$、F分别是AB、BC的中点，
$\therefore$在$\triangle ABC$中，$EF\parallel AC$.
$\therefore EF\perp$平面BB_1O.



第6题图

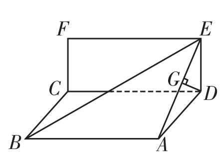
★ 课后作业 ★

1. B 【解析】由直线与平面垂直的判定定理可以证明与AD_1垂直的平面是平面A_1DB_1.
2. C 【解析】过b作平面β，$\beta\cap\alpha=b'$，则$b\parallel b'$，
$\because a\perp$平面α，$\therefore a\perp b'$，$\therefore a\perp b$.
3. C 【解析】若这两点在平面的同侧，则直线与平面平行；若这两点在平面的异侧，则直线与平面相交.
4. A 【解析】在折叠前，有$SG_3\perp FG_3$，$FG_2\perp EG_2$，$EG_1\perp SG_1$，在折叠后，由于G_1，G_2，G_3重合于点G，上述三对垂直关系都没有改变，有$SG\perp FG$，$SG\perp EG$，$FG\perp EG$，又因为$FG\cap EG=G$，所以可判定$SG\perp$平面EFG，故选A.
5. $\sqrt{21}$ cm 【解析】连接BC. $\because C$为圆周上的一点，AB为直径，$\therefore BC\perp AC$. 又$\because PA\perp$平面$\odot O$，$BC\subset$平面$\odot O$，$\therefore PA\perp BC$，又$\because PA\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$平面PAC，C为垂足，$\therefore BC$即为B到平面PAC的距离. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$(cm).
6. $\left.\begin{array}{l}m\parallel n\\ \alpha\parallel\beta\\ m\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow n\perp\beta$
7. 如图，连接PA、PB. 易知$\triangle SAC$、$\triangle ACB$是直角三角形，且$SA\perp AC$，$BC\perp AC$.
取AB、AC的中点E、F，连接PF、EF、PE，
则$EF\parallel BC$，$PF\parallel SA$，
所以$EF\perp AC$，$PF\perp AC$.
因为$PF\cap EF=F$，所以$AC\perp$平面PEF.
因为$PE\subset$平面PEF，所以$PE\perp AC$，易证$\triangle SAC\cong\triangle SBC$，所以$PA=PB$.
因为E为AB的中点，所以$PE\perp AB$.
因为$AB\cap AC=A$，所以$PE\perp$平面ABC，所以PE的长就是点P到平面ABC的距离.
在$\mathrm{Rt}\triangle APE$中，$AP=\frac{1}{2}SC=\frac{\sqrt5}{2}$，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt2}{2}$，所以
$PE=\sqrt{AP^2-AE^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt3}{2}$.
即点P到平面ABC的距离是$\frac{\sqrt3}{2}$.



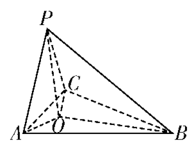
第7题图

8. (1)$\because$四边形$ABCD$和四边形$CDEF$为矩形，$\therefore CD\perp DE$，$CD\perp DA$. 又$\because DE\cap DA=D$，$\therefore CD\perp$平面ADE.
又$\because AB\parallel CD$，$\therefore AB\perp$平面AED，
$\therefore BA$的长即为所求距离，



第8题图

$\therefore$点B到平面AED的距离为2.
(2)$\because ED\perp CD$，$ED\perp DA$，$CD\cap DA=D$，$\therefore ED\perp$面$ABCD$.
$\therefore ED$为EF到平面$ABCD$的距离，又$\because ED=\sqrt2$，
$\therefore EF$到平面$ABCD$的距离是$\sqrt2$.
(3)如图，在平面ADE中，过D作$DG\perp AE$于G.
由(1)知$AB\perp$平面ADE，$DG\subset$平面ADE，
$\therefore AB\perp DG$，$\because AB\cap AE=A$，$\therefore DG\perp$平面ABE，即DG为所求距离，
在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2$，
$\therefore DG=\frac{DE\cdot AD}{AE}=\frac{\sqrt2\times\sqrt2}{2}=1$，
$\therefore CD$到平面ABE的距离为1.
9. 过P作$PO\perp$平面ABC于O，连接OA、OB、OC.
$\because BC\subset$平面ABC，$\therefore PO\perp BC$.
又$\because PA\perp BC$，$PA\cap PO=P$，
$\therefore BC\perp$平面PAO，$\therefore BC\perp OA$.
同理，可证$AB\perp OC$.
$\therefore O$是$\triangle ABC$的垂心，$\therefore OB\perp AC$.
又$\because PO\perp AC$，$OB\cap PO=O$，$\therefore AC\perp$平面PBO.
又$PB\subset$平面PBO，$\therefore PB\perp AC$.

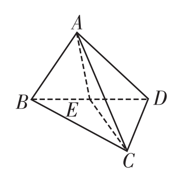


第9题图

第二课时

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}m\parallel n\\ n\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow m\perp\beta\\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$.
2. C
3. C
4. 垂直 【解析】$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AC\perp BD\\ AC\perp BB_1\\ BD\cap BB_1=B\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp\text{平面}BB_1D_1D\\ AC\subset\text{平面}AD_1C\end{array}\right\}\Rightarrow$平面$AD_1C\perp$平面$BB_1D_1D$.
5. 3 【解析】AB为直径，则$\angle ACB$为直角，可得$BC\perp$面PAC，所以平面$ABC\perp$平面PAC，平面$BCP\perp$平面PAC，平面$PAB\perp$平面ABC.
6. 取BD中点E，连接AE，CE，则$AE\perp BD$，$BD\perp CE$.
在$\triangle ABD$中，$AB=a$，$BE=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt2}{2}a$，
$\therefore AE=\frac{\sqrt2}{2}a$，同理，$CE=\frac{\sqrt2}{2}a$.
在$\triangle AEC$中，$AE=EC=\frac{\sqrt2}{2}a$，$AC=a$.
$\therefore AC^2=AE^2+EC^2$，即$AE\perp EC$.
又$\because BD\cap EC=E$，$\therefore AE\perp$平面BCD.
又$\because AE\subset$平面ABD，$\therefore$平面$ABD\perp$平面BCD.



第6题图

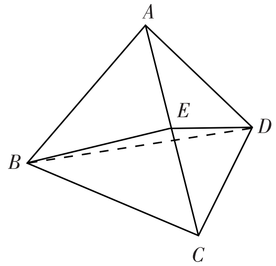
★ 课后作业 ★

1. D 【解析】由面面平行的性质可知命题①正确；命题②

不正确,也可能 $n\subset\beta$;命题③不正确,如果 m、n 有一条是 α、β 的交线,则 m、n 共面;命题④不正确,m 与 β 的关系不确定.

2. D 【解析】如图所示,连接 BE、DE.

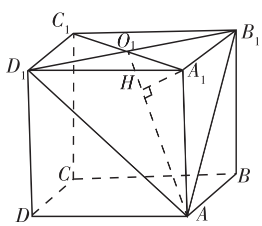
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BE\perp AC\\ DE\perp AC\\ BE\cap DE=E\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp \text{平面 } BDE\\ AC\subset \text{平面 } ABC\end{array}\right\}\Rightarrow \text{平面 } ABC\perp \text{平面 } BDE.$$



第 2 题图

3. D 【解析】过平面外一点可作一条直线与平面垂直,过该直线的任何一个平面都与已知平面垂直,所以①不对;若 $\alpha\perp\beta$,$a\perp\alpha$,则 $a\subset\beta$ 或 $a/\!/\beta$,所以②不对;当平面外的直线是平面的垂线时,才能作无数个平面与已知平面垂直,否则只能作一个,所以③也不对.

4. C 【解析】如图,设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$,$\because B_1D_1\perp A_1O_1$,$B_1D_1\perp AA_1$,$A_1O_1\cap AA_1=A_1$,$\therefore B_1D_1\perp$ 平面 AA_1O_1,故平面 $AA_1O_1\perp$ 平面 AB_1D_1,交线为 AO_1,在平面 AA_1O_1 内过 A_1 作 $A_1H\perp AO_1$ 于 H,则易知 A_1H 的长即是 A_1 到截面 AB_1D_1 的距离,在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1O_1A$ 中,$A_1O_1=\sqrt{2}$,$AO_1=3\sqrt{2}$,由 $A_1O_1\cdot A_1A=A_1H\cdot AO_1$,可得 $A_1H=\dfrac{4}{3}$.



第 4 题图

5. 3 【解析】平面 $ADC\perp$ 平面 BDC,平面 $ADC\perp$ 平面 ADB,平面 $BCD\perp$ 平面 ADB.

6. ①② 【解析】①由面面平行的判定定理可得,该命题正确;②由线面平行的判定定理可得,该命题正确;③$a\subset\alpha$,$\alpha\cap\beta=l$,$a\perp l$,但 α 与 β 不垂直.

7. (1)$\because E$、F 分别是 AP、AD 的中点,$\therefore EF/\!/PD$,

又$\because PD\subset$ 面 PCD,$EF\not\subset$ 面 PCD,

$\therefore$ 直线 $EF/\!/$ 平面 PCD.

(2)$\because AB=AD$,$\angle BAD=60°$,F 是 AD 的中点,

$\therefore BF\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,面 $PAD\cap$ 面 $ABCD=AD$,

$\therefore BF\perp$ 面 PAD,又$\because BF\subset$ 平面 BEF,$\therefore$ 平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.

8. $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,$\therefore BC\perp AE$,$\because PA\perp$ 平面 ABC,根据三垂线定理得 $BC\perp PE$,又$\because PE\cap AE=E$,$\therefore BC\perp$ 平面 PAE.$\because Q$ 是 $\triangle PBC$ 的垂心,故 Q 在 PE 上,则 $OQ\subset$ 平面 PAE,$\therefore OQ\perp BC$.

$\because PA\perp$ 平面 ABC,$BF\subset$ 平面 ABC,$\therefore BF\perp PA$,又$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,$\therefore BF\perp AC$,又$\because PA\cap AC=A$,故 $BF\perp$ 平面 PAC.$\because Q$ 是 $\triangle PBC$ 的垂心,$\therefore BM\perp PC$,据三垂线定理的逆定理,$FM\perp PC$,$\because FM\cap BM=M$,$\therefore PC\perp$ 平面 BFM. 又 $OQ\subset$ 平面 BFM,$\therefore OQ\perp PC$.

综上知 $OQ\perp BC$,$OQ\perp PC$,$BC\cap PC=C$,$\therefore OQ\perp$ 平面 PBC.

9. $\because D$ 为等边三角形中 BC 的中点,$\therefore AD\perp BC$,又$\because PQ/\!/BC$,$\therefore AR\perp PQ$.$\because$ 平面 $APQ\perp$ 平面 $PBCQ$,且两平面的交线为 PQ,$\therefore AR\perp$ 平面 $PBCQ$,$\therefore AR\perp RB$.

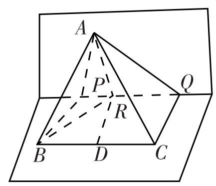
在 $\mathrm{Rt}\triangle BRD$ 中,

$$BR^2=BD^2+RD^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2,$$

$AR^2=x^2$.

故 $d^2=BR^2+AR^2=2x^2-\sqrt{3}ax+a^2=2\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\dfrac{5}{8}a^2\left(0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$ 时,d^2 取得最小值 $\dfrac{5}{8}a^2$.



第 9 题图

单元评估检测

1. A 【解析】由棱柱、直棱柱的概念可得④正确.

2. A 【解析】因为 AB、MN 两条交线所在平面(侧面)互相平行,故 AB、MN 无公共点,又 AB、MN 在平面 $EFGH$ 内,故 $AB/\!/MN$,同理易知 $AN/\!/BM$. 又 $AB\perp CD$,$\therefore$ 截面必为矩形.

3. C 【解析】若 a 与 b 相交,则存在平面 β,使得 $a\subset\beta$ 且 $b\subset\beta$,由 $a\perp c$,$b\perp c$,知 $c\perp\beta$,同理 $d\perp\beta$,所以 $c/\!/d$. 若 a 与 b 异面,同理可得 $c/\!/d$. 若 $a/\!/b$,则 c 与 d 可能平行,也可能不平行. 结合各选项知选 C.

4. D 【解析】从俯视图看,只有 B 和 D 符合,从主视图看 B 不符合,D 符合.

5. C 【解析】A 中,若 AC 与 BD 共面,则 A、B、C、D 四点共面,则 AD 与 BC 共面;

B 中,若 AC 与 BD 是异面直线,则 A、B、C、D 四点不共面,则 AD 与 BC 是异面直线;

C 中,若 $AB=AC$,$DB=DC$,AD 不一定等于 BC;

D 中,若 $AB=AC$,$DB=DC$,可以证明 $AD\perp BC$.

6. A 【解析】由三视图可知,该几何体为一个组合体,其

上部分为一个长方体，下部分为半径为 2 的半个圆柱，

其体积 $V=2\times2\times4+\frac{1}{2}\pi\times2^2\times4=16+8\pi$.

