# 答案与解析

## 第一章 集合

### 1.1 集合与集合的表示方法

**题组A 学考通关测试** → 正文 P14

1 D【解析】"高个子的学生"标准不明确,不满足集合中元素的确定性,排除A;"著名的艺术家"标准不明确,不满足集合中元素的确定性,排除B;"很厚的书"标准不明确,不满足集合中元素的确定性,排除C;倒数等于它自身的实数为1与$-1$,满足集合的定义,故选D。

2 B【解析】①$\frac{1}{2}\in \mathbf{R}$,正确;②$\sqrt{2}\notin \mathbf{Q}$,错误;③$|-3|\in \mathbf{N}_+$,正确;④$|-\sqrt{3}|\notin \mathbf{Q}$,错误;⑤$0\notin\varnothing$,错误。所以正确的个数为2。故选B。

3 A【解析】解方程$x^2-4x+3=0$得$x=1$或3,用列举法表示方程的解集为$\{1,3\}$。

4 A【解析】当$a>0,b>0$时,$x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=1+1+1=3$;当$a>0,b<0$时,$x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=1-1-1=-1$;当$a<0$,$b>0$时,$x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1+1-1=-1$;当$a<0,b<0$时,$x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1-1+1=-1$。故集合$A=\{-1,3\}$,$A$中元素的个数为2。故选A。

5 $\in$ $\notin$【解析】矩形是平行四边形,梯形不是平行四边形,故$p\in M,q\notin M$。

6 ②⑤【解析】①只含两个元素,且都是式子,而方程组的解集中只有一个元素,是一个点;②代表元素是点的形式,且对应值与方程组的解相同;③中含两个元素,是数集,而方程组的解集是点集,且只有一个元素;④没用"{}"括起来,不表示集合;⑤中只含有一个元素,且为点集,与方程组的解集对应;⑥代表元素与方程组的解的一般形式不符,需加小括号,条件中"或"也要改为"且"。

7 解:当$a=0$时,原方程为$-3x+1=0,x=\frac{1}{3}$,符合题意;

当$a\neq0$时,方程$ax^2-3x+1=0$为一元二次方程,由题意得$\Delta=9-4a\leqslant0$,所以$a\geqslant\frac{9}{4}$。

当$a\geqslant\frac{9}{4}$时,方程有两个相等的实根或无实根。

综上所述,$a$的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,a=0\text{ 或 }a\geqslant\frac{9}{4}\right\}$。

**题组B 高考通关测试** → 正文 P14

1 D【解析】列举得集合$B=\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$,共含有10个元素。

2 A【解析】因为$\sqrt{2}+\sqrt{3}<10$,所以$a\in A$。故选A。

3 D【解析】因为$x\in\{1,2\},y\in\{0,2\}$,所以当$x=1,y=0$时,$z=0$;当$x=1,y=2$时,$z=2$;当$x=2,y=0$时,$z=0$;当$x=2,y=2$时,$z=4$。由集合中元素的互异性可知,集合$A*B$中有3个元素0,2,4,所有元素之和为6。故选D。

4 A【解析】$M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,因为$2k+1(k\in\mathbf{Z})$是一个奇数,$k+2(k\in\mathbf{Z})$是一个整数,所以$x_0\in M$时,一定有$x_0\in\mathbf{N}$,故选A。

5 D【解析】因为集合$A=\{x|x^2-7x<0,x\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,4,5,6\}$,所以集合$B=\left\{y\,\middle|\,\frac{6}{y}\in\mathbf{N}^*,y\in A\right\}=\{1,2,3,6\}$,所以$B$集合中元素的个数为4。故选D。

6 $a\in A$【解析】因为$a=n^2+1=(n+2)^2-4(n+2)+5$,且当$n\in\mathbf{N}$时,$n+2\in\mathbf{N}$,所以$a\in A$。

7 2【解析】因为$\sqrt{x^2}=|x|$,$-\sqrt[3]{x^3}=-x$,所以不论$x$取何值,该集合最多含有2个元素。

8 6【解析】由题意知,不含"孤立元"的集合有:$\{1,2,3\}$,$\{2,3,4\}$,$\{3,4,5\}$,$\{4,5,6\}$,$\{5,6,7\}$,$\{6,7,8\}$,共有6个集合。

9 解:(1)$A$中有且只有一个元素。

①当$a=0$时,方程$-3x+2=0$只有一个解$x=\frac{2}{3}$;

②当$a\neq0$时,由$\Delta=(-3)^2-4a\times2=0$,得$a=\frac{9}{8}$,此时方程有两个相等的实根$x_1=x_2=\frac{4}{3}$。

综上,当$a=0$时,$A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$;当$a=\frac{9}{8}$时,$A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$。

(2)集合$A$中至多有一个元素,即有一个元素或没有元素。

当$A$中没有元素时,由$\Delta=(-3)^2-4a\times2<0$,得$a>\frac{9}{8}$;

当$A$中有一个元素时,由(1)得$a=0$或$a=\frac{9}{8}$。

综上,当$A$中至多有一个元素时,$a$的取值范围是$\left\{a\,\middle|\,a=0\text{ 或 }a\geqslant\frac{9}{8}\right\}$。

10 (1)解:因为$2\in S$,所以$\frac{1}{1-2}=-1\in S$,

所以$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$,所以$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$。

所以集合$S$中另外的两个元素为$-1$和$\frac{1}{2}$。

(2)证明:由题意,可知$a\neq1$且$a\neq0$,由$\frac{1}{1-a}\in S$,得$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in S$,

即$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=1-\frac{1}{a}\in S$。

所以若$a\in S$,则$1-\frac{1}{a}\in S$。

(3)解:集合$S$中的元素不可能只有一个。理由如下:令$a=\frac{1}{1-a}$,即$a^2-a+1=0$。

因为$(-1)^2-4<0$,所以此方程无实数解,所以$a\neq\frac{1}{1-a}$。因此集合$S$中不可能只有一个元素。

### 1.2 集合之间的关系与运算

#### 1.2.1 集合之间的关系

**变式题型**

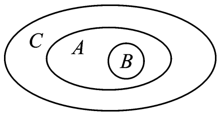
变式 解:(1)因为$x$为本校长跑队队员$\Rightarrow x$为本校田径队队员,但$x$为本校田径队队员$\nRightarrow x$为本校长跑队队员,所以$A\subsetneqq B$。

(2)因为$x$为2019年11月份公休日$\Leftrightarrow x$为2019年11月份星期六或星期日,所以$A=B$。

## 题组A 学考通关测试

正文 P23

1 B 【解析】集合 $A,B,C$ 关系如图所示。




第 1 题图

2 C 【解析】依题意得 $A=\{0,2,3,5,9\}$,共有 5 个元素,其真子集的个数为 $2^5-1=31$。

3 C 【解析】根据集合自身是自身的子集,可知①正确;根据集合元素的无序性可知②正确;根据空集的概念可知③不正确;根据元素与集合之间的"属于"关系可知④正确,⑤不正确;根据空集是任何集合的子集可知⑥正确,即正确的个数为 4,故选 C。

4 C 【解析】因为 $A\subseteq B$,所以 $1\in B$,所以 $a+3=1$,所以 $a=-2$。

5 B 【解析】$M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,因为 $2k+1$ 为奇数,$k+2$ 为整数,所以 $M\subsetneqq N$,故选 B。

6 0 【解析】由 $A=B$,则 $x=-1$,$x^2=1$,所以 $y=0$。

7 解:$A=\{-3,2\}$。对于 $x^2+x+a=0$,

当 $\Delta=1-4a<0$,即 $a>\dfrac{1}{4}$ 时,$B=\varnothing$,$B\subseteq A$ 成立;