7. C 【解析】对于 A 选项，m 与 n 可能相交，可能平行，还可能异面. 对于 B 选项，α 与 β 可能平行，还可能相交. 对于 D 选项，m 与 β 可能垂直，还可能平行，或 m 在 β 内.

8. A 【解析】将棱长为 1 的正方体木块切削成一个体积最大的球，球的直径应等于正方体的棱长，故球的半径为 $R=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}$.

9. C 【解析】因为垂直于同一个平面的两条直线平行，垂直于同一条直线的两个平面平行，可知②③正确.

10. C 【解析】①中由已知可得平面 $A'FG\perp$ 平面 ABC，

$\therefore$ 点 A' 在平面 ABC 上的射影在线段 AF 上；

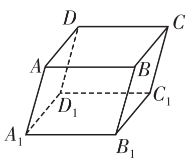
②$BC\,/\!/\,DE$，$\therefore BC\,/\!/$ 平面 $A'DE$；

③当平面 $A'DE\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $A'-FED$ 的体积达到最大.

11. 2 【解析】$\because S_1=4\pi R_1^2, S_2=4\pi R_2^2$，

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=4$，$\therefore \frac{R_1}{R_2}=2$.

12. ②④ 【解析】对于命题①，斜棱柱中的两个相对的侧面可以同时垂直于底面，故①错误；对于命题②，若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则它们的交线一定垂直于底面，又因为这一交线是两对角面的平行四边形的中位线，所以四条侧棱都垂直于底面，棱柱为直四棱柱，即②正确；对于命题③，如图所示的斜四棱柱，它的所有棱长都相等，且 $\angle AA_1B_1=\angle AA_1D_1=60^\circ$，这时它的四个侧面两两全等，故③错误；对于命题④，由四棱柱的四条对角线相等得到两对角面是矩形，从而四棱柱是直四棱柱，故④正确.



第 12 题图

13. $(4+2\sqrt{2})a^2$ 【解析】由题意可知，组成新的四棱柱后的表面积是由原来的四个相同正方形的面积和两个阴影部分的面积组成的，则所得四棱柱的全面积为 $4a^2+\sqrt{2}a\cdot a\times2=(4+2\sqrt{2})a^2$.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】由已知可得，该正方体的摆放为我们平常所见的正方体水平旋转了 45°，易知正视图为其一个对角面.

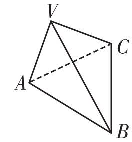
15. 4 【解析】取 CD 中点 O，连接 FO，EO，易证明 $CD\perp$ 平面 EFO. 正方形左右两个侧面与 AB 垂直，可判断平面 EFO 与正方形左右两个侧面平行. 从平面 EFO 与正方形左右两个侧面平行，且与其余面都不可能平行可知，直线 EF 与其余 4 个面所在的平面都会相交.

16. (1) 如图所示.

(2) 根据三视图间的关系可得 $BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 左视图中 $VA=\sqrt{4^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle VBC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$.



直观图

第 16 题图

17. $\because$ 梯形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，$\therefore AB$，CD 是梯形 $ABCD$ 的两腰，

$\therefore AB$，CD 必定相交于一点.

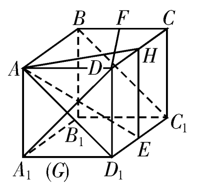
设 $AB\cap CD=M$，

又 $\because AB\subset\alpha$，$CD\subset\beta$，$\therefore M\in\alpha$ 且 $M\in\beta$，$\therefore M\in\alpha\cap\beta$.

又 $\because \alpha\cap\beta=l$，$\therefore M\in l$，即 AB，CD，l 共点.

18. (1) 连接 AD_1，BC_1，由正方体的性质可知，$DA_1\perp AD_1$，$DA_1\perp AB$，又 $AB\cap AD_1=A$，$\therefore DA_1\perp$ 平面 ABC_1D_1，又 $AE\subset$ 平面 ABC_1D_1，$\therefore DA_1\perp AE$.

(2) 如图所示，G 点即为 A_1 点. 证明如下：



第 18 题图

由(1)可知 $AE\perp DA_1$，取 CD 的中点 H，连接 AH，EH，由 $DF\perp AH$，$DF\perp EH$，$AH\cap EH=H$，可证 $DF\perp$ 平面 AHE，$\therefore DF\perp AE$. 又 $DF\cap A_1D=D$，

$\therefore AE\perp$ 平面 DFA_1，即 $AE\perp$ 平面 DFG.

19. (1) $\because GH$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线，$\therefore GH\,/\!/\,B_1C_1$.

又 $\because B_1C_1\,/\!/\,BC$，$\therefore GH\,/\!/\,BC$. $\therefore B$，C，H，G 四点共面.

(2) $\because E$，F 分别为 AB，AC 的中点，$\therefore EF\,/\!/\,BC$.

$\because EF\not\subset$ 平面 $BCHG$，$BC\subset$ 平面 $BCHG$，

$\therefore EF\,/\!/$ 平面 $BCHG$.

$\because A_1G \mathrel{\underline{/\!/}} EB$，$\therefore$ 四边形 A_1EBG 是平行四边形，

$\therefore A_1E\,/\!/\,GB$.

$\because A_1E\not\subset$ 平面 $BCHG$，$GB\subset$ 平面 $BCHG$，

$\therefore A_1E\,/\!/$ 平面 $BCHG$.

$\because A_1E\cap EF=E$，$\therefore$ 平面 $EFA_1\,/\!/$ 平面 $BCHG$.

20. (1) 直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore BB_1\perp AC$.

又 $\because \angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$AB=2AD=2CD=2$，

$\therefore AC=\sqrt{2}$，$\angle CAB=45^\circ$，$\therefore BC=\sqrt{2}$，$\therefore BC\perp AC$.

又 $BB_1\cap BC=B$，$\therefore AC\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(2) 由 P 为 A_1B_1 的中点，有 $PB_1\,/\!/\,AB$，且 $PB_1=\frac{1}{2}AB$.

又 $\because DC\,/\!/\,AB$，$DC=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore DC\,/\!/\,PB_1$，且 $DC=PB_1$，

$\therefore$ 四边形 DCB_1P 为平行四边形，从而 $CB_1\,/\!/\,DP$.

又 $CB_1\subset$ 平面 ACB_1，$DP\not\subset$ 平面 ACB_1，所以 $DP\,/\!/$ 平面 ACB_1.

同理，DP∥平面 BCB_1.

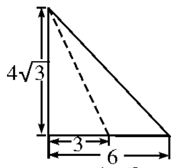
21. 解法一：(1) 在梯形 $ABCD$ 中，过点 C 作 $CE \perp AB$，垂足为 E，如图(2)．由已知得，四边形 $ADCE$ 为矩形，$AE = CD = 3$，

在 $Rt\triangle BEC$ 中，由 $BC = 5$，$CE = 4$，依勾股定理得：$BE = 3$，从而 $AB = 6$，

又由 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ 得，$PD \perp AD$，

从而在 $Rt\triangle PDA$ 中，由 $AD = 4$，$\angle PAD = 60°$，得 $PD = 4\sqrt{3}$，

正视图如图(1)所示.



正视图

(1)

(2) 取 PB 中点 N，连接 MN，CN，如图(2)

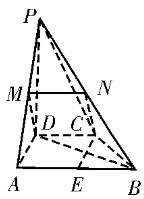
在 $\triangle PAB$ 中，M 是 PA 的中点，

$\therefore MN \parallel AB$，$MN = \frac{1}{2}AB = 3$，又 $CD \parallel AB$，$CD = 3$，$\therefore MN \parallel CD$，$MN = CD$，

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 为平行四边形，$\therefore DM \parallel CN$，

又 $DM \not\subset$ 平面 PBC，$CN \subset$ 平面 PBC，

$\therefore DM \parallel$ 平面 PBC，



(2)

(3) $V_{D-PBC} = V_{P-DBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle DBC} \cdot PD$，

又 $S_{\triangle DBC} = 6$，$PD = 4\sqrt{3}$，所以 $V_{D-PBC} = 8\sqrt{3}$.

解法二：(1) 同解法一.

(2) 取 AB 的中点 E，连接 ME，DE，如图(3)

在梯形 $ABCD$ 中，$BE \parallel CD$，且 $BE = CD$，

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

$\therefore DE \parallel BC$. 又 $DE \not\subset$ 平面 PBC，$BC \subset$ 平面 PBC，

$\therefore DE \parallel$ 平面 PBC，又在 $\triangle PAB$ 中，$ME \parallel PB$，

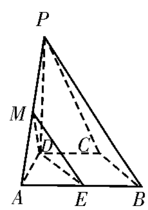
且 $ME \not\subset$ 平面 PBC，$PB \subset$ 平面 PBC，

$\therefore ME \parallel$ 平面 PBC. 又 $DE \cap ME = E$，

$\therefore$ 平面 $DME \parallel$ 平面 PBC，又 $DM \subset$ 平面 DME，

$\therefore DM \parallel$ 平面 PBC.

(3) 同解法一.



(3)

第 21 题图

第二章　平面解析几何初步

2.1　平面直角坐标系中的基本公式

2.1.1　数轴上的基本公式

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】$AB + CA = x_B - x_A + x_A - x_C = x_B - x_C = 2 - 3 = -1$.
2. B
3. D
4. 6 或 -4
5. -5　5 【解析】$AB = x_B - x_A = -2 - 3 = -5$，$|AB| = |-2-3| = 5$.
6. (1) $\because -1.5 > -3$，$\therefore A(-1.5)$ 位于 $B(-3)$ 的右侧；

(2) $\because a^2 + 1 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0$，

$\therefore a^2 + 1 > a$，$\therefore B(a^2+1)$ 位于 $A(a)$ 的右侧；

(3) 当 $x \geqslant 0$ 时，$|x| = x$，则 $A(|x|)$ 和 $B(x)$ 为同一个点.

当 $x < 0$ 时，$|x| > x$，则 $A(|x|)$ 位于 $B(x)$ 的右侧.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】设 $C(x)$，则 $AB = -7$，$CB = -2 - x$. $\because AB = BC$，$\therefore -7 = x + 2$，$\therefore x = -9$.
2. C 【解析】向量坐标的绝对值等于向量的长度，故②不正确.
3. B 【解析】由题意知 $d - 2a = 10$，又因为 $d - a = 7$，$\therefore a = -3$，$\therefore B$ 点为原点.
4. D 【解析】若几个向量的和为零，则一定存在相反方向的向量. A 中为同向向量，和不可能为零；B 中无法判定方向是否相同；C 中若 P,Q,R 自左至右也为同向，选 D.
5. 0 或 $-\frac{16}{3}$ 【解析】由题意可得 $|x+8| = 2|x+4|$，解得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{16}{3}$.
6. $\frac{1}{c-b}$ 【解析】由题图知，$a < b < c < 0$，$\therefore a - b < 0$，$c - b > 0$，$a - c < 0$，

$\therefore \frac{1}{a-b} < 0$，$\frac{1}{a-c} < 0$，$\frac{1}{c-b} > 0$，$\therefore \frac{1}{a-b}$，$\frac{1}{c-b}$，$\frac{1}{a-c}$ 中最大的为 $\frac{1}{c-b}$.

7. $\because A$ 点的坐标是 $x_1 = a + b$，

B 点的坐标是 $x_2 = a - b$，

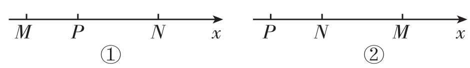
$\therefore AB = x_2 - x_1 = (a-b) - (a+b) = -2b$，

$BA = x_1 - x_2 = (a+b) - (a-b) = 2b$.

8. $\because M$、N、P 是数轴上三点，$|MN| = 5$，$|NP| = 3$，

$\therefore$ (1) 当点 P 在点 M，N 之间时（如图①所示），

$d(M,P) = |MN| - |NP| = 5 - 3 = 2$.



第 8 题图

(2) 当点 P 在点 M，N 之外时（如图②所示），

$d(M,P) = |MN| + |NP| = 5 + 3 = 8$.

综上所述，$d(M,P) = 2$ 或 $d(M,P) = 8$.

9. 因为点 $A(x)$ 位于 $B(x^2)$ 的右侧，所以 $x^2 < x$，即 $0 < x < 1$，$d(A,B) = |x^2 - x| = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. 因为 $0 < x < 1$，所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时，$d(A,B)_{\max} = \frac{1}{4}$.

2.1.2　平面直角坐标系中的基本公式

★ 课堂作业 ★

1. C 【解析】平面上任意点 (x,y) 关于原点的对称点是 $(-x,-y)$.
2. D 【解析】由中点公式，得 $2 = \frac{x+8}{2}$，故 $x = -4$，$2 = \frac{3+y}{2}$，故 $y = 1$.
3. A 【解析】由于 A，B 两点的横坐标都是 3，故 C 点的横坐标也是 3，设 $C(3,y)$，则 $|AB| = |4-(-5)| = 9$，

$|CB|=|4-y|$,由题意得 $9=2|4-y|$,所以 $y=-\frac{1}{2}$ 或 $y=\frac{17}{2}$.