当 $\Delta=1-4a=0$,即 $a=\dfrac{1}{4}$ 时,$B=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$,$B\subseteq A$ 不成立;

当 $\Delta=1-4a>0$,即 $a<\dfrac{1}{4}$ 时,若 $B\subseteq A$ 成立,则 $B=\{-3,2\}$,所以 $a=-3\times2=-6$。

综上,$a$ 的取值范围为 $a>\dfrac{1}{4}$ 或 $a=-6$。

## 题组B 高考通关测试

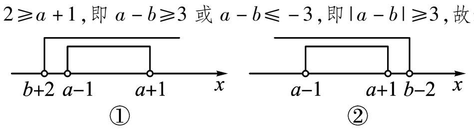
正文 P24

1 B 【解析】根据题意,集合 $A=\{x|x^2-9=0\}=\{-3,3\}$,依次分析 4 个式子:对于①,$3\in A$,3 是集合 $A$ 的元素,正确;②$\{-3\}\in A$,$\{-3\}$ 是集合,错误;③$\varnothing\subseteq A$,空集是任何集合的子集,正确;④$\{3,-3\}\subseteq A$,任何集合都是其本身的子集,正确;共有 3 个正确。

2 A 【解析】满足 $M\subseteq P$,$M\subseteq Q$ 的集合 $M$ 有以下 4 个:$\varnothing$,$\{0\}$,$\{2\}$,$\{0,2\}$ 共 4 个。

3 D 【解析】因为集合 $A$ 有且仅有两个子集,所以 $A$ 仅有一个元素,即方程 $(a-1)x^2+3x-2=0$ 仅有一个根。当 $a=1$ 时,方程化为 $3x-2=0$,所以 $A=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$,符合题意。当 $a\neq1$ 时,$\Delta=8a+1=0$,所以 $a=-\dfrac{1}{8}$。综上所述,$a=-\dfrac{1}{8}$ 或 $a=1$。

4 D 【解析】根据题意,画出如图所示的数轴,所以有 $b+2\leqslant a-1$ 或 $b-2\geqslant a+1$,即 $a-b\geqslant3$ 或 $a-b\leqslant-3$,即 $|a-b|\geqslant3$,故选 D。




第 4 题图

5 B 【解析】根据子集的定义,可得集合 $M$ 中必定含有 1,2,3 三个元素,而且集合 $\{4,5,6\}$ 的真子集的个数为 $2^3-1=7$,所以满足 $\{1,2,3\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5,6\}$ 的集合 $M$ 的个数为 7,故选 B。

6 1 【解析】由题意得,$\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$,所以 $\dfrac{b}{a}=0$,且 $a\neq0$,$a\neq1$,即 $b=0$,则有 $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$,所以 $a^2=1$,$a\neq1$,解得 $a=-1$。所以 $a^{2018}+b^{2019}=1$。

7 2 【解析】由 $B\subseteq A$ 知,$m^2=4m-4$,即 $(m-2)^2=0$,所以 $m=2$。

8 $\{a|a\leqslant-5$ 或 $a>5\}$ 【解析】因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$,$B=\{x|a\leqslant x<a+4\}$,$A\supseteq B$,所以 $a+4\leqslant-1$ 或 $a>5$,解得 $a\leqslant-5$ 或 $a>5$。

9 ①② 【解析】①对,任取 $x,y\in S$,不妨设 $x=a_1+b_1\sqrt{3}$,$y=a_2+b_2\sqrt{3}$($a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z}$),则 $x+y=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}$,其中 $a_1+a_2$,$b_1+b_2$ 均为整数,即 $x+y\in S$。同理可得 $x-y\in S$,$xy\in S$;②对,由于 $S$ 为封闭集,任取 $x\in S$,有 $x-x\in S$,即 $0\in S$;③错,当 $S=\{0\}$ 时,$S$ 是封闭集,但不是无限集;④错,设 $S=\{0\}\subseteq T=\{0,1\}$,显然 $S$ 是封闭集,$T$ 不是封闭集。因此,说法正确的是①②。

10 解:$A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{0,-4\}$,

因为 $B\subseteq A$,所以 $B=A$ 或 $B\subsetneqq A$。

当 $B=A$ 时,$B=\{-4,0\}$,

即 $-4,0$ 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两根,代入得 $a=1$,

此时满足条件,即 $a=1$ 符合题意。

当 $B\subsetneqq A$ 时,分两种情况:

若 $B=\varnothing$ 时,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,解得 $a<-1$。

若 $B\neq\varnothing$ 时,则方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个相等的实数根,所以 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$,解得 $a=-1$,此时 $B=\{0\}$,符合题意。

综上所述,实数 $a$ 的取值范围是 $\{a|a\leqslant-1$ 或 $a=1\}$。

11 解:(1)不存在。理由如下:对任意的实数 $b$ 都有 $A\subseteq B$,则当且仅当 $A$ 中的元素是 1,2,因为 $A=\{a-4,a+4\}$,所以 $\begin{cases}a-4=1,\\a+4=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=2,\\a+4=1,\end{cases}$ 无解,所以这样的实数 $a$ 不存在。

(2)由(1)易知当且仅当 $\begin{cases}a-4=1,\\a+4=b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=2,\\a+4=b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=b,\\a+4=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=b,\\a+4=2\end{cases}$ 时 $A\subseteq B$,

解得 $\begin{cases}a=5,\\b=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6,\\b=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-6。\end{cases}$

故所求实数对为 $(5,9)$,$(6,10)$,$(-3,-7)$,$(-2,-6)$。

## 1.2.2 集合的运算

### 变式题型

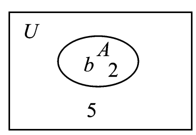
变式 1 解:(1)设 $x_1$、$x_2$ 为方程 $x^2-5x+q=0$ 的两实数根,则 $x_1+x_2=5$,所以 $x_1\neq x_2$ $\left(\text{否则 } x_1=x_2=\dfrac{5}{2}\notin U\text{,这与 } A\subseteq U \text{ 矛盾}\right)$。而由 $A\subseteq U$ 可知 $x_1$、$x_2\in U$,又 $1+4=2+3=5$,所以 $q=4$ 或 $q=6$。

所以 $\complement_U A=\{2,3,5\}$ 或 $\complement_U A=\{1,4,5\}$。

(2)由题意,利用 Venn 图,可得方程组

$$\begin{cases}b=3, & ①\\a^2+2a-3=5, & ②\end{cases}$$

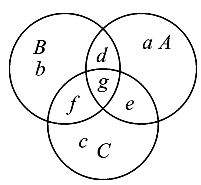
将②式变形为 $a^2+2a-8=0$,解得 $a=-4$ 或 $a=2$。所以 $\begin{cases}a=-4,\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=3\end{cases}$ 为所求。




变式 1 图

【规律方法】符号 $\complement_U A$ 存在的前提是 $A\subseteq U$,这也是解有关补集问题的一个隐含条件,充分利用题目中的隐含条件也是我们解题的一个突破口,若 $x\in U$,则 $x\in A$ 和 $x\in\complement_U A$ 二者必居其一。

变式 2 解:设解出第一题、第二题、第三题的学生的集合分别为 $A$、$B$、$C$,并用三个圆表示,则重叠部分表示同时解出两题或三题的学生的集合,其人数分别用 $a,b,c,d,e,f$ 表示。




变式 2 图

根据已知条件(1)(2)(3)(4)可得

$$\begin{cases}a+b+c+d+e+f+g=25, & ①\\b+f=2(c+f), & ②\\a=d+e+g+1, & ③\\a=b+c。 & ④\end{cases}$$

①+②,得 $a+2b-c+d+e+g=25$, ⑤

将③代入⑤,得 $2b-c+2d+2e+2g=24$, ⑥

将④代入⑤,得 $3b+d+e+g=25$, ⑦

⑦×2-⑥,得 $4b+c=26$。 ⑧

由于 $c\geqslant0$,所以 $b\leqslant6\frac{1}{2}$。

利用②⑧消去 $c$,得 $f=b-2(26-4b)=9b-52$。

因为 $f\geqslant0$,所以 $b\geqslant5\frac{7}{9}$。

则有 $b=6$,即只解出第二题的学生有 6 人。

## 题组A 学考通关测试

正文 P33

1 D【解析】由题意得,$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$。故选 D。

2 A【解析】因为 $A=\{1,2,3,4\}$,所以 $B=\{x|x=n^2,n\in A\}=\{1,4,9,16\}$,所以 $A\cap B=\{1,4\}$。故选 A。

3 A【解析】因为 $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$,$N=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$,所以 $M\cap N=\{1,3\}$。

4 D【解析】$\because A\cap B=A$,$\therefore A\subseteq B$,$\therefore b<1$。故选 D。

5 $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$【解析】由题意可得,$\complement_U B=\{x|-1\leqslant x\leqslant4\}$,$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$。

6 2【解析】因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,所以 $x^2=0$ 或 $x^2=2$ 或 $x^2=x$,解得 $x=0$ 或 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ 或 1。经检验,当 $x=\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ 时满足题意,故填 2。

7 解:因为 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,$B=\{x|ax-2=0\}$,且 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,当 $B=\varnothing$ 时,$a=0$,满足题意;

当 $B\neq\varnothing$ 时,$B=\left\{\frac{2}{a}\right\}$,

此时 $\frac{2}{a}=1$ 或 $\frac{2}{a}=2$,解得 $a=2$ 或 $a=1$。

故由实数 $a$ 的取值组成的集合 $C=\{0,1,2\}$。

## 题组B 高考通关测试

正文 P33

1 C【解析】$M=\{x|x^2-6x+5=0\}=\{1,5\}$,$N=\{x|x^2-5x=0\}=\{0,5\}$,$M\cup N=\{0,1,5\}$。

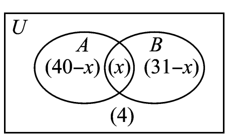
2 B【解析】$M=\{3,4,5,7\}$,$N=\{2,4,5,6\}$,$M\cup N=\{2,3,4,5,6,7\}=U$。

3 C【解析】①0 是自然数,故①正确。②$\sqrt{2}$是无理数,故②正确。③$\varnothing$是任何一个集合的子集,故③正确。④$\varnothing$中没有元素,故④错误。⑤由直线 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 的交点组成的集合为 $\{(1,4)\}$,故⑤错误。正确的有 3 个,故选 C。

4 D【解析】因为集合 $M$ 的元素是图形直线,集合 $N$ 的元素是图形圆,因为没有既是直线又是圆的图形,所以 $M\cap N=\varnothing$,故选 D。

5 B【解析】因为 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$,$A\cap B=\{1\}$,$A\neq\{1\}$,$B\neq\{1\}$,所以当 $A=\{1,2\}$ 时,$B=\{1,3,4\}$。当 $A=\{1,3\}$ 时,$B=\{1,2,4\}$。当 $A=\{1,4\}$ 时,$B=\{1,2,3\}$。当 $A=\{1,2,3\}$ 时,$B=\{1,4\}$。当 $A=\{1,2,4\}$ 时,$B=\{1,3\}$。当 $A=\{1,3,4\}$ 时,$B=\{1,2\}$。故满足条件的"好集对"的个数为 6。

6 25【解析】记 50 名学生构成全集 $U$,跳远、铅球测试及格的学生分别构成集合 $A,B$,设两项测试全都及格的人数是 $x$,用 Venn 图表示它们之间的关系如图所示,则 $(40-x)+x+(31-x)+4=50$,解得 $x=25$。

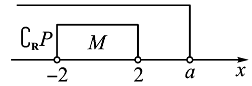



第 6 题图

7 $\{x|x>1\}$【解析】$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|1<x\leqslant3\}$,所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|x>1\}$。

8 $\{m|m\geqslant2\}$【解析】因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,所以 $m\geqslant2$。

9 $\{a|a\geqslant2\}$【解析】$M=\{x|-2<x<2\}$,$\complement_{\mathbf{R}}P=\{x|x<a\}$,因为 $M\subseteq\complement_{\mathbf{R}}P$,所以由数轴知 $a\geqslant2$。




第 9 题图

10 解:由 $A\subseteq(A\cap B)$,得 $A\subseteq B$,则

(1)当 $A=\varnothing$ 时,得 $2a+1>3a-5$,解得 $a<6$。

(2)当 $A\neq\varnothing$ 时,得 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a-5,\\2a+1\geqslant3,\\3a-5\leqslant22,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant a\leqslant9$。

综上可知,使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的 $a$ 的取值范围是 $\{a|a\leqslant9\}$。

11 解:(1)当 $a=1$ 时,$B=\{x|2<x<4\}$。

又因为 $\complement_U A=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$,所以 $(\complement_U A)\cap B=\{3<x<4\}$。

(2)因为 $(\complement_U A)\cap B=B$,所以 $B\subseteq\complement_U A$。

当 $B=\varnothing$ 时,$2a\geqslant a+3$,解得 $a\geqslant3$。

当 $B\neq\varnothing$ 时,则 $\begin{cases}2a<a+3,\\a+3\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a<a+3,\\2a\geqslant3,\end{cases}$

解得 $a\leqslant-2$ 或 $\frac{3}{2}\leqslant a<3$。

综上,实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-2 \text{ 或 } a\geqslant\frac{3}{2}\right\}$。

12 解:当 $a=0$ 时,$2x+1=0$,$x=-\frac{1}{2}$,有一个负实数根。

当 $a\neq0$ 时,若 $x=0$,则原方程为 $1=0$,无意义,

因此方程若有实数根,必为两个正根或一正根一负根或两个负根。由 $\Delta=4-4a\geqslant0$,得 $a\leqslant1$。

若 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有两个正根,

则 $\begin{cases}x_1+x_2>0,\\x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{2}{a}>0,\\\frac{1}{a}>0,\end{cases}$ 这样的 $a$ 不存在,

这说明只要 $a\leqslant1$ 且 $a\neq0$,方程 $ax^2+2x+1=0$ 的两个根必为"一正根一负根或两个负根"。

综上所述,当 $a\leqslant1$ 时,方程至少有一个负实数根。

【解析】方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实数根等价于该方程:①只有一个负根,无其他根;②一个正根,一个负根;③两负根。故需分类讨论。