4. $(2,-7)$ 或 $(-3,-5)$ 【解析】设 $C(a,b)$,则 AC 的中点为 $M(\frac{3+a}{2},\frac{7+b}{2})$,$BC$ 的中点为 $N(\frac{a-2}{2},\frac{b+5}{2})$,因为 M,N 都在坐标轴上,所以 $\begin{cases}\frac{3+a}{2}=0,\\ \frac{b+5}{2}=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{7+b}{2}=0,\\ \frac{a-2}{2}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=-3,\\ b=-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\ b=-7.\end{cases}$

5. 直角三角形 【解析】$|AB|=\sqrt{(-3-3)^2+[0-(-2)]^2}=\sqrt{40}$,

$|AC|=\sqrt{[-3-(-1)]^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}$,

$|BC|=\sqrt{(-1-3)^2+[2-(-2)]^2}=\sqrt{32}$.

因为 $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$,$|AB|\neq|AC|\neq|BC|$,所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

6. $x_1=2,x_2=-2,y_1=-4,y_2=3$,

$\Delta x=x_2-x_1=-4,\Delta y=y_2-y_1=7$,

$\therefore d(A,B)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{65}$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】由点 A,B 的坐标可知,$|AB|=\sqrt{(a-b)^2+(-\sqrt{ab}-\sqrt{ab})^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=|a+b|$. 这里应特别注意 a,b 的符号,由已知坐标中的 $\sqrt{ab}$,只能判断 a,b 同号,所以结果应保留绝对值符号.

2. C 【解析】由已知点的坐标有,$|AB|=\sqrt{(a+a)^2}=2|a|$,$|BC|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=|a|$,$|AC|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{3}|a|$,所以 $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$,所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

3. D 【解析】设第四个顶点的坐标为 (x,y),然后分情况讨论. 若点 $(3,-2)$,$(5,2)$ 为平行四边形的对顶点,则有 $\frac{3+5}{2}=\frac{-1+x}{2}$,$\frac{-2+2}{2}=\frac{4+y}{2}$,即第四个顶点的坐标为 $(9,-4)$. 同理,若 $(5,2)$,$(-1,4)$ 为平行四边形的对顶点,则第四个顶点为 $(1,8)$. 若 $(3,-2)$,$(-1,4)$ 为平行四边形的对顶点,可求第四个顶点为 $(-3,0)$.

4. C 【解析】由题意有 $|AB|^2=(5-a-1)^2+(2a-1-a+4)^2=2a^2-2a+25=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{2}$,所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$|AB|$ 最小.

5. 2 或 -6 【解析】因为点 $A(-1,2)$ 关于原点的对称点为 $(1,-2)$,它与点 $(3,m)$ 之间的距离为 $\sqrt{(3-1)^2+(m+2)^2}$,所以 $\sqrt{4+(m+2)^2}=2\sqrt{5}$,即 $m^2+4m+8=20$,所以 $m=2$ 或 $m=-6$.

6. (1)3,1,6 (2)79 【解析】(1)面积易求得为 3,内部有一个格点,边界有 6 个格点.

(2)易知在最小的三角形中,$S=\frac{1}{2}$,$N=0$,$L=3$,结合已知数据可列出三个方程:$\begin{cases}\frac{1}{2}=a\times0+b\times3+c,\\ 1=a\times0+b\times4+c,\\ 3=a\times1+b\times6+c.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1.\\ b=\frac{1}{2},\\ c=-1.\end{cases}$

所以 $S=1\times71+\frac{1}{2}\times18-1=71+9-1=79$.

7. 由中点坐标公式得,边 AB 的中点 M 的坐标为 $(1,1)$,边 BC 的中点 N 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,边 AC 的中点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$,所以三条中线长分别为

$|AN|=\sqrt{\left(0-\frac{5}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

$|BP|=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

$|CM|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

8. $|AB|=\sqrt{(2+7)^2+(-3)^2}=3\sqrt{10}$,$|BC|=\sqrt{(5-2)^2+(6+3)^2}=3\sqrt{10}$,$|AC|=\sqrt{(5+7)^2+6^2}=6\sqrt{5}$,所以 $|AB|=|BC|$ 且 $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times3\sqrt{10}=45$.

9. P 点的坐标 (x_0,y_0) 满足 $y=\frac{x}{2}$,即 $x_0=2y_0$,所以 $|PA|^2+|PB|^2=(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(x_0-2)^2+(y_0-2)^2=(2y_0-1)^2+(y_0-1)^2+(2y_0-2)^2+(y_0-2)^2=10y_0^2-18y_0+10=10\left(y_0-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{19}{10}$,所以 $|PA|^2+|PB|^2\geqslant\frac{19}{10}$(当且仅当 $y_0=\frac{9}{10}$ 时取等号),所以 $|PA|^2+|PB|^2$ 取得最小值 $\frac{19}{10}$ 时,$y_0=\frac{9}{10}$,$x_0=\frac{2\times9}{10}=\frac{9}{5}$,所以 P 点的坐标为 $\left(\frac{9}{5},\frac{9}{10}\right)$.

2.2 直线的方程

2.2.1 直线方程的概念与直线的斜率

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】当两点所在直线与 x 轴垂直时,直线的斜率不存在,故应选 D.

2. B 【解析】由倾斜角和斜率的定义知,当倾斜角 $\alpha=90°$ 时,则 l 的斜率不存在,故①是错误的;因为 $\tan135°=\tan(180°-45°)=-\tan45°=-1$,所以当 $k=-1$ 时,$\alpha=135°$,故②是错误的;与 y 轴平行的直线倾斜角为 $90°$,故③也是错误的;只有④是正确的,即正确的个数

为 1 个,故选 B.

3. D 【解析】由 $k_{AB}=k_{BC}$得,$-1=\dfrac{m+2}{-\frac{5}{2}}$,$\therefore m=\dfrac{1}{2}$.

4. 45° 【解析】$\because k=\dfrac{b+c-(a+c)}{b-a}=1$,$\therefore$ 倾斜角为 45°.

5. 4 【解析】因为 A,B,C 三点共线,且直线 AC 的斜率存在,所以直线 BC 的斜率也存在且 $k_{AC}=k_{BC}$. 因为 $k_{AC}=\dfrac{4-2}{0-2}=-1$,$k_{BC}=\dfrac{4-0}{0-a}=-\dfrac{4}{a}$,即 $-\dfrac{4}{a}=-1$,所以 $a=4$. 这里应注意,由斜率相等能推出三点共线,但三点共线却不一定能推出三点中任意两点连线的斜率相等,其中可能有斜率不存在的情况.

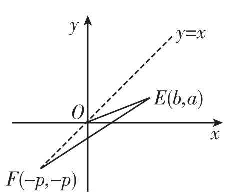
6. 由三点坐标知,直线的斜率存在,
由$\dfrac{2-1}{a-5}=\dfrac{2a-1}{-4-5}$,解得 $a_1=2$,$a_2=\dfrac{7}{2}$.

★ 课后作业 ★

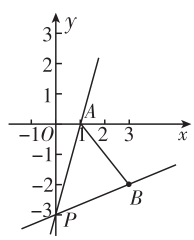
1. B 【解析】$\because \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$0°\leqslant\alpha<180°$,$\therefore \alpha=30°$,
$\therefore 2\alpha=60°$,$\therefore k=\tan 2\alpha=\sqrt{3}$,故选 B.

2. C 【解析】A 中 $k=\dfrac{4-2}{3-a-1}=\dfrac{2}{2-a}$,当 $a=2$ 时,k 不存在;B 中 $k=\dfrac{4-3}{-m-m}=-\dfrac{1}{2m}$,当 $m=0$ 时,k 不存在;C 中 $k=\dfrac{2a-a}{7+b-b+3}=\dfrac{a}{10}$;D 中 $k=\dfrac{7-m}{n-5}$,当 $n=5$ 时,k 不存在,故选 C.

3. A 【解析】由斜率的意义知,m 表示点 $E(b,a)$ 与 $F(-p,-p)$ 连线的斜率,n 表示点 E 与原点连线的斜率,如图. $\because 0<a<b$,易知点 E 在直线 $y=x$ 下方,$F(-p,-p)$在直线 $y=x$ 上,显然 $k_{EF}>k_{EO}$,即 $m>n$,故选 A.



第 3 题图



第 4 题图

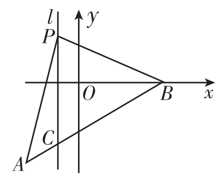
4. A 【解析】$k_{PB}=\dfrac{1}{3}$,$k_{PA}=3$,当直线 l 绕点 P 由 PB 逆时针转到 PA 时,斜率逐渐增大,如图$\therefore$ l 的斜率$k\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$.

5. 三点在同一条直线上 【解析】设三点分别为 P,M,N,直线 PM,PN 的斜率分别为 k_{PM},k_{PN},则 $k_{PM}=\dfrac{a-c}{b+c-(a+b)}=\dfrac{a-c}{c-a}=-1$,$k_{PN}=\dfrac{b-c}{c+a-(a+b)}=\dfrac{b-c}{c-b}=-1$,所以 $k_{PM}=k_{PN}$,又两直线过同一点 P,所以三点共线.

6. $(1,-5)$ 【解析】设 $P(x,y)$,则$\dfrac{y-3}{x-5}=2$,$\dfrac{y-2}{x-(-3)}=-\dfrac{7}{4}$,化简方程得 $\begin{cases}y=2x-7,\\4y=-7x-13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-5,\end{cases}$ 所以$P(1,-5)$.

7. 斜率存在时设直线 l 的斜率为 k,$k=\dfrac{m-1}{-1-m}=\dfrac{1-m}{m+1}$,
(1)若直线 l 与 x 轴平行,则 $k=0$,所以 $m=1$;(2)若直线 l 与 y 轴平行,则 k 不存在,只需 $m=-1$ 即可;(3)若直线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{3}$,需$\dfrac{1-m}{m+1}=\dfrac{1}{3}$,所以 $3-3m=m+1$,所以 $m=\dfrac{1}{2}$.

8. 如图所示,$k_{PA}=\dfrac{2-(-3)}{-1-(-2)}=5$,$k_{PB}=\dfrac{2-0}{-1-3}=-\dfrac{1}{2}$,$l$ 从 PA 变到与 y 轴平行的位置 PC 时,l 的斜率从 5 开始增加,直到趋向 $+\infty$,即 $k\in[5,+\infty)$,当 l 再由 PC 变到 PB 时,l 的斜率由 $-\infty$ 增加到 $-\dfrac{1}{2}$,则 $k\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$,所以 l 的斜率 k 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[5,+\infty)$.



第 8 题图

9. $y=\dfrac{1-x}{2+x}$表示两点 $A(2,1)$与点 $B(-x,x)$连线所在直线的斜率,显然 $A(2,1)$为定点,$B(-x,x)$在直线 $y=-x$ 上运动. 又因为 $1\leqslant x\leqslant 3$,所以 B 点在以 $M(-1,1)$和 $N(-3,3)$为端点的线段上运动.
$k_{AM}=\dfrac{1-1}{-1-2}=0$,$k_{AN}=\dfrac{3-1}{-3-2}=-\dfrac{2}{5}$,所以 $k_{AB}\in\left[-\dfrac{2}{5},0\right]$,即函数 $y=\dfrac{1-x}{2+x}$ $(1\leqslant x\leqslant 3)$ 的值域为$\left[-\dfrac{2}{5},0\right]$.

2.2.2 直线方程的几种形式

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】令 $x=0$,得 $y=-\dfrac{4}{5}$.

2. B 【解析】斜率不存在.

3. B 【解析】令 $x=0$,得 $y=-b^2$.

4. 27 【解析】直线方程为$\dfrac{y-5}{6-5}=\dfrac{x-2}{-3-2}$,即 $y-5=-\dfrac{1}{5}(x-2)$,令 $y=0$,得 $x=27$.

5. $y-3=\dfrac{3}{2}(x+4)$ 【解析】斜率为$\dfrac{3}{2}$,且过点$(-4,3)$,
$\therefore y-3=\dfrac{3}{2}(x+4)$.

6. (1)$\because$ 直线过点 $P(-4,3)$,斜率 $k=-3$,$\therefore$ 由直线方程的点斜式得直线方程为 $y-3=-3(x+4)$,即 $3x+y+9=0$.
(2)与 x 轴平行的直线,其斜率 $k=0$,由直线方程的点斜

式可得直线方程为 $y-(-4)=0(x-3)$,即 $y=-4$.

(3)与 y 轴平行的直线,其斜率 k 不存在,不能用点斜式方程表示,但直线上点的横坐标均为 5,故直线方程为 $x=5$.

(4)过点 $P(-2,3)$,$Q(5,-4)$ 的直线斜率 $k_{PQ}=\frac{-4-3}{5-(-2)}=\frac{-7}{7}=-1$.

又∵ 直线过点 $P(-2,3)$,∴ 由直线方程的点斜式可得直线方程为

$y-3=-1(x+2)$,即 $x+y-1=0$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】∵ $a+b=0$,∴ $b=-a$,∴ $y=ax-a$,∴ $y=a(x-1)$,过定点(1,0).
2. B 【解析】$k=-1$,$b\in\mathbf{R}$. $b>0$ 时,过第一、二、四象限;$b=0$ 时,过第二、四象限;$b<0$ 时,过第二、三、四象限.
3. B 【解析】∵ 直线 $y=kx+b$ 中 k 可以取 0,一次函数 $y=kx+b$ 中隐含 $k\neq0$,∴ $N\subsetneqq M$.
4. C 【解析】l 过原点时有一条,不过原点只能是斜率为 -1,有一条,共两条.
5. $-ab$ 【解析】直线方程为 $y=b(x-a)$,当 $x=0$ 时,$y=-ab$.
6. $\frac{1}{2}$ 【解析】直线 BC 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

   由 A 在直线 BC 上,∴ $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$,∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$.
7. 设直线方程为 $y=\frac{1}{6}x+b$,则 $x=0$ 时,$y=b$;$y=0$ 时,$x=-6b$.

   由已知可得 $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|-6b|=3$,即 $6|b|^2=6$,∴ $b=\pm1$.

   故所求直线方程为 $y=\frac{1}{6}x+1$ 或 $y=\frac{1}{6}x-1$,即

   $x-6y+6=0$ 或 $x-6y-6=0$.
8. ∵ $|AB|=4$,

   ∴ $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=2\sqrt{2}$,

   ∴ A、B、C、D 的坐标分别为

   $A(2\sqrt{2},0)$、$B(0,2\sqrt{2})$、$C(-2\sqrt{2},0)$、$D(0,-2\sqrt{2})$,

   ∴ 直线 AB:$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=1$;

   直线 CD:$\frac{x}{-2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2\sqrt{2}}=1$;

   直线 BC:$\frac{x}{-2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=1$;

   直线 AD:$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2\sqrt{2}}=1$.

   ∴ 直线 AB:$x+y-2\sqrt{2}=0$;直线 CD:$x+y+2\sqrt{2}=0$;

   直线 BC:$x-y+2\sqrt{2}=0$;直线 AD:$x-y-2\sqrt{2}=0$.

   四条对称轴所在直线的方程为:$x+y=0$,$x-y=0$,$x=0$ 及 $y=0$.
9. 设直线 l 的横截距为 a,由题可得纵截距为 $6-a$,

   ∴ 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{6-a}=1$.

   ∵ 点(1,2)在直线 l 上,∴ $\frac{1}{a}+\frac{2}{6-a}=1$.

   即 $a^2-5a+6=0$,解得 $a_1=2$,$a_2=3$.

   当 $a=2$ 时,直线方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$,直线经过第一、二、四象限;

   当 $a=3$ 时,直线方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$,直线经过第一、二、四象限.

   综上所述,所求直线方程为 $2x+y-4=0$ 或 $x+y-3=0$.

第二课时

★ 课堂作业 ★

1. B
2. C
3. C 【解析】直线 $y=ax$ 过原点,若 $a>0$,应是 A 与 B,但直线 $y=x+a$ 的纵截距 a 应为正值,故排除 A、B;当 $a<0$ 时,应是 C 与 D,但 D 中直线 $y=x+a$ 的倾斜方向不对(因为斜率为 1),故排除 D,选 C.
4. $\sqrt{3}x-y-2=0$ 【解析】由题意知直线 l 的斜率 $k=\sqrt{3}$,故由直线方程的斜截式可得所求直线方程为 $\sqrt{3}x-y-2=0$.
5. $(-2,3)$ 【解析】将直线方程转化为 $a(x+2)+(-x-y+1)=0$,由 $\begin{cases}x+2=0,\\-x-y+1=0,\end{cases}$ 得定点为$(-2,3)$.
6. 方法一:∵ 直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率为 5,

   ∴ $B\neq0$,且 $-\frac{A}{B}=5$,即 $A=-5B$,①

   又∵ $A-2B+3C=0$,②

   由①②得,$-5B-2B+3C=0$,

   ∴ $C=\frac{7}{3}B$,③

   把①③代入直线方程,得 $-5Bx+By+\frac{7}{3}B=0$.

   又∵ $B\neq0$,∴ $-5x+y+\frac{7}{3}=0$.

   故所求直线方程为 $15x-3y-7=0$.

   方法二:∵ $A-2B+3C=0$,∴ $A\cdot\frac{1}{3}+B\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+C=0$,∴ 直线经过点 $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

   又∵ 斜率为 5,∴ 所求直线方程为 $y+\frac{2}{3}=5\left(x-\frac{1}{3}\right)$,

   即 $15x-3y-7=0$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】直线方程变为 $y=2x+1$,直线经过第一、二、三象限.
2. C 【解析】直线与 x,y 轴的负半轴都有交点,直线过二、三、四象限.
3. D 【解析】设直线在 x 轴,y 轴上的截距分别是 a、b,则

有$S=\frac{1}{2}|a\cdot b|=1$，

所以 $ab=\pm2$. 设直线的方程是$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

因为直线过点$(-2,2)$，代入直线方程得$\frac{-2}{a}+\frac{2}{b}=1$，

即 $b=\frac{2a}{a+2}$.

所以 $ab=\frac{2a^2}{a+2}=\pm2$，解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

所以，直线方程是$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1$ 或$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$.

4. D 【解析】由对称性可得 $B(2,0)$，$\therefore k_{AB}=\frac{3}{1-2}=-3$，

$\therefore y-3=-3(x-1)$.

5. 0 【解析】由 $x^2-y^2=a$ 得 $y^2=x^2-a$，

$\therefore y=\pm\sqrt{x^2-a}$，

$\because$ 方程表示直线，x,y 都为一次，$\therefore a=0$.

6. 方法一：由方程 $ax+y+a+2=0$，得 $a(x+1)+y+2=0$.

由题意，知上式是关于 a 的恒等式，必有$\begin{cases}x+1=0,\\y+2=0,\end{cases}$所以

$\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$将其代入直线满足直线方程，所以直线 $ax+y+a+2=0$ 必过定点$(-1,-2)$.

方法二：将直线方程改写为 $y+2=-a(x+1)$，将 $-a$ 看成直线的斜率，这就是点斜式方程，所以直线一定过定点$(-1,-2)$.

7. $kx+y-k=0$ 过定点 $Q(1,0)$ 且斜率为 $-k$，

点 $S\left(-1,\frac{1}{2}\right)$为射线 $3x-4y+5=0$ 的端点.

$\because k_{QS}=-\frac{1}{4}$，结合图象知，若要有交点，则 $-k>\frac{3}{4}$或 $-k\leqslant-\frac{1}{4}$，$\therefore k<-\frac{3}{4}$或 $k\geqslant\frac{1}{4}$.

8. 设直线 l 在 x 轴，y 轴上的截距分别为 a,b，

则由已知可得$\begin{cases}\frac{1}{2}ab=2,\\|a-b|=3.\end{cases}$ ①

当 $a\geqslant b$ 时，①可化为$\begin{cases}\frac{1}{2}ab=2,\\a-b=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=4,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1,\\b=-4,\end{cases}$(舍去)；

当 $a<b$ 时，①可化为$\begin{cases}\frac{1}{2}ab=2,\\b-a=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=4,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4,\\b=-1.\end{cases}$(舍去).

所以，直线 l 的截距式方程为$\frac{x}{4}+y=1$ 或 $x+\frac{y}{4}=1$.

所以，直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$ 或 $4x+y-4=0$.

2.2.3 两条直线的位置关系

第一课时

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】直线 l_1 与 l_2 的斜率都不存在，且 $1\neq0$，

$\therefore l_1\parallel l_2$.

2. B 【解析】两直线平行，则$\frac{a}{3}=\frac{2}{-1}\neq\frac{2}{-2}$，得 $a=-6$，故选 B.

3. A 【解析】由题意可知，$k_{AB}=\frac{4-m}{m+2}=-2$，所以 $m=-8$.

4. $6x+y-7=0$

5. $8x+16y+21=0$ 【解析】由$\begin{cases}3x-5y-10=0,\\x+y+1=0,\end{cases}$得交点为

$\left(\frac{5}{8},-\frac{13}{8}\right)$，$l_3$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 所求直线方程为 $y+\frac{13}{8}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{8}\right)$，得 $8x+16y+21=0$.

6. (1)$k_1=\frac{1-(-2)}{2-(-1)}=1$，$k_2=\frac{-1-4}{-1-3}=\frac{5}{4}$，$\because k_1\neq k_2$，$\therefore l_1$ 与 l_2 不平行.

(2)$k_1=1$，$k_2=\frac{2-1}{2-1}=1$，$\because k_1=k_2$，$\therefore l_1\parallel l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

(3)$k_1=\frac{0-1}{1-0}=-1$，$k_2=\frac{0-3}{2-(-1)}=-1$，则有 $k_1=k_2$.

又 $k_{AM}=\frac{3-1}{-1-0}=-2\neq-1$，即 A,B,M 不共线，故 $l_1\parallel l_2$.

(4)由已知点的坐标，得 l_1 与 l_2 均与 x 轴垂直且不重合，故有 $l_1\parallel l_2$.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】$\because x-2y-2=0$ 的斜率为 $k=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 所求直线 $y-0=\frac{1}{2}(x-1)$，$\therefore x-2y-1=0$.

2. B 【解析】$2x+3y+5=0$ 的斜率为 $k=-\frac{2}{3}$，

$\therefore$ 直线$(a-2)x+ay-1=0$ 的斜率 $k=-\frac{a-2}{a}=-\frac{2}{3}$，

$\therefore a=6$.

3. C 【解析】由两直线平行的条件知若两条直线中一条直线斜率不存在，另一条直线斜率存在，则它们一定不平行.

4. C 【解析】$A\cap B=\varnothing$包含两种情况：①直线 $4x+ay-16=0$过点$(1,3)$；②直线 $4x+ay-16=0$ 与 $y-3=2(x-1)$平行，由①可得 $a=4$；又由②可得 $a=-2$.

5. $(0,-2)$ 【解析】依题意，直线 CD 的斜率 $k_{CD}=k_{AB}=\frac{8-0}{6-(-2)}=1$，且过 $C(8,6)$，则直线 CD 的方程为 $y-6=1\times(x-8)$，即 $x-y-2=0$. 直线 AD 的斜率为 $k_{AD}=k_{BC}=\frac{6-8}{8-6}=-1$，且过点 $A(-2,0)$，则 AD 的方程为 $y=$

$-1\times(x+2)$，即 $x+y+2=0$. 由 $\begin{cases}x-y-2=0,\\x+y+2=0,\end{cases}$

得 $D(0,-2)$.

6. $-\dfrac{2}{3}$ 【解析】由题意可知直线 l_2 的斜率为 $k_2=3$.

(1)当 $m=0$ 时，直线 $l_1:2x+1=0$ 的斜率不存在，而直线 l_2 的斜率 k_2 存在，所以直线 l_1 不与直线 l_2 平行；

(2)当 $m\neq0$ 时，直线 l_1 的斜率 $k_1=-\dfrac{2}{m}$，要使直线 l_1 与直线 l_2 平行，则应满足 $k_1=k_2=3$，即 $-\dfrac{2}{m}=3$，解得 $m=-\dfrac{2}{3}$.

7. 方法一：由任意两条直线相交，得 $\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{1}{1}$，

$\therefore a\neq\pm1$，且三条直线不共点.

由 $\begin{cases}x+ay+1=0,\\x+y+a=0,\end{cases}$ 得交点 $(-1-a,1)$，此交点不在直线 $ax+y+1=0$ 上，

即 $a(-1-a)+1+1\neq0$，$\therefore a^2+a-2\neq0$，

$\therefore a\neq-2$，且 $a\neq1$.

综上可知，$a\neq-2$，且 $a\neq\pm1$.

方法二：若三条直线能构成三角形，则三条直线两两相交且不共点，即任意两条直线都不平行且三条直线不共点. 若 l_1、l_2、l_3 交于一点，则 $x+y+a=0$ 与 $x+ay+1=0$ 的交点 $P(-a-1,1)$ 在直线 $l_3:ax+y+1=0$ 上，则 $a(-a-1)+1+1=0$，$\therefore a=1$ 或 $a=-2$.

若 $l_1/\!/l_2$，则有 $-\dfrac{1}{a}=-1$，$\therefore a=1$；若 $l_1/\!/l_3$，则有 $-a=-1$，$\therefore a=1$；若 $l_2/\!/l_3$，则有 $-\dfrac{1}{a}=-a$，$\therefore a=\pm1$. $\therefore$ 当 l_1、l_2、l_3 构成三角形时，$a\neq\pm1$ 且 $a\neq-2$

8. (1)$A_1B_2-A_2B_1=(m-2)(m-2)-2\times2=(m-2)^2-4\neq0$，得 $(m-2)^2\neq4$ 即 $m-2\neq\pm2$，

$\therefore$ 当 $m\neq4$ 且 $m\neq0$ 时 l_1 与 l_2 相交.