# 第一章 单元复习方案

## 测评·高考模拟卷

正文 P36

1 C【解析】对于选项 A,$A=\{\pi\}$,$B=\{3.14159\}$,$\pi\neq3.14159$,所以 $A\neq B$,排除 A;对于选项 B,$A=\{2,3\}$,$B=\{(2,3)\}$,$A$ 为数集,$B$ 为点集,$A\neq B$,排除 B;对于选项 C,$A=\{1,\sqrt{3},\pi\}$,$B=\{\pi,1,|-\sqrt{3}|\}=\{1,\sqrt{3},\pi\}$,即 $A=B$;对于选项 D,$A=\{x|-1<x\leqslant1,x\in\mathbf{N}\}=\{0,1\}$,$B=\{1\}$,所以 $A\neq B$,排除 D。

2 B【解析】由于 $1\in\{0,1\}$,$\{1\}\subseteq\{0,1\}$,故选 B。

3 D【解析】因为 $A\cup\{-1,1\}=\{0,-1,1\}$,所以 $A$ 可以是 $\{0\}$,$\{0,1\}$,$\{0,-1\}$,$\{0,1,-1\}$。故满足条件的集合 $A$ 的个数为 4。

4 A【解析】因为集合 $A=\{0,x\}$,$B=\{x^2,-x^2,|x|-1\}$,$A\subsetneqq B$,所以 $|x|-1=0$,解得 $x=1$ 或 $x=-1$。故选 A。

5 C【解析】$\because A=\{x|-1<x-3\leqslant2\}=\{x|2<x\leqslant5\}=(2,5]$,$B=\{x|3\leqslant x<6\}=[3,6)$,$\therefore A\cap B=[3,5]$。故选 C。

6 D【解析】$\because M=\{1,2,3,4\}$,$N=\{x|x\geqslant3\}$,$\therefore M\cap N=\{3,4\}$。

故选 D。

7 D 【解析】满足题意的集合 $A$ 可以为 $\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}$,共 4 个。

8 B 【解析】因为 $A\cap\{-1,0,1\}=\{0,1\}$,所以 $0\in A,1\in A$。又因为 $A\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$,所以 $-2,2$ 可能是集合 $A$ 的元素,也可能不是集合 $A$ 的元素。所以 $A=\{0,1\}$ 或 $A=\{0,1,-2\}$ 或 $A=\{0,1,2\}$ 或 $A=\{0,1,-2,2\}$。

9 D 【解析】由题意可得 $A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x^2-x,\\y=x+3\end{cases}\right.\right\}=\{(-1,2),(3,6)\}$,故选 D。

10 B 【解析】已知 $A=\{\sqrt{2},\sqrt{3}\},B=\{1,\sqrt{2}\}$,则 $A\otimes B$ 有 $(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)=1,(\sqrt{2}+\sqrt{2})\times(\sqrt{2}-\sqrt{2})=0,(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)=2,(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ 四种结果,由集合中元素的互异性,得集合 $A\otimes B$ 有 3 个元素,故集合 $A\otimes B$ 的真子集个数为 $2^3-1=7$,故选 B。

11 D 【解析】根据题意,若 $A\cup B=A$,则 $B\subseteq A$。又 $B\neq\varnothing$,则可得 $\begin{cases}m+1<2m-1,\\-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant 7,\end{cases}$ 解得 $2<m\leqslant 4$,故选 D。

12 D 【解析】因为集合 $A,B$ 为集合 $I$ 的两个非空子集,且集合 $A$ 中元素的最大值小于集合 $B$ 中元素的最小值,所以 $A$ 与 $B$ 没有相同的元素。当 $A=\{1\}$ 时,$B$ 为 $\{2,3,4,5\}$ 的非空子集,此时不同的情况有 $2^4-1=15$(种);当 $A=\{2\}$ 或 $\{1,2\}$ 时,$B$ 为 $\{3,4,5\}$ 的非空子集,此时不同的情况有 $2\times(2^3-1)=14$(种);当 $A=\{3\},\{2,3\},\{1,3\}$ 或 $\{1,2,3\}$ 时,$B$ 为 $\{4,5\}$ 的非空子集,此时不同的情况有 $4\times(2^2-1)=12$(种);当 $A=\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$ 或 $\{1,2,3,4\}$ 时 $B=\{5\}$,此时不同的情况有 8 种,因此满足条件的 $A,B$ 的不同情形共有 $15+14+12+8=49$(种),故答案为 D。

13 $\{7,9\}$ 【解析】依题意得 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},\complement_U A=\{4,6,7,9,10\}$。又 $B=\{1,3,5,7,9\}$,所以 $\complement_U A\cap B=\{7,9\}$。

14 4 【解析】由条件 $A\cap C=B\cup C$,可知 $B\subseteq(B\cup C)=(A\cap C)\subseteq C\subseteq(B\cup C)=(A\cap C)\subseteq A$,所以符合条件的集合 $C$ 的个数等于集合 $\{3,4\}$ 的子集的个数,共 4 个。

15 $\{1,8\}$ 【解析】$A\cap B=\{0,1,2,8\}\cap\{-1,1,6,8\}=\{1,8\}$。

16 8 【解析】因为 $S_4=\{1,2,3,4\}$,则 $S_4$ 的所有奇子集为 $\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}$,共 8 个。

17 解:由 $x^2+x-6=0\Rightarrow x=2$ 或 $-3$;因此 $M=\{2,-3\}$。

①当 $a=2$ 时,$N=\{2\}$,此时 $N\subseteq M$;

②当 $a=-3$ 时,$N=\{2,-3\}$,此时 $N=M$;

③当 $a\neq 2$ 且 $a\neq -3$ 时,得 $N=\{2,a\}$,此时 $N$ 不是 $M$ 的子集。

故所求实数 $a$ 的值为 2 或 $-3$。

18 解:(1)因为 $A=\{x\mid -4<x<2\},B=\{x\mid x<-5$ 或 $x>1\}$,所以 $A\cup B=\{x\mid x<-5$ 或 $x>-4\}$。

又 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid -4<x\leqslant 1\}$。

(2)若 $B\cap C=\varnothing$,则需 $\begin{cases}m-1\geqslant -5,\\m+1\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m\geqslant -4,\\m\leqslant 0,\end{cases}$

故实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid -4\leqslant m\leqslant 0\}$。

19 解:(1)当 $a=1$ 时,$A=\{x\mid 0<2x+1\leqslant 3\}=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right.\right\}$,

因为 $B=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\left|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant 2\right.\right\}$,

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cup A=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$。

(2)若 $A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$。

因为 $A=\{x\mid 0<2x+a\leqslant 3\}=\left\{x\left|-\frac{a}{2}<x\leqslant\frac{3-a}{2}\right.\right\}$,

所以 $\begin{cases}-\frac{a}{2}\geqslant-\frac{1}{2},\\\frac{3-a}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $-1<a\leqslant 1$,

所以实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid -1<a\leqslant 1\}$。

20 解:(1)当 $b=2$ 时,由 $\begin{cases}y=x+2,\\x^2+y^2=2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$

所以 $A\cap B=\{(-1,1)\}$。

(2)由 $\begin{cases}y=x+b,\\x^2+y^2=2\end{cases}$ 得 $2x^2+2bx+b^2-2=0$ ①,

①为关于 $x$ 的一元二次方程,

因为 $A\cap B=\varnothing$,所以方程①无解。

所以 $\Delta=(2b)^2-4\times 2\times(b^2-2)<0$,

解得 $b<-2$ 或 $b>2$。

21 解:由题意知 $A=\{1,2\}$。

(1)因为 $A\cap B=\{2\}$,

所以 $2\in B$,代入 $B$ 中方程,得 $a^2+4a+3=0$,

所以 $a=-1$ 或 $a=-3$。

当 $a=-1$ 时,$B=\{-2,2\}$,满足条件;

当 $a=-3$ 时,$B=\{2\}$,也满足条件。

综上可得,$a$ 的值为 $-1$ 或 $-3$。

(2)因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$。

对于方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-5=0$,

①当 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=8(a+3)<0$,

即 $a<-3$ 时,$B=\varnothing$,满足条件;

②当 $\Delta=0$,即 $a=-3$ 时,$B=\{2\}$,满足条件;

③当 $\Delta>0$,即 $a>-3$ 时,$B=A=\{1,2\}$ 才能满足条件,这是不可能成立的。

综上可知,$a$ 的取值范围是 $a\leqslant-3$。

(3)因为 $A\cap\complement_U B=A$,所以 $A\subseteq\complement_U B$,所以 $A\cap B=\varnothing$。

对于方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-5=0$,

①当 $\Delta<0$,即 $a<-3$ 时,$B=\varnothing$,满足条件。

②当 $\Delta=0$,即 $a=-3$ 时,$B=\{2\},A\cap B=\{2\}$,不满足条件。

③当 $\Delta>0$,即 $a>-3$ 时,此时只需 $1\notin B$ 且 $2\notin B$ 即可。

将 $x=2$ 代入 $B$ 中方程,得 $a=-1$ 或 $a=-3$;

将 $x=1$ 代入 $B$ 中方程,得 $a=-1\pm\sqrt{3}$,

所以 $a\neq-1,a\neq-3$ 且 $a\neq-1\pm\sqrt{3}$。

综上,$a$ 的取值范围是 $a<-3$ 或 $-3<a<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $-1<a<-1+\sqrt{3}$ 或 $a>-1+\sqrt{3}$。

# 第二章 函数

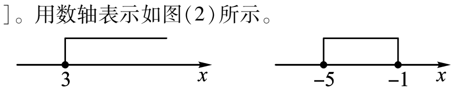
## 2.1 函数

### 2.1.1 函数

**变式题型**

变式1 解:(1)$\{x\mid x\geqslant 3\}$ 用区间表示为 $[3,+\infty)$。用数轴表示如图(1)所示。

(2)$\{x\mid x\leqslant-1\}\cap\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}=\{x\mid -5\leqslant x\leqslant-1\}$,用区间表示为 $[-5,-1]$。用数轴表示如图(2)所示。




(1)　　(2)

变式 1 图

变式2 A 【解析】①②③这三个图所示的对应都符合映射的定义,即 $A$ 中每一个元素在对应法则下,在 $B$ 中都有唯一的元素与之对应;对于④⑤,$A$ 中的每一个元素在 $B$ 中有 2 个元素与之对应,所以不是 $A$ 到 $B$ 的映射;对于⑥,$A$ 中的元素 $a_3,a_4$ 在 $B$ 中没有元素与之对应,所以不

是$A$到$B$的映射。

综上可知,能构成映射的个数为3。

变式3 解:因为$x\in A$,所以$1\leqslant x\leqslant b$,

又因为$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$,

所以当$x=1$时,$f(x)$取最小值$f(1)=1$;

当$x=b$时,$f(x)$取最大值$f(b)=\frac{1}{2}(b-1)^2+1$。

所以$f(x)$的值域为$\left[1,\frac{1}{2}(b-1)^2+1\right]$。

又因为$f(x)$的值域为$A$,所以$b=\frac{1}{2}(b-1)^2+1$。

整理,得$b^2-4b+3=0$,所以$b=1$或$b=3$。

又因为$b>1$,所以$b=3$。

## 题组A 学考通关测试

正文 P46

1 B【解析】函数的定义域和值域既可以是无限集,也可以是有限集,如$f(x)=0(x=0)$的定义域和值域就是有限集,故B不正确。

2 D【解析】因为函数$y=f(x)$中,对每一个$x$值,只能有唯一的$y$与之对应,所以函数$y=f(x)$的图像与平行于$y$轴的直线最多只能有一个交点。故A,B,C均不正确,故选D。

3 B【解析】$f(2)+f(-2)=2+\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}=0$。

4 B【解析】当$x=-4$时,$\frac{1}{2}\times(-4-1)=-\frac{5}{2}\notin N$,故选项B中函数不是从集合$M$到集合$N$的函数。

5 $[0,7]$【解析】因为$x\in(-1,3]$,所以$2x+1\in(-1,7]$,则$f(x)=|2x+1|\in[0,7]$。故函数$f(x)$的值域为$[0,7]$。

6 $\frac{1}{2}$或2【解析】因为$f(a)=2$,所以$\frac{5a}{a^2+1}=2$,即$2a^2-5a+2=0$,解得$a=\frac{1}{2}$或2。故$a$的值为$\frac{1}{2}$或2。

7 解:(1)分别令$x=0,1,2,3$,

得$f(0)=0,f(1)=-1,f(2)=0,f(3)=3$,

所以函数的值域为$\{-1,0,3\}$。

(2)令$t=x^2-4x+6$,即$t=(x-2)^2+2$,

所以$t\in[2,+\infty)$,

故函数$y=\sqrt{x^2-4x+6}$的值域是$[\sqrt{2},+\infty)$。

(3)由$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$得$(1-y)x^2+(1-2y)x+1-y=0$。

当$x=-1$时,$x^2+2x+1=0$,$x^2+x+1\neq0$,显然$x=-1$不是$(1-y)x^2+(1-2y)x+1-y=0$的解,即该变形是等价的。

当$y=1$时,$x=0$;

当$y\neq1$时,由$\Delta\geqslant0$,得$(1-2y)^2-4(1-y)^2\geqslant0$,可得$y\geqslant\frac{3}{4}$且$y\neq1$,综上可得,函数的值域为$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$。

## 题组B 高考通关测试

正文 P46

1 D【解析】根据题意得$\begin{cases}1-x\geqslant0,\\2x^2-3x-2\neq0,\end{cases}$解得$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right]$。

2 B【解析】集合$M=\{x|(x+1)(x-3)\leqslant0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$,$N=\{y|y(y-3)\leqslant0\}=\{y|0\leqslant y\leqslant3\}$。由此排除选项A,D。由函数的定义知,每一个$x$的值只能唯一对应一个$y$值,故排除选项C。故选B。

3 B【解析】$f:x\to|x|$是集合$A$到集合$B$的映射,$A=\{-1,0,1\}$,且$|-1|=1$,$|1|=1$,$|0|=0$,而$B$中的每一个元素都有原象,所以$B=\{0,1\}$。所以$A\cap B=\{0,1\}$,故选B。

4 A【解析】函数$f(x)=\sqrt{4-2^x}$,则函数$f(x)$满足$4-2^x\geqslant0$,解得$x\leqslant2$,所以函数$f\left(\frac{x}{2}\right)$满足$\frac{x}{2}\leqslant2$,解得$x\leqslant4$,即函数$f\left(\frac{x}{2}\right)$的定义域为$(-\infty,4]$。故选A。

5 B【解析】由$2x^2-1=1$,得$x_1=1,x_2=-1$,由$2x^2-1=7$,得$x_3=-2,x_4=2$,所以定义域为2个元素的集合有4个,定义域为3个元素的集合有4个,定义域为4个元素的集合有1个,因此共有9个"孪生函数"。