(2)由 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 得 $m=0$ 或 $m=4$，

当 $m=0$ 时，两直线方程分别为 $-2x+2y-2=0$，$2x-2y+3=0$，此时 $l_1/\!/l_2$；

当 $m=4$ 时，两直线方程为 $2x+2y+2=0$，$2x+2y+3=0$，此时 $l_1/\!/l_2$.

故 $m=0$ 或 $m=4$ 时，$l_1/\!/l_2$.

(3)由(2)知：直线 l_1 与 l_2 不可能重合.

9. 方法一：设直线 l 的斜率为 k，

$\because$ 直线 l 与直线 $3x+4y+1=0$ 平行，$\therefore k=-\dfrac{3}{4}$.

又$\because$ 直线 l 过点 $(1,2)$，

$\therefore$ 所求直线方程为 $y-2=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，

即 $3x+4y-11=0$.

方法二：设与直线 $3x+4y+1=0$ 平行的直线 l 的方程为 $3x+4y+m=0$，

$\because$ 直线 l 过点 $(1,2)$，

$\therefore 3\times1+4\times2+m=0$，解得 $m=-11$，

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $3x+4y-11=0$.

第二课时

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】由两直线垂直可得 $(m+1)(m-1)+m(m+1)=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$.
2. C 【解析】由 $(2n+1)(n-3)+(1-2n)(n+5)=0$ 得 $2n^2-5n-3-2n^2-9n+5=0$，所以 $n=\dfrac{1}{7}$.
3. C 【解析】两条直线的斜率分别为 -2 和 $-\dfrac{1}{2}$，所以既不平行也不垂直.
4. 直角 【解析】由 $x-3y-3=0$ 和 $6x+2y+5=0$ 垂直可知该三角形是直角三角形.
5. $x-y+1=0$
6. (1)$A_1=1$，$B_1=-1$，$A_2=2$，$B_2=2$.

$\because A_1A_2+B_1B_2=1\times2+(-1)\times2=0$，

$\therefore$ 两直线垂直.

(2)$A_1=1$，$B_1=4$，$A_2=4$，$B_2=-3$.

$\because A_1A_2+B_1B_2=1\times4+4\times(-3)=-8\neq0$，

$\therefore$ 两直线不垂直.

(3)$A_1=2$，$B_1=-1$，$A_2=1$，$B_2=-2$.

$\because A_1A_2+B_1B_2=2\times1+(-1)\times(-2)=4\neq0$，

$\therefore$ 两直线不垂直.

★ 课后作业 ★

1. B 【解析】线段 AB 的中点为 $\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$，且 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\dfrac{3}{2}=2(x-2)$，即 $4x-2y-5=0$.

2. A 【解析】设所求直线方程为 $4x-3y+C=0$，将 $(-2,0)$ 代入得 $C=8$，故方程为 $4x-3y+8=0$.
3. D 【解析】$\because k_{PQ}=\dfrac{a+1-b}{b-1-a}=-1$，$\therefore k_l=1$. 显然 $x-y=0$ 错误，故选 D.
4. B 【解析】$2x-y-3=0$ 与 x 轴交点为 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，所以 $2x-y-3=0$ 关于 x 轴的对称直线为 $2x+y-3=0$，而直线经过互为直角的两直线反射后斜率不变，所以 l_3 的方程为 $2x-y+3=0$.
5. 3 或 -3 【解析】设直线方程为 $4x+3y+d=0$.

令 $x=0$ 和 $y=0$，得直线在两坐标轴上的截距分别是 $-\dfrac{d}{3}$，$-\dfrac{d}{4}$，$\therefore 6=\dfrac{1}{2}\times\left|-\dfrac{d}{3}\right|\times\left|-\dfrac{d}{4}\right|=\dfrac{d^2}{24}$，

$\therefore d=\pm12$，$\therefore -\dfrac{d}{4}=\pm3$.

6. $3x+y-13=0$ 【解析】当 $l\perp AB$ 时符合要求，$\because k_{AB}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore l$ 的斜率为 -3，$\therefore l$ 的方程为 $y-4=-3(x-3)$，

即 $3x+y-13=0$.

7. 由方程组$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\2x+y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$即两直线的交点为$(-2,2)$. 设所求直线为 $2x-5y+m=0$,将点$(-2,2)$坐标代入,得 $2\times(-2)-5\times2+m=0$,解得$m=14$. 故所求直线方程为 $2x-5y+14=0$.

8. 设 $P'(x,y)$,∵ $PP'\perp l$,∴ $\frac{y-4}{x-2}\cdot2=-1$. ①

又∵ 线段 PP'的中点在直线 l 上,

∴ $2\cdot\frac{x+2}{2}-\frac{y+4}{2}+1=0$. ②

由①②组成方程组可解得$\begin{cases}x=\frac{6}{5},\\y=\frac{22}{5}.\end{cases}$ ∴ $P'\left(\frac{6}{5},\frac{22}{5}\right)$.

9. 由斜率公式得 $k_{OP}=\frac{t-0}{1-0}=t$,

$k_{QR}=\frac{2-(2+t)}{-2t-(1-2t)}=\frac{-t}{-1}=t$,

$k_{OR}=\frac{2-0}{-2t-0}=-\frac{1}{t}$,

$k_{PQ}=\frac{2+t-t}{1-2t-1}=\frac{2}{-2t}=-\frac{1}{t}$.

∴ $k_{OP}=k_{QR}$,$k_{OR}=k_{PQ}$,

从而 $OP/\!/QR$,$OR/\!/PQ$. ∴ 四边形 $OPQR$ 为平行四边形.

又 $k_{OP}\cdot k_{OR}=-1$,∴ $OP\perp OR$,

故四边形 $OPQR$ 为矩形.

2.2.4 点到直线的距离

★ 课堂作业 ★

1. D 【解析】点$(1,-1)$到直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|1-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. B 【解析】先将两直线方程化为一般式:$2x-y=0$,$2x-y+5=0$,由公式 $d=\frac{|5-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$.

3. C 【解析】设所求的直线方程为 $3x-4y+c=0$. 由题意知$\frac{|c+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$,解得 $c=9$ 或 $c=-11$.

4. -3 【解析】∵ $d=\frac{|4m-9+1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|4m-8|}{5}=4$,

∴ $m=7$ 或 $m=-3$. 经验证,$m=-3$ 适合,$m=7$ 舍去.

5. $\frac{13\sqrt{5}}{15}$ 【解析】直线$2x-y-1=0$可化为$6x-3y-3=0$,

则 $d=\frac{|-3-10|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\frac{13}{3\sqrt{5}}=\frac{13\sqrt{5}}{15}$.

6. 设直线的方程为 $y-2=k(x+1)$,则 $kx-y+2+k=0$,

所以$\frac{|2+k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $k=-1$ 或 $k=-7$,

故所求的直线方程为 $x+y-1=0$ 或 $7x+y+5=0$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】∵ $3x+2y-3=0$ 和 $6x+my+1=0$ 互相平行,∴ $3:2=6:m$,∴ $m=4$. 直线 $3x+2y-3=0$ 可化为 $6x+4y-6=0$,由两条平行直线间的距离公式可得:$d=\frac{|1-(-6)|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{52}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

2. C 【解析】∵ $P(a,b)$是第二象限的点,

∴ $a<0$,$b>0$. ∴ $a-b<0$.

点 P 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$.

3. A 【解析】∵ $l_1/\!/l_2$,∴ 所求直线 $l/\!/l_1$,l_1、l_2 与 y 轴交点 $P_1(0,-1)$,$P_2(0,3)$,l 过 P_1、P_2 的中点 $P(0,1)$,

∴ l 的方程为 $2x+y-1=0$.

4. B 【解析】由$\begin{cases}x-\sqrt{3}y+1=0,\\\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0\end{cases}$得交点为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

∵ $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=1$,过交点和原点的直线的斜率为$\sqrt{3}$,∴ 过交点且与原点的距离等于 1 的直线的斜率为 $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴ 所求直线唯一.

5. $\frac{49}{16}\pi$ 【解析】把 $3x+4y+12=0$ 化为 $6x+8y+24=0$,

由 $2r=\frac{|24-(-11)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{7}{2}$,得 $r=\frac{7}{4}$,∴ 圆的面积为$\pi\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}\pi$.

6. 8 【解析】x^2+y^2 可看成原点到直线上的点的距离的平方,垂直时最短,$d=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,∴ $d^2=8$.

7. ∵ $AB/\!/CD$,

∴ 可设 AB 边所在的直线方程为 $x+3y+m=0$.

又∵ $AD\perp CD$,$BC\perp CD$,∴ 可设 AD,BC 边所在的直线方程为 $3x-y+n=0$.

∵ 中心 M 到 CD 的距离为

$d=\frac{|-1+3\times0-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$,

∴ 点 M 到 AD、AB、BC 的距离均为$\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

由$\frac{|3\times(-1)-0+n|}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$,得$|n-3|=6$,

∴ $n=9$ 或 $n=-3$.

由$\frac{|-1+3\times0+m|}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$,得$|m-1|=6$,

∴ $m=7$ 或 $m=-5$(舍去).

∴ 其他三边所在的直线方程分别为 $x+3y+7=0$,$3x-y+9=0$,$3x-y-3=0$.

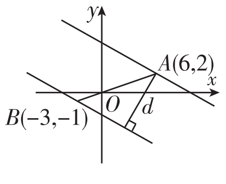
8. 设直线 l 的方程是 $7x+8y+C=0$,

由题意得$\frac{|C-9|}{\sqrt{7^2+8^2}}:\frac{|C-(-3)|}{\sqrt{7^2+8^2}}=1:2$,

解得 $C=21$ 或 $C=5$,

所以直线 l 的方程为 $7x+8y+21=0$ 或 $7x+8y+5=0$.

9.(1)如图,



第 9 题图

当两条平行直线与 AB 垂直时,两平行直线间的距离最大,$d=|AB|=\sqrt{(6+3)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{10}$. 当两条平行线各自绕点 B,A 逆时针旋转时,距离逐渐变小,越来越接近于 0,所以 $0<d\leqslant 3\sqrt{10}$,

即所求的 d 的变化范围是 $(0,3\sqrt{10}]$.

(2)当 d 取最大值 $3\sqrt{10}$ 时,两条平行线都垂直于 AB,

所以 $k=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{\dfrac{2-(-1)}{6-(-3)}}=-3$,

故所求的直线方程分别为

$y-2=-3(x-6)$ 和 $y+1=-3(x+3)$,

即 $3x+y-20=0$ 和 $3x+y+10=0$.

2.3 圆的方程

2.3.1 圆的标准方程

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】因为 $m^4+25>24$,所以点 P 在圆外.
2. D 【解析】将 $O(-3,4)$,$r=5$ 代入圆的标准方程可得.
3. A 【解析】直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 可化为 $\sqrt{3}x-3y=0$,圆的圆心为 $(1,0)$,$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+9}}=\dfrac{1}{2}$.
4. $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$ 【解析】因为直线与 x 轴、y 轴分别交于点 $(-4,0)$、$(0,3)$,所以圆心坐标 $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$,可知 $r=\dfrac{5}{2}$,所以圆的方程为 $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.
5. $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ 【解析】由题意知,将 $x=0,y=0$ 代入方程得 $a^2+a^2<4$,解得:$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.
6. (1)方法一:设圆心 $C(a,b)$,半径为 r,则由 C 为 MN 的中点得 $a=\dfrac{3+5}{2}=4$,$b=\dfrac{8+2}{2}=5$,

由两点间的距离公式得 $r=|CM|=\sqrt{(4-3)^2+(5-8)^2}=\sqrt{10}$,

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-4)^2+(y-5)^2=10$.

方法二:$\because$ 直径所对的圆周角是直角,$\therefore$ 对于圆上任意一点 $P(x,y)$,有 $PM\perp PN$,即 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-1$,$\therefore \dfrac{y-8}{x-3}\cdot\dfrac{y-2}{x-5}=-1(x\neq 3$ 且 $x\neq 5)$.

化简得 $x^2+y^2-8x-10y+31=0$,即 $(x-4)^2+(y-5)^2=10$.

又 $\because M(3,8)$,$N(5,2)$ 的坐标满足方程,

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-4)^2+(y-5)^2=10$.

(2)分别计算点到圆心的距离

$|CP_1|=\sqrt{(4-2)^2+(5-8)^2}=\sqrt{13}>\sqrt{10}$,

$|CP_2|=\sqrt{(4-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$,

$|CP_3|=\sqrt{(4-6)^2+(5-7)^2}=\sqrt{8}<\sqrt{10}$.

因此,点 P_2 在圆上,点 P_1 在圆外,点 P_3 在圆内.

★ 课后作业 ★

1. A 【解析】$(-2,0)$ 关于原点的对称点为 $(2,0)$,半径为 $\sqrt{5}$,$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$,即 $(x-2)^2+y^2=5$.
2. C 【解析】四个圆心分别为 $(3,-1)$,$(-3,1)$,$(1,1)$,$(-1,-1)$,只有 A,C 符合条件. 将 $B(-1,1)$ 代入 A,C,可排除 A,故选 C.
3. A 【解析】由直径的两个端点分别在 x 轴和 y 轴上知 $d=\sqrt{52}$,所以方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=\left(\dfrac{\sqrt{52}}{2}\right)^2=13$.
4. A 【解析】方法一:设圆心坐标为 $(0,b)$,则由题意知 $\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2}=1$,解得 $b=2$,故圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

方法二(数形结合法):由作图根据点 $(1,2)$ 到圆心的距离为 1,易知圆心为 $(0,2)$,故圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

方法三(验证法):将点 $(1,2)$ 代入四个选择项,排除 B,D,又由于圆心在 y 轴上,排除 C.
5. $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 【解析】设圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$,把点 $P(-1,1)$ 代入可得 $r^2=25$,即得圆的方程.
6. $\dfrac{22}{5}$ 【解析】圆心 $(0,0)$ 到直线 $4x+3y-12=0$ 的距离 $d=\dfrac{12}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$,$\therefore$ 所求最大距离为 $\dfrac{12}{5}+2=\dfrac{22}{5}$.
7. (1)$\because$ 圆心为 $A(2,-3)$,半径长为 5,

$\therefore$ 该圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

把点 $M(5,-7)$ 代入方程的左边 $(5-2)^2+(-7+3)^2=3^2+4^2=25=$ 右边,即点 $M(5,-7)$ 的坐标适合方程,$\therefore$ 点 $M(5,-7)$ 是这个圆上的点;

把点 $N(-\sqrt{5},-1)$ 的坐标代入方程的左边 $(-\sqrt{5}-2)^2+(-1+3)^2=13+4\sqrt{5}\neq 25$,即点 $N(-\sqrt{5},-1)$ 的坐标不适合圆的方程,$\therefore$ 点 N 不在这个圆上;

(2)方法一:$\because$ 圆 C 经过坐标原点,

$\therefore$ 圆 C 的半径为 $r=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{2^2+3^3}=\sqrt{13}$,

因此所求的圆的方程为 $(x-2)^2+[y-(-3)]^2=13$ 即 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$;

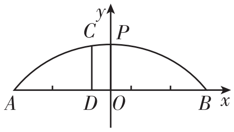
方法二：∵ 圆心为 $C(2,-3)$，

∴ 设圆的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$.

∵ 原点在圆上，即原点的坐标满足圆方程，即 $(0-2)^2+(0+3)^2=r^2$，即 $r^2=13$，

∴ 所求圆的标准方程为：$(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

8. 建立如图所示的直角坐标系，则圆心在 y 轴上. 设圆心的坐标是 $(0,b)$，圆的半径是 r，那么圆的方程是 $x^2+(y-b)^2=r^2$. 下面用待定系数法求 b 和 r 的值. 因为 P、B 都在圆上，所以它们的坐标 $(0,4)$、$(10,0)$ 都是这个圆的方程的解，于是得到方程组



第 8 题图

$\begin{cases}0^2+(4-b)^2=r^2,\\10^2+(0-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $b=-10.5$，$r^2=14.5^2$.

所以，这个圆的方程是 $x^2+(y+10.5)^2=14.5^2$.

把点 C 的横坐标 $x=-2$ 代入这个圆的方程，得

$(-2)^2+(y+10.5)^2=14.5^2$.

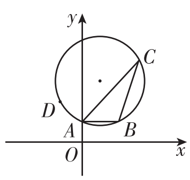
$y+10.5=\sqrt{14.5^2-4}$（因为 C 的纵坐标 $y>0$，所以取正值），于是 $y=\sqrt{14.5^2-4}-10.5\approx3.86$ m，

∴ 支柱 CD 的高度为 3.86 m.

9. 设经过 A,B,C 三点的圆的方程为

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则有 $\begin{cases}a^2+(1-b)^2=r^2,\\(2-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(3-a)^2+(4-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解



第 9 题图

得 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\\r^2=5.\end{cases}$

所以，经过 A,B,C 三点的圆的标准方程是

$(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

把点 D 的坐标 $(-1,2)$ 代入上面方程的左边，得

$(-1-1)^2+(2-3)^2=5$.

所以，点 D 在经过 A,B,C 三点的圆上，所以 A,B,C,D 四点在同一个圆上，圆的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$，如图.

2.3.2 圆的一般方程

★ 课堂作业 ★

1. B 【解析】方程变形为 $(x-1)^2+(y+3)^2=2$，圆心为 $(1,-3)$，故选 B.

2. B 【解析】由方程表示圆的条件，得 $16+4-20k>0$，解得 $k<1$.

3. D 【解析】将 $(0,0)$ 代入圆方程，左 $=0^2+0^2+2D\cdot0+2E\cdot0+D^2=D^2$. 当 $D=0$ 时，点 $(0,0)$ 一定在圆上，排除 A；同理可排除 B、C；将 (D,E) 代入圆方程，左 $=D^2+E^2+2D^2+2E^2+D^2=4D^2+3E^2$. 因为 D、E 不同时为零，所以，$4D^2+3E^2>0$ 恒成立，即点 (D,E) 在圆外.

4. 3 【解析】圆心为 $(1,2)$，$d=\dfrac{|3\times1+4\times2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$.

5. $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ 【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

∵ 三点 A、B、C 在圆上，∴ $\begin{cases}5E+F+25=0,\\D-2E+F+5=0,\\3D+4E-F-25=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}D=6,\\E=-2,\\F=-15,\end{cases}$ 故所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-2y-15=0$.

6. (1) 因为 $D=1,E=0,F=1$，$D^2+E^2-4F<0$，所以方程 (1) 不表示任何图形.

(2) 因为 $D=2a,E=0,F=a^2$，所以 $D^2+E^2-4F=4a^2-4a^2=0$，所以方程 (2) 表示点 $(-a,0)$.

(3) 两边同时除以 2，得 $x^2+y^2+ax-ay=0$，

因为 $D=a,E=-a,F=0$，所以 $D^2+E^2-4F=2a^2>0$.

所以方程 (3) 表示圆，圆心为 $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，

半径 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|a|$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】∵ 方程 $x^2+y^2+2x-4y-6=0$ 可化为 $(x+1)^2+(y-2)^2=11$，∴ 它表示以 $(-1,2)$ 为圆心，以 $\sqrt{11}$ 为半径的圆，故选 D.

2. B 【解析】原方程化为 $(x+\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$，表示以 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为圆心，半径为 2 的圆，且圆过原点，原点与圆心的连线方程为 $y=-x$，圆关于此直线对称.

3. C 【解析】方程 $x(x^2+y^2-1)=0$，即 $x=0$ 或 $x^2+y^2=1$ 表示一条直线和一个圆；方程 $x^2+(x^2+y^2-1)^2=0$，即 $\begin{cases}x=0,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x=0,\\y=\pm1.\end{cases}$

它表示两个点 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$.

4. B 【解析】$r^2=\dfrac{4+k^2-4k^2}{4}=1-\dfrac{3}{4}k^2$. ∴ 当 $k=0$ 时，r^2 最大，从而圆的面积最大. 此时圆心坐标为 $(-1,0)$，故选 B.

5. -2 【解析】由题意可得圆 C 的圆心 $\left(-1,-\dfrac{a}{2}\right)$ 在直线 $x-y+2=0$ 上，将点代入直线方程得 $-1+\dfrac{a}{2}+2=0$，故 $a=-2$.

6. $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 【解析】将 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$ 配方，得 $(x-2)^2+(y+1)^2=16$，则圆心 $A(2,-1)$. 设 PA 的中点 $M(x,y)$，则 $P(2x-2,2y+1)$，代入方程 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$，化简，得 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

7. (1) 据题意知 $D^2+E^2-4F=(2m)^2+(-2)^2-4(m^2+5m)>0$，即 $4m^2+4-4m^2-20m>0$，解得 $m<\dfrac{1}{5}$，故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right)$.

(2) 将方程 $x^2+y^2+2mx-2y+m^2+5m=0$ 写成标准方程为 $(x+m)^2+(y-1)^2=1-5m$，故圆心坐标为 $(-m,$

1),半径 $r=\sqrt{1-5m}$.

8. 设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

当顶点为(0,5)时,点(-4,0)、(4,0)、(0,5)都在圆上,

$\therefore \begin{cases}16-4D+F=0,\\16+4D+F=0,\\25+5E+F=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}D=0,\\E=-\dfrac{9}{5},\\F=-16.\end{cases}$

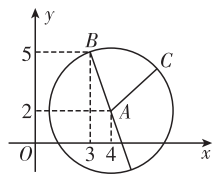
同理,当顶点为(0,-5)时,可解得 $\begin{cases}D=0,\\E=\dfrac{9}{5},\\F=-16.\end{cases}$

$\therefore$ 圆的一般方程 $x^2+y^2\pm\dfrac{9}{5}y-16=0$.

9. 设另一端点 C 的坐标为 (x,y).

依题意,得 $|AC|=|AB|$. 由两点间距离公式,得

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(2-5)^2}$.



第 9 题图

整理得 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

这是以点 $A(4,2)$ 为圆心,以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆,如图所示,又因为 A、B、C 为三角形的三个顶点,所以 A、B、C 三点不共线. 即点 B、C 不能重合且 B、C 不能为圆 A 的一条直径的两个端点.

因为点 B、C 不能重合,所以点 C 不能为(3,5).

又因为点 B、C 不能为一条直径的两个端点,所以 $\dfrac{x+3}{2}\neq 4$,且 $\dfrac{y+5}{2}\neq 2$,即点 C 不能为(5,-1).

故端点 C 的轨迹方程是 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$(除去点(3,5)和(5,-1)),它的轨迹是以点 $A(4,2)$ 为圆心,$\sqrt{10}$ 为半径的圆,但除去(3,5)和(5,-1)两点.

2.3.3 直线与圆的位置关系

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】$x^2+y^2-2x+4y=0$ 的圆心为(1,-2),截得弦最长的直线必过点(2,1)和圆心(1,-2),

$\therefore$ 直线方程为 $3x-y-5=0$,故选 A.

2. B 【解析】圆心到直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$,

又$\because$ 直线 $y=x+1$ 不过圆心(0,0),$\therefore$ 选 B.

3. B 【解析】$\because P(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为切点,$k_{OP}=1$,$\therefore$ 切线的斜率为 -1,$\therefore y-\sqrt{2}=-(x-\sqrt{2})$,即 $x+y=2\sqrt{2}$.

4. $y=2$ 或 $5x-12y+9=0$ 【解析】易知所求切线不可能垂直于 x 轴,故切线的斜率必定存在. 设切线方程为 $y-2=k(x-3)$,即 $kx-y+2-3k=0$,由 $\dfrac{|-2k-1+2-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$,得 $k=\dfrac{5}{12}$ 或 $k=0$,结合点 M 的坐标即可求得切线方程.

5. $2\sqrt{2}$ 【解析】设 A 点的坐标为(3,1),圆心 $C(2,2)$. 最短的弦为垂直于 AC 的弦. $|AC|=\sqrt{2}$. 最短弦长 $=2\cdot\sqrt{r^2-AC^2}=2\sqrt{2}$.

6. 由圆 $C:x^2+y^2=4$ 可知圆心为 $C(0,0)$,半径为 $r=2$. 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$.

(1)当直线与圆相交时,$d<r$,即 $\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}<2$,

解得 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$;

(2)当直线与圆相切时,$d=r$,即 $\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=2$,

解得 $b=\pm2\sqrt{2}$;

(3)当直线与圆相离时,$d>r$,即 $\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}>2$,

解得 $b<-2\sqrt{2}$ 或 $b>2\sqrt{2}$.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】过点 P 且斜率不存在的直线为 $x=2$,与圆不相切,所以设切线方程为 $y-2=k(x-2)$,即 $kx-y+2-2k=0$. 圆心(1,0)到直线的距离等于圆的半径 r,可得 $\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$,解得 $k=-\dfrac{1}{2}$. 又直线 $ax-y+1=0$ 与该切线垂直,所以 $a=2$.

2. B 【解析】根据图形可知,圆心(3,-1)到直线 $x=-3$ 的距离为 6,减去半径 2,即为 $|PQ|$ 的最小值,故选 B.

3. B 【解析】当 $P(x,3)$ 到圆心 $C(-2,-2)$ 的距离最小时,过点 P 向圆作切线的切线长最小.

$|PC|=\sqrt{(x+2)^2+(3+2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+25}$.

$\therefore |PC|_{\min}=5$.

$\therefore$ 切线长的最小值为 $\sqrt{5^2-1}=2\sqrt{6}$.

4. C 【解析】直线 m 的方程为 $ax+by-a^2-b^2=0$,$\therefore l/\!/m$,圆心到直线 $ax+by=r^2$ 的距离 $d=\dfrac{|r^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$,

$\therefore$ 直线 l 与圆相离,故选 C.