6 $[2,5)$【解析】依题意有$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\5-x>0\end{cases}\Rightarrow2\leqslant x<5$,所以$f(x)$的定义域为$[2,5)$。

7 $\{x|x<0$且$x\neq-1\}$【解析】由$\begin{cases}x+1\neq0,\\|x|-x>0\end{cases}\Rightarrow x<0$且$x\neq-1$,即函数的定义域为$\{x|x<0$且$x\neq-1\}$。

8 $\left[0,\frac{25}{4}\right]$【解析】函数$f(x)=-x^2-3x+4=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$,$x\in[-3,1]$,对称轴为$x=-\frac{3}{2}$,开口向下,$f(x)_{\min}=f(1)=0$,$f(x)_{\max}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$,该函数的值域为$\left[0,\frac{25}{4}\right]$。

9 $[-2,2]$【解析】函数$y=f(2x-1)$的定义域是$[0,2]$,即$x\in[0,2]$,则$2x-1\in[-1,3]$,所以$f(x)$的定义域为$[-1,3]$,从而$x+1\in[-1,3]$,$x\in[-2,2]$,函数$y=f(x+1)$的定义域是$[-2,2]$。

10 解:存在。$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$是一条抛物线,对称轴为$x=1$,顶点坐标为$(1,1)$,开口向上。

因为$m>1$,所以区间$[1,m]$位于对称轴的右侧,在此区间上函数值$y$随自变量$x$的增大而增大,所以要使函数的定义域和值域都是$[1,m]$,有$\begin{cases}f(1)=1,\\f(m)=m。\end{cases}$由$f(m)=m$,得$\frac{1}{2}m^2-m+\frac{3}{2}=m$,即$m^2-4m+3=0$。所以$m=3$或$m=1$(舍去)。

所以存在实数$m=3$满足条件。

11 解:去分母,并整理成关于$x$的一元二次方程形式。

由$y=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$,得$(y-m)x^2-8x+(y-n)=0$。

根据一元二次方程有实数根的条件列式。

由$x\in\mathbf{R}$,得①当$y-m\neq0$,

则$\Delta=(-8)^2-4(y-m)(y-n)\geqslant0$,

即$y^2-(m+n)y+(mn-16)\leqslant0$。

由$1\leqslant y\leqslant9$知,关于$y$的一元二次方程$y^2-(m+n)y+(mn-16)=0$的两根为1和9,

故有$\begin{cases}m+n=1+9,\\mn-16=1\times9,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=5,\\n=5。\end{cases}$

②当$y-m=0$,即$y=m=5$时,

对应$x=0$,符合题意,所以$m=n=5$。

12 解:(1)由题意,得关于$x$的不等式$4kx+3>0$的解集为$\mathbf{R}$。

当$k>0$时,不等式$4kx+3>0$的解集为$\left\{x\middle|x>-\frac{3}{4k}\right\}$,不符合题意;

当$k<0$时,不等式$4kx+3>0$的解集为$\left\{x\middle|x<-\frac{3}{4k}\right\}$,不符合题意;

当$k=0$时,$3>0$恒成立,符合题意。

综上,实数$k$的值是0。

(2)由题意,得关于$x$的不等式$4kx+3>0$的解集为$(-\infty$,

$-2)$，所以$\begin{cases}k<0,\\ -\dfrac{3}{4k}=-2\end{cases}$，即$\begin{cases}k<0,\\ k=\dfrac{3}{8}\end{cases}$无解。

所以不存在实数 $k$，使得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)$。

## 2.1.2　函数的表示方法

**变式题型**

**变式**　解：方法一（配凑法）因为 $f(x+1)=x^2-3x+2=(x+1)^2-5(x+1)+6$，所以 $f(x)=x^2-5x+6$。

方法二（换元法）令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，所以 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$，所以 $f(x)=x^2-5x+6$。

### 题组A 学考通关测试

正文 P55

1　A【解析】根据汽车加速行驶时 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$，匀速行驶时 $s=vt$，减速行驶时 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}at^2$，结合函数图像可知。

2　D【解析】题中已给出自变量的取值范围，$x\in\{1,2,3,4\}$，故选 D。

3　A【解析】当 $x=-1$ 时，$y=0$，即图像过点 $(-1,0)$，显然 D 错；当 $x=0$ 时，$y=1$，即图像过点 $(0,1)$，C 错；当 $x=1$ 时，$y=2$，即图像过点 $(1,2)$，B 错，选 A。

4　D【解析】$f(2\,019)=a\cdot 2\,019^3+b\cdot 2\,019+1=k$，则 $a\cdot 2\,019^3+b\cdot 2\,019=k-1$，所以 $f(-2\,019)=-(a\cdot 2\,019^3+b\cdot 2\,019)+1=2-k$，故选 D。

5　1　1【解析】由表格可知 $f[g(1)]=f(3)=1$。因为 $g[f(x)]=2$，所以 $f(x)=2$，所以 $x=1$。

6　右　1【解析】因为 $y=f(-x+1)=f[-(x-1)]$，所以把函数 $y=f(-x)$ 的图像向右平移 1 个单位长度，可得到 $y=f(-x+1)$ 的图像。

7　解：将原式中的 $x$ 用 $\dfrac{1}{x}$ 代替，可得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x}$。

由$\begin{cases}f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x,\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x},\end{cases}$

消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 得 $f(x)=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}(x\neq 0)$。

因此，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}(x\neq 0)$。

### 题组B 高考通关测试

正文 P56

1　D【解析】因为 $f(-2)=(-2)^2=4$，所以 $f[f(-2)]=f(4)=5$，故选 D。

2　A【解析】函数图像的走势是稍陡、陡、平，水面高度的变化与所给容器的粗细有关，容器应为下粗上细且上下两部分均为柱体，水面上升速度是匀速的，故选 A。

3　A【解析】解法一：令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，所以 $f(t)=(t+1)^2$，所以 $f(x)=x^2+2x+1$。

解法二：$f(x-1)=(x-1)^2+2(x-1)+1$，所以 $f(x)=x^2+2x+1$。故选 A。

4　C【解析】由题意得 $2f(-\sqrt{2})+f(1)=1$，$2f(1)+f(0)=1$，$2f(0)+f(-1)=1$，$2f(-1)+f(0)=1$。联立后两个式子得 $f(0)=\dfrac{1}{3}$，代入第二个式子得 $f(1)=\dfrac{1}{3}$，将 $f(1)=\dfrac{1}{3}$ 代入第一个式子得到 $f(-\sqrt{2})=\dfrac{1}{3}$。故选 C。

5　B【解析】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=\dfrac{3}{2}x$，当 $1<x\leqslant 2$ 时，$y=3-\dfrac{3}{2}x$，所以 $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$。

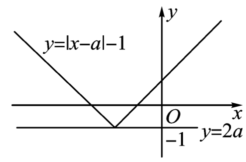
6　$\{0,2,3\}$（答案不唯一）　7【解析】分别令 $2x-1=-1,3,5$，解得 $x=0,2,3$，故满足条件的映射个数即为集合 $\{0,2,3\}$ 的非空子集的个数，即 $2^3-1=7$。

7　2 005【解析】令 $\dfrac{x+2\,002}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t+2\,002}{t-1}$，从而有

$\begin{cases}f(t)+2f\left(\dfrac{t+2\,002}{t-1}\right)=4\,015-t,\\ f\left(\dfrac{t+2\,002}{t-1}\right)+2f(t)=4\,015-\dfrac{t+2\,002}{t-1},\end{cases}$