5. $(x-3)^2+y^2=4$ 【解析】设圆心坐标为 $(x_0,0)(x_0>0)$. 由于圆过点(1,0),则半径 $r=|x_0-1|$,圆心到直线 $x-y-1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|x_0-1|}{\sqrt{2}}$. 由弦长为 $2\sqrt{2}$ 可知 $\left(\dfrac{|x_0-1|}{\sqrt{2}}\right)^2=(x_0-1)^2-2$,解得 $(x_0-1)^2=4$,

$\therefore x_0-1=\pm2$.

$\therefore x_0=3$ 或 $x_0=-1$(舍去).

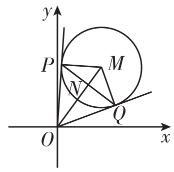
故圆心为(3,0),半径为 2,所求圆的方程为

$(x-3)^2+y^2=4$.

6. 4 【解析】$x^2+y^2-6x-8y+20=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-$

4)$^2=5$.

如图所示，设圆心为 M，连接 MP、MQ、PQ、OM，PQ 与 OM 交于 N，易知 $OM=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore OP=OQ=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$，



第 6 题图

根据圆的知识知 $PQ\perp OM$ 且 $PN=QN$，$\therefore PQ=2PN=2\cdot\dfrac{PM\cdot PO}{OM}=2\times\dfrac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{5}=4$.

7. 设过点 $A(5,15)$ 的切线的斜率为 k，

则切线方程为 $y-15=k(x-5)$，即 $kx-y+15-5k=0$.

由 $\dfrac{|k\cdot 0-0+15-5k|}{\sqrt{k^2+1}}=5$，解得 $k=\dfrac{4}{3}$，得切线方程为 $y-15=\dfrac{4}{3}(x-5)$.

又由于直线 $x=5$ 过点 $A(5,15)$ 且与圆心之间的距离为 5.

$\therefore$ 圆的切线方程为 $4x-3y+25=0$ 或 $x=5$.

8. 设圆心坐标为 $(a,a-1)$，半径为 r，

则 $\dfrac{|4a+3(a-1)+4|}{5}=r$，即 $\dfrac{|7a+1|}{5}=r$. ①

$\dfrac{|3a+4(a-1)-5|}{5}=\sqrt{r^2-8}$，

即 $\dfrac{|7a-9|}{5}=\sqrt{r^2-8}$. ②

由①②可得 $a=2$，$r=3$.

$\therefore$ 圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

9. (1) 直线 l 的方程变形为：$m(2x+y-7)+(x+y-4)=0$，由 $\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$ 所以对任意实数 m，直线 l 恒过定点 $A(3,1)$. 因为 $|AC|=\sqrt{5}<5$，所以点 A 在圆 C 内. 故对任意实数 m，直线 l 与圆恒交于两点.

(2) 当直线 l 被圆 C 截得的弦 MN 以点 A 为中点时，弦长 MN 最短，最短长度为 $2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$，这时 $MN\perp CA$，C 为圆 C 的圆心. 故直线 l 的方程为 $2x-y-5=0$.

2.3.4 圆与圆的位置关系

★ 课堂作业 ★

1. A 【解析】$d=r_A+r_B$，$\therefore r_B=10-4=6$ (cm) 或 $d=r_B-r_A$，$r_B=10+4=14$ (cm).

2. C 【解析】$r_1=2$，$r_2=3$，$d=5$，由于 $d=r_1+r_2$ 所以两圆外切，故公切线有 3 条，选 C.

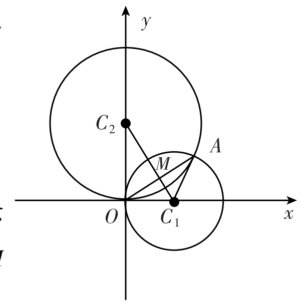
3. A 【解析】AB 的垂直平分线即是两圆心的连线.

4. $x+3y=0$ 【解析】由题意可知，$(x^2+y^2-10)-[(x-1)^2+(y-3)^2-20]=0$，化简得 $x+3y=0$.

5. $b<-100$ 【解析】$\because$ 圆 B 与圆 C 没有公共点，且圆 C 过圆 B 的圆心 $(0,0)$，$\therefore$ 圆 C 包含于圆 B.

6. $\because C_1(1,0)$、$C_2(0,2)$、$r_1=1$、$r_2=2$，$\therefore d=|C_1C_2|=\sqrt{5}<r_1+r_2=3$，$\sqrt{5}>r_2-r_1=1$，故两圆相交.

如图所示，设两圆的公共弦 OA 与连心线 C_1C_2 交于 M 点，则 $C_1M\perp OA$，$|OA|=2|AM|$. $\because C_1(1,0)$，$|AC_1|=1$.



第 6 题图

由两圆的方程，得直线 OA 的方程为 $x-2y=0$.

从而 $|C_1M|=\dfrac{|1-2\times 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 于是 $|OA|=2|AM|=2\sqrt{|AC_1|^2-|C_1M|^2}=2\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

综上所述，圆 C_1、圆 C_2 相交，公共弦长为 $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

★ 课后作业 ★

1. C 【解析】两圆心的距离 $d=3\sqrt{5}$，两圆半径之和 $r_1+r_2=5<d$，所以两圆相离，最小距离为 $3\sqrt{5}-5$.

2. B 【解析】利用公共弦始终经过圆 $(x+1)^2+(y+1)^2=4$ 的圆心即可求得. 两圆的公共弦所在直线方程为：$(2a+2)x+(2b+2)y-a^2-1=0$，它过圆心 $(-1,-1)$，代入得 $a^2+2a+2b+5=0$.

3. B 【解析】设圆的方程为 $x^2+y^2-2x+\lambda(x+2y-3)=0$，圆心为 $\left(\dfrac{2-\lambda}{2},-\lambda\right)$，在 y 轴上，则 $\dfrac{2-\lambda}{2}=0$，$\therefore \lambda=2$，故方程为 $x^2+y^2+4y-6=0$.

4. B 【解析】弦 AB 可以看作以 PC 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=1$ 的交线，而以 PC 为直径的圆的方程为：$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$. 根据两圆的公共弦的求法，可得弦 AB 所在的直线方程为：$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}-(x^2+y^2-1)=0$，整理可得 $2x+3y-1=0$，故选 B.

5. 2 【解析】两圆分别为 $(x+a)^2+(y+a)^2=1$，$(x+b)^2+(y+b)^2=2$，两圆圆心都在直线 $y=x$ 上，当公共弦长取最大值时，即两圆的交点连线为小圆的直径，故为 2.

6. $60x^2-4y^2-240x+225=0$ 【解析】$\odot P$ 与 $\odot O$ 和 $\odot C$ 都外切，设 $\odot P$ 的圆心 $P(x,y)$，半径为 R，

则 $|PO|=\sqrt{x^2+y^2}=R+1$,

$|PC|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}=R+2$,

$\therefore\ \sqrt{(x-4)^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}=1$,

化简得:$60x^2-4y^2-240x+225=0$.

7. 设经过两圆交点的圆系方程为

$x^2+y^2-4x-6+\lambda(x^2+y^2-4y-6)=0(\lambda\neq-1)$,

即 $x^2+y^2-\frac{4}{1+\lambda}\cdot x-\frac{4\lambda}{1+\lambda}\cdot y-6=0$.

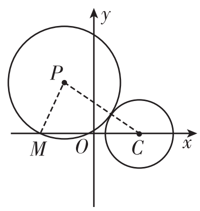
又$\because$ 圆心在直线 $x-y-4=0$ 上,$\therefore\ \frac{2}{1+\lambda}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$,

即 $\lambda=-\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 所求圆的方程为 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

8. $\because\ (x-4)^2+y^2=9$,$\therefore$ 圆心 $C(4,0)$,$r_1=3$. 如图所示.

设动圆圆心 $P(x,y)$,动圆过定点 M,又与圆 C 外切,$\therefore\ |PC|=|PM|+r_1$,即 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+3$.



第 8 题图

化简整理得 $220x^2-36y^2=495$.

当 P 在 x 轴时,P 为$\left(-\frac{3}{2},0\right)$,

$\therefore\ x\leqslant-\frac{3}{2}$.

故动圆圆心轨迹方程为 $220x^2-36y^2=495\left(x\leqslant-\frac{3}{2}\right)$.

9. 方法一:由已知得 $x^2+y^2-4y+2+2a(y-x)=0$,它表示过圆 $x^2+y^2-4y+2=0$ 与直线 $y-x=0$ 交点的圆,

由$\begin{cases}x^2+y^2-4y+2=0,\\y-x=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$得定点$(1,1)$.

而当 $a=1$ 时,原方程为 $x^2+y^2-2x-2y+2=0$,

即$(x-1)^2+(y-1)^2=0$,它表示点$(1,1)$,所以 a 取不为 1 的任何实数,上述圆恒过定点$(1,1)$.

方法二:取 $a=0$ 得 $x^2+y^2-4y+2=0$, ①

取 $a=2$ 得 $x^2+y^2-4x+2=0$, ②

①$-$②得 $y=x$,代入①得 $x=1$,$\therefore\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

又$\because\ 1^2+1^2-2a\times1+2(a-2)\times1+2=2-2a+2a-4+2=0$,

同样,当 $a=1$ 时原方程表示一个点.

所以 a 取不为 1 的任何实数,上述圆恒过定点$(1,1)$.

2.4 空间直角坐标系

2.4.1 空间直角坐标系

2.4.2 空间两点的距离公式

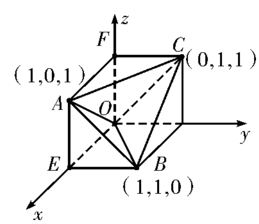
★ 课堂作业 ★

1. C
2. B
3. D 【解析】$\because\ |AB|=\sqrt{29}$,$|AC|=2\sqrt{29}$,$|BC|=\sqrt{29}$,而 $|AB|+|BC|=|AC|$,$\therefore$ 三点 A、B、C 共线,构不成三角形.
4. $5\sqrt{2}$ 【解析】$d=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.
5. $(-a,-b,-c)$ $(-a,b,c)$
6. (1)A,B,C,D 都在平面 xOy 内,z 坐标都为 0,它们在 x 轴,y 轴所组成的直角坐标系中的坐标分别是$(0,0)$,$(4,0)$,$(4,3)$,$(0,3)$. 因此空间坐标分别是 $A(0,0,0)$,$B(4,0,0)$,$C(4,3,0)$,$D(0,3,0)$. A',B',C',D'同在一个垂直于 z 轴的平面内,这个平面与 z 轴的交点 A'在 z 轴上的坐标是 5,故这四个点的 z 坐标都是 5,从这四点作 xOy 平面的垂线交 xOy 平面于 A,B,C,D 四点,故 A',B',C',D'的 x,y 坐标分别与 A,B,C,D 相同,由此可知它们的空间坐标分别是 $A'(0,0,5)$,$B'(4,0,5)$,$C'(4,3,5)$,$D'(0,3,5)$.

   (2)N 是线段 CC'的中点,有向线段 CN 的方向是与 z 轴正方向相同,$|CN|=2.5$,因此 N 的 z 坐标为 2.5,C 在 xOy 平面内的平面坐标为$(4,3)$,这就是 N 的 x,y 坐标,故 N 的空间坐标为$(4,3,2.5)$.

★ 课后作业 ★

1. D 【解析】作 $PP_1\perp xOy$ 平面,则 $P_1(a,b,0)$,$|PP_1|=|c|$为所求.
2. A 【解析】如右图,$A(1,0,1)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,1)$,$O(0,0,0)$,$E(1,0,0)$,$F(0,0,1)$. 点 B 在 xOz 平面内的投影为点 E,点 C 在 xOz 平面内的投影为点 F,点 A 与点 O 就在平面 xOz 内,线段 BC 的投影线段为 EF,故答案选 A.



第 2 题图

3. C 【解析】点 P 在 y 轴上,其坐标可设为$(0,y,0)$,因为$|PA|=7$,$A(2,5,-6)$,

   所以 $\sqrt{2^2+(y-5)^2+6^2}=7$,解得 $y=2$ 或 8.
4. C 【解析】$|AB|=\sqrt{(1+t)^2+(2t-1)^2+0^2}=\sqrt{5t^2-2t+2}=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}\geqslant\frac{3}{5}\sqrt{5}$.
5. $(5,13,-3)$ 【解析】由平行四边形中对角线互相平分的性质知,AC 的中点即为 BD 的中点,AC 的中点 $O\left(\frac{7}{2},4,-1\right)$,设 $D(x,y,z)$,则 $\frac{7}{2}=\frac{x+2}{2}$,$4=\frac{-5+y}{2}$,$-1=\frac{1+z}{2}$,

   $\therefore\ x=5$,$y=13$,$z=-3$,故 $D(5,13,-3)$.
6. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ 【解析】$|AM|=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{13}$,$\therefore$ 对角线$|AC_1|=2\sqrt{13}$,

设棱长为 x,则 $3x^2=(2\sqrt{13})^2$,$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

7. 点 $P(2,-5,8)$ 关于原点的对称点为 $(-2,5,-8)$.
点 P 关于 x 轴,y 轴,z 轴的对称点分别为 $(2,5,-8)$,$(-2,-5,-8)$,$(-2,5,8)$.
P 点关于平面 xOz 的对称点为 $(2,5,8)$.