解得 $f(t)=\dfrac{1}{3}\left(4\,013+t-\dfrac{4\,006}{t-1}\right)$，所以 $f(2\,004)=2\,005$。

8　$-\dfrac{1}{2}$【解析】在同一平面直角坐标系内作出直线 $y=2a$ 与函数 $y=|x-a|-1$ 的大致图像，如图所示。由题意，可知 $2a=-1$，则 $a=-\dfrac{1}{2}$。




第 8 题图

9　$-\dfrac{2}{5}$【解析】由题意得 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+a$，$f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{10}$，由 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)$ 可得 $-\dfrac{1}{2}+a=\dfrac{1}{10}$，解得 $a=\dfrac{3}{5}$，故 $f(5a)=f(3)=f(-1)=-1+a=-1+\dfrac{3}{5}=-\dfrac{2}{5}$。

10　解：(1) 由题意得，$x\in(0,12)$。

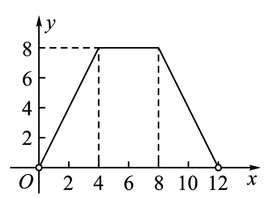
当 $0<x\leqslant 4$ 时，$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 4x=2x$；

当 $4<x\leqslant 8$ 时，$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$；

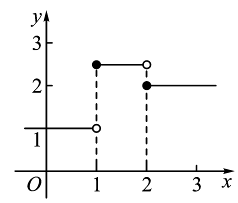
当 $8<x<12$ 时，$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 4\times(12-x)=24-2x$。

所以 $y=\begin{cases}2x,0<x\leqslant 4,\\ 8,4<x\leqslant 8,\\ 24-2x,8<x<12。\end{cases}$

(2) 画出 $y=f(x)$ 的图像，如图所示。




第 10 题图




第 11 题图

11　解：(1) 当 $1\leqslant x<2$ 时，$x-1\geqslant 0$，$x-2<0$，所以 $g(x)=\dfrac{6-1}{2}=\dfrac{5}{2}$。

(2) 当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$x-2<0$，所以 $g(x)=\dfrac{3-1}{2}=1$。当 $x\geqslant 2$ 时，$x-1>0$，$x-2\geqslant 0$，所以 $g(x)=\dfrac{6-2}{2}=2$。

故 $y=g(x)=\begin{cases}1,x<1,\\ \dfrac{5}{2},1\leqslant x<2,\\ 2,x\geqslant 2。\end{cases}$其图像如图。

(3) 因为 $g(x)>0$，所以 $f(g(x))=2$，$x\in\mathbf{R}$，

$g(f(x))=\begin{cases}g(1)=\dfrac{5}{2},x<0,\\ g(2)=2,x\geqslant 0,\end{cases}$

所以方程 $x^{f(g(x))}=2g(f(x))$ 为 $x^2=\begin{cases}5,x<0,\\ 4,x\geqslant 0,\end{cases}$

所以 $x=-\sqrt{5}$ 或 $x=2$。

## 2.1.3 函数的单调性

### 变式题型

变式1 D 【解析】根据单调函数的定义可知,所取的两个自变量的值必须在同一单调区间内才能由函数的单调性比较其函数值的大小。故 A,B,C 均不正确,选 D。

变式2 解:要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,4]$ 上是减函数,由二次函数图像可知,只要对称轴 $x=1-a\geqslant4$ 即可,解得 $a\leqslant-3$。

【点评】设 $f(x)$ 的单调减区间为 $A$,则集合 $(-\infty,4]$ 与 $A$ 的关系是 $(-\infty,4]\subseteq A$,而不是 $(-\infty,4]=A$。

### 题组A 学考通关测试 正文 P64

1 C 【解析】由 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$ 知,当 $a>b$ 时,$f(a)>f(b)$;当 $a<b$ 时,$f(a)<f(b)$,所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数。故选 C。

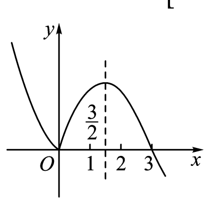
2 C 【解析】显然 $y=x^2$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上单调递增,故 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上单调递减,所以 $y_{\max}=4$。故选 C。

3 A 【解析】函数单调性的定义是指定义在区间 $I$ 上任意两个值 $x_1,x_2$,强调的是任意,①错误;②$y=x^2$ 在 $x\geqslant0$ 时是增函数,在 $x<0$ 时是减函数,从而 $y=x^2$ 在整个定义域上不具有单调性,②错误;③$y=-\dfrac{1}{x}$ 在整个定义域内不是单调递增函数。如 $-3<5$ 而 $f(-3)>f(5)$,③错误;④$y=\dfrac{1}{x}$ 的单调递减区间不是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$,注意写法,④错误。故选 A。

4 D 【解析】函数在区间 $(a,b)\cup(b,c)$ 上无法确定单调性。如 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数,但在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上并不具有单调性。故选 D。

5 6 【解析】易知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为减函数,所以 $\begin{cases}f(a)=1,\\f(b)=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{1}{a-1}=1,\\\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=2,\\b=4。\end{cases}$ 所以 $a+b=6$。

6 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ 【解析】$y=-(x-3)|x|=\begin{cases}-x^2+3x,x>0,\\x^2-3x,x\leqslant0,\end{cases}$ 作出其图像如图所示,观察图像知其递增区间为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$。




第 6 题图

7 解:函数 $g(x)$ 在 $(0,3]$ 上是减函数。证明如下:

任取 $x_1,x_2\in(0,3]$,且 $x_1<x_2$,则 $g(x_1)-g(x_2)=\left[f(x_1)+\dfrac{1}{f(x_1)}\right]-\left[f(x_2)+\dfrac{1}{f(x_2)}\right]=[f(x_1)-f(x_2)]\left[1-\dfrac{1}{f(x_1)f(x_2)}\right]$。

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$。

又 $f(x)>0$,$f(3)=1$,所以 $0<f(x_1)<f(x_2)\leqslant f(3)=1$,

则 $0<f(x_1)f(x_2)<1$,$\dfrac{1}{f(x_1)f(x_2)}>1$,即 $1-\dfrac{1}{f(x_1)f(x_2)}<0$,

所以 $g(x_1)-g(x_2)>0$,$g(x_1)>g(x_2)$。

故 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(0,3]$ 上是减函数。

### 题组B 高考通关测试 正文 P65

1 C 【解析】A 和 D 中的函数在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,B 中的函数在 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 上是减函数,在 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上是增函数,C 符合题意,故选 C。

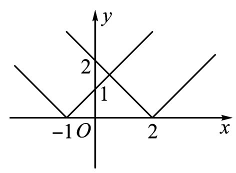
2 D 【解析】①当 $a=0$ 时,$f(x)=2x-1$,在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,满足题意;②当 $a\neq0$ 时,因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,6)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases}a<0,\\-\dfrac{2}{2a}\geqslant6\end{cases}\Rightarrow-\dfrac{1}{6}\leqslant a<0$。综上,$a\in\left[-\dfrac{1}{6},0\right]$,故选 D。

3 C 【解析】依题意有 $\begin{cases}a-1>0,\\8-a>0,\\a-1+1\geqslant8-a+2\end{cases}\Rightarrow5\leqslant a<8$,故选 C。

4 A 【解析】函数 $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$,图像的对称轴为直线 $x=2$,$f(0)=f(4)=5$,$f(2)=1$。根据题意,函数 $f(x)=x^2-4x+5$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 5,最小值为 1,故实数 $m$ 的取值范围是 $[2,4]$。