8. (1)设所求点为 $P(0,0,c)$,由题意知 $|PA|=|PB|$,
$\therefore \sqrt{16+1+(c-7)^2}=\sqrt{9+25+(c+2)^2}$,
解之得 $c=\dfrac{14}{9}$,$\therefore P\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.
(2)设所求点为 $M(0,b,c)$,$\because |MA|=|MB|=|MC|$,
$$\therefore \begin{cases}\sqrt{9+(b-1)^2+(c-2)^2}=\sqrt{16+(b+2)^2+(c+2)^2},\\ \sqrt{9+(b-1)^2+(c-2)^2}=\sqrt{0+(b-5)^2+(c-1)^2}.\end{cases}$$
$\therefore \begin{cases}3b+4c+5=0,\\4b-c-6=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}b=1,\\c=-2.\end{cases}$ $\therefore M(0,1,-2)$.

9. 设 C 点的坐标为 $(0,0,z)$,则 $\sqrt{3^2+1^2+(z-1)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(z-3)^2}$,
即 $10+(z-1)^2=8+(z-3)^2$,
解得 $z=\dfrac{3}{2}$,所以点 C 的坐标为 $\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$.

单元评估检测

1. C 【解析】$\because l_1\perp l_2$,$\therefore k_2=-1$. 故倾斜角为 $\dfrac{3}{4}\pi$.

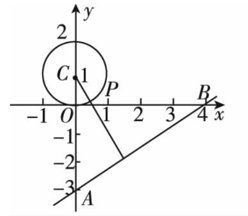
2. A 【解析】$y=x+1$ 的斜率为 1,设圆的切线的斜率为 k,由题意知 $k=-1$,可设切线方程为 $x+y+b=0$. 圆心 $(0,0)$ 到直线的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=1$,所以 $b=\pm\sqrt{2}$,即切线方程为 $x+y+\sqrt{2}=0$ 或 $x+y-\sqrt{2}=0$. 由于直线与圆要切于第一象限,所以直线方程只能为 $x+y-\sqrt{2}=0$.

3. C 【解析】由已知 $k_{AB}=2$,即 $\dfrac{4}{m-1}=2$. $\therefore m=3$.

4. D 【解析】设直线 l_1 的方程为 $3x+4y+m=0$.
$\because$ 直线 l_1 与圆 $x^2+y^2+2y=0$ 相切,$\therefore \dfrac{|-4+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$,
$\therefore |m-4|=5$,$\therefore m=-1$ 或 $m=9$. $\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $3x+4y-1=0$ 或 $3x+4y+9=0$.

5. B 【解析】$\because \dfrac{6}{3}=\dfrac{m}{4}\neq\dfrac{14}{-3}$,$\therefore m=8$,直线 $6x+8y+14=0$ 可化为 $3x+4y+7=0$,两平行线之间的距离 $d=\dfrac{|-3-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

6. B 【解析】如图,过圆心 C 向直线 AB 作垂线交圆于点 P,这时 $\triangle ABP$ 的面积最小. 直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$,即 $3x-4y-12=0$,圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|3\times0-4\times1-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{16}{5}$,
$\therefore \triangle ABP$ 的面积的最小值为 $\dfrac{1}{2}\times5\times\left(\dfrac{16}{5}-1\right)=\dfrac{11}{2}$.



第 6 题图

7. D 【解析】令 $y=0$ 得 $(2m^2+m-3)x=4m-1$,
$\therefore x=\dfrac{4m-1}{2m^2+m-3}=1$,$\therefore m=2$ 或 $-\dfrac{1}{2}$.

8. A 【解析】$\because l_2$、l_1 关于 $y=-x$ 对称,$\therefore l_2$ 的方程为 $-x=-2y+3$,即 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. $\therefore l_2$ 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.

9. D 【解析】圆心 $C(3,0)$,$k_{CP}=-\dfrac{1}{2}$,由 $k_{CP}\cdot k_{MN}=-1$,得 $k_{MN}=2$,所以弦 MN 所在直线的方程是 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$.

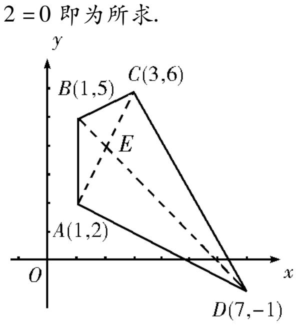
10. D 【解析】圆心 $(a,0)$ 到直线 $x-y=2$ 的距离 $d=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{2}}$,则 $(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{|a-2|}{\sqrt{2}}\right)^2=2^2$,$\therefore a=0$ 或 4.

11. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】由 $k_{AB}=k_{BC}$,即 $\dfrac{-2-3}{3+2}=\dfrac{m+2}{\frac{1}{2}-3}$,得 $m=\dfrac{1}{2}$.

12. $[0,10]$ 【解析】由题意得,点 P 到直线的距离为 $\dfrac{|4\times4-3\times a-1|}{5}=\dfrac{|15-3a|}{5}$. 又 $\dfrac{|15-3a|}{5}\leqslant3$,即 $|15-3a|\leqslant15$,解之得 $0\leqslant a\leqslant10$,所以 $a\in[0,10]$.

13. $2x+y+2=0$ 或 $x+2y-2=0$ 【解析】设所求直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,由已知可得 $\begin{cases}-\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}=1,\\ \dfrac{1}{2}|a||b|=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$
$\therefore 2x+y+2=0$ 或 $x+2y-2=0$ 即为所求.

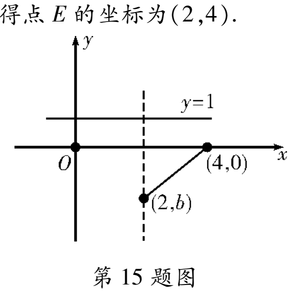
14. $(2,4)$ 【解析】如图所示,连接 AC,BD 交于点 E,由已知,要求平面直角坐标系内一点到 A、B、C、D 的距离之和最小,设此点为 P,则有 $|PA|+|PB|+|PC|+|PD|>|BD|+|AC|$,故可知 AC,BD 的交点到 A、B、C、D 四点的距离之和最小. 根据已知坐标求得直线 AC 的解析式为 $y=2x$,直线 BD 的解析式为 $y=-x+6$,故可得点 E 的坐标为 $(2,4)$.



第 14 题图

15. $(x-2)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

【解析】如图,设圆心为 $(2,b)$,则 $r=|1-b|$,$b^2+2^2=|1-b|^2$,解得 $b=-\dfrac{3}{2}$,$r=$



第 15 题图

$\frac{5}{2}$. 故圆的方程为 $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

16. (1) 设 $C(x_0,y_0)$，则 AC 的中点 $M\left(\frac{5+x_0}{2},\frac{y_0-2}{2}\right)$，$BC$ 的中点 $N\left(\frac{7+x_0}{2},\frac{y_0+3}{2}\right)$.

∵ M 在 y 轴上，∴ $\frac{5+x_0}{2}=0$，$x_0=-5$. ∵ N 在 x 轴上，∴ $\frac{y_0+3}{2}=0$，$y_0=-3$，

即 $C(-5,-3)$.

(2) ∵ $M(0,-\frac{5}{2})$，$N(1,0)$，∴ 直线 MN 的方程为 $\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$，即 $5x-2y-5=0$.

17. 设 $P(x,y)$ 关于直线 l：$3x-y+3=0$ 对称的点为 $P'(x',y')$.

∵ $k_{PP'}\cdot k_l=-1$，即 $\frac{y'-y}{x'-x}\cdot 3=-1$. ①

又 PP' 的中点在直线 $3x-y+3=0$ 上，

∴ $3\cdot\frac{x'+x}{2}-\frac{y'+y}{2}+3=0$. ②

由①②得 $\begin{cases}x'=\frac{-4x+3y-9}{5}, ③\\ y'=\frac{3x+4y+3}{5}. ④\end{cases}$

(1) 把 $x=4$，$y=5$ 代入③和④得 $x'=-2$，$y'=7$.

∴ $P(4,5)$ 关于直线 l 对称的点 P' 的坐标为 $(-2,7)$.

(2) 用③④分别代换 $x-y-2=0$ 中的 x,y，得 $x-y-2=0$ 关于 l 对称的直线的方程为 $\frac{-4x+3y-9}{5}-\frac{3x+4y+3}{5}-2=0$，

化简得 $7x+y+22=0$.

18. (1) 当直线过原点时，该直线在 x 轴和 y 轴上的截距都为零，截距相等，

∴ $a=2$，方程即 $3x+y=0$.

若 $a\neq 2$，由于截距存在，∴ $\frac{a-2}{a+1}=a-2$，即 $a+1=1$. ∴ $a=0$.

方程即为 $x+y+2=0$.

(2) 方法一：将 l 的方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$，

∴ 欲使 l 不经过第二象限，当且仅当 $\begin{cases}-(a+1)\geqslant 0,\\ a-2\leqslant 0.\end{cases}$

∴ $a\leqslant -1$.

综上可知，a 的取值范围是 $a\leqslant -1$.

方法二：将 l 的方程化为 $(x+y+2)+a(x-1)=0(a\in\mathbf{R})$，它表示过 l_1：$x+y+2=0$ 与 l_2：$x-1=0$ 的交点 $(1,-3)$ 的直线系（不包括 $x=1$）. 由图像可知 l 的斜率 $-(a+1)\geqslant 0$ 时，l 不经过第二象限，∴ $a\leqslant -1$.

19. 设所求圆的圆心为 $A(m,n)$，半径为 r，则 A,M,C 三点共线，且有 $|MA|=|AP|=r$，

因为圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 的圆心为 $C(-1,3)$，则

$\begin{cases}\frac{n-2}{m-1}=\frac{2-3}{1+1},\\ \sqrt{(m-1)^2+(n-2)^2}=\sqrt{(m-4)^2+(n+1)^2}=r.\end{cases}$

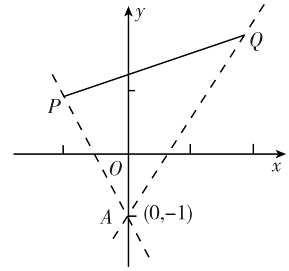
解得 $m=3$，$n=1$，$r=\sqrt{5}$，

所以所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

20. 方法一：直线 $x+my+m=0$ 恒过点 $A(0,-1)$，

$k_{AP}=\frac{-1-1}{0+1}=-2$，$k_{AQ}=\frac{-1-2}{0-2}=\frac{3}{2}$，

则 $-\frac{1}{m}\geqslant\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{m}\leqslant -2$，∴ $-\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $m\neq 0$.



第 20 题图

又 $m=0$ 时，直线 $x+my+m=0$ 与线段 PQ 有交点，

∴ 所求 m 的范围是

$[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}]$.

方法二：过 P、Q 两点的直线方程为 $y-1=\frac{2-1}{2+1}(x+1)$，

即 $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$，代入 $x+my+m=0$，整理得 $x=-\frac{7m}{m+3}$，

由已知 $-1\leqslant-\frac{7m}{m+3}\leqslant 2$，解得 $-\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$.

即 m 的范围是 $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]$.

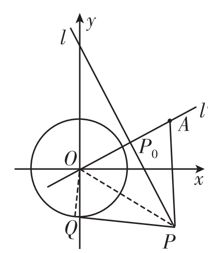
21. (1) 连接 OQ、OP，则 $\triangle OQP$ 为直角三角形，

又 $|PQ|=|PA|$，

所以 $|OP|^2=|OQ|^2+|PQ|^2=1+|PA|^2$，

所以 $a^2+b^2=1+(a-2)^2+(b-1)^2$，

故 $2a+b-3=0$.



第 21 题图

(2) 由 (1) 知，P 在直线 l：$2x+y-3=0$ 上，

所以 $|PQ|_{\min}=|PA|_{\min}$，又 $|PA|_{\min}$ 为 A 到直线 l 的距离，

所以 $|PQ|_{\min}=\frac{|2\times 2+1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（或由 $|PQ|^2=|OP|^2-1=a^2+b^2-1=a^2+9-12a+4a^2-1=5a^2-12a+8=5(a-1.2)^2+0.8$，得 $|PQ|_{\min}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.）

(3) 以 P 为圆心的圆与圆 O 有公共点，半径最小时为与圆 O 相切的情形，而这时半径的最小值为圆 O 到直线 l 的距离减去圆 O 的半径，圆心 P 为过原点与 l 垂直的直线 l' 与 l 的交点 P_0，

所以 $r=\frac{3}{\sqrt{2^2+1^2}}-1=\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$，

又 l'：$x-2y=0$，

联立 l：$2x+y-3=0$ 得 $P_0\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$，

所以所求圆的方程为 $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-1\right)^2$.