5 D 【解析】由题意得 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{3}{2}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增,$y=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{3}{2x}$ 在区间 $(0,\sqrt{3}]$ 上单调递减,所以函数 $f(x)$ 的"缓增区间"$I$ 为 $[1,\sqrt{3}]$,选 D。

6 $\dfrac{3}{2}$ 【解析】作出函数 $y=|x+1|$ 和 $y=|x-2|$ 的图像,如图,由图可知 $f(x)=\begin{cases}2-x,x<\dfrac{1}{2},\\x+1,x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$。




第 6 题图

7 $(0,1]$ 【解析】函数 $f(x)$ 图像的对称轴为直线 $x=a$,在区间 $[1,2]$ 上是减函数,需满足 $a\leqslant1$;函数 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数,需满足 $a>0$,故 $a$ 的取值范围是 $(0,1]$。

8 $[0,1]$ 【解析】函数 $y=ax^2+2x+2a-1$。当 $a=0$ 时,$y=2x-1$ 为 $[-1,+\infty)$ 上的单调增函数,符合题意;当 $a\neq0$ 时,对称轴为直线 $x=-\dfrac{1}{a}$,若 $y=ax^2+2x+2a-1$ 为 $[-1,+\infty)$ 上的单调增函数,则 $\begin{cases}a>0,\\-\dfrac{1}{a}\leqslant-1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant1$。综上可知,$0\leqslant a\leqslant1$。

9 解:(1)令 $x_1=x_2>0$,代入条件得 $f(1)=f(x_1)-f(x_1)=0$,故 $f(1)=0$。

(2)任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1>x_2$,则 $\dfrac{x_1}{x_2}>1$。

因为当 $x>1$ 时,$f(x)<0$,

所以 $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)<0$,即 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)<0$,

因此 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数。

(3)因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数。

所以 $f(x)$ 在 $[2,9]$ 上的最小值为 $f(9)$。

又 $f\left(\dfrac{9}{3}\right)=f(9)-f(3)$,所以 $f(9)=2f(3)=-2$。

故 $f(x)$ 在 $[2,9]$ 上的最小值为 $-2$。

10 解:(1)$f(x)=\dfrac{4x^2-12x-3}{2x+1}=\dfrac{(2x+1)^2-8(2x+1)+4}{2x+1}=2x+1+\dfrac{4}{2x+1}-8$,令 $u=2x+1$,

因为 $x\in[0,1]$，所以 $u\in[1,3]$，

所以 $f(x)=h(u)=u+\dfrac{4}{u}-8,u\in[1,3]$。

由已知条件所给出的性质得，

当 $u\in[1,2]$ 时，$h(u)$ 递减；

当 $u\in[2,3]$ 时，$h(u)$ 递增。

由 $h(1)=-3,h(2)=-4,h(3)=-\dfrac{11}{3}$，得 $-4\leqslant h(u)\leqslant -3$，

即 $f(x)$ 的值域是 $[-4,-3]$。

(2) $g(x)=-x+2a$ 为减函数，

故当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)\in[-1+2a,2a]$，

对任意 $x_1\in[0,1]$，总存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立等价于 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 的值域的子集，即 $[-4,-3]\subseteq[-1+2a,2a]$，则 $\begin{cases}-1+2a\leqslant -4,\\2a\geqslant -3,\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2}$。

## 2.1.4 函数的奇偶性
## 2.1.5 用计算机作函数的图像(选学)(略)

**变式题型**

**变式1** 解：因为 $y=f(x),x\in(-1,1)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$。又因为 $f(1-x)+f(1-3x)<0$，

所以 $f(1-x)<-f(1-3x)$，即 $f(1-x)<f(3x-1)$。

又因为 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数，

所以 $\begin{cases}-1<1-x<1,\\-1<3x-1<1,\\1-x>3x-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0<x<2,\\0<x<\dfrac{2}{3},\\x<\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $0<x<\dfrac{1}{2}$。

故不等式的解集为 $\left\{x\,|\,0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$。

**变式2** 解：因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,-1]$ 上是单调减函数，所以 $f(-1)<f(-2)<f(-3)$。又函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，即 $f(-1)=f(1),f(-2)=f(2)$，所以 $f(1)<f(2)<f(-3)$。

**题组A 学考通关测试** 正文 P74

1 C 【解析】因为 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-a)=-f(a)$。故选 C。

2 C 【解析】因为 $x\neq 0$，所以 $f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{(-x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数。故选 C。

3 B 【解析】选项 A 中的图像关于原点和 $y$ 轴均不对称，既不是奇函数也不是偶函数，故 A 错误；选项 C，D 中的图像表示的函数的定义域关于原点不对称，不具有奇偶性，故 C，D 错误；选项 B 中的图像关于 $y$ 轴对称，其表示的函数是偶函数，故 B 正确。故选 B。

4 A 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-\pi)=f(\pi)$，$f(-1)=f(1)$。因为 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上单调递减，所以 $f(1)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>f(\pi)$，所以 $f(-1)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>f(-\pi)$。故选 A。

5 0 1 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以其定义域关于原点对称，故 $-\dfrac{b}{2}+1-\dfrac{b}{2}=0$，得 $b=1$。由 $f(x)$ 为偶函数，得 $f(-x)=f(x)$，所以 $a=0$。

6 $\dfrac{5}{2}$ 【解析】令 $x=-1$，得 $f(1)=f(-1)+f(2)=-f(1)+f(2)$。故 $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+f(2)$，则 $f(2)=1$。令 $x=1$，得 $f(3)=f(1)+f(2)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$。令 $x=3$，得 $f(5)=f(3)+f(2)=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$。

7 解：(1) 因为 $f(1)=3$，即 $1+m=3$，所以 $m=2$。

(2) 由(1)知，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，

其定义域是 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，关于坐标原点对称，

又 $f(-x)=-x+\dfrac{2}{-x}=-\left(x+\dfrac{2}{x}\right)=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是奇函数。

8 解：分段函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称。

①当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=-\dfrac{1}{2}(-x)^2-1=-\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)=-f(x)$；

②当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=\dfrac{1}{2}(-x)^2+1=\dfrac{1}{2}x^2+1=-\left(-\dfrac{1}{2}x^2-1\right)=-f(x)$。

综上所述，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上总有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数。

**题组B 高考通关测试** 正文 P74

1 B 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数且定义域为 $[3a-4,a]$，所以 $3a-4+a=0$，所以 $a=1$，所以 $f(0)=a-b=0$，所以 $b=1$，所以 $f(x)=x^3+2x$，所以 $f(1)=3$。故选 B。

2 B 【解析】A 为偶函数；C、D 为奇函数，故选 B。

3 A 【解析】依题意可得 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $f(x)>f(2x-1)$ 等价于 $f(|x|)>f(|2x-1|)$，所以 $|x|>|2x-1|$，解得 $x\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$。

4 B 【解析】因为 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，所以令 $x_1=x_2=0$，可得 $f(0)=0$，令 $x_1=-x_2$，则 $f(x_1)+f(-x_1)=f(0)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$。$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)<0$。所以 $f(x_2)<f(x_1)$，所以 $f(x)$ 为减函数，故选 B。

5 A 【解析】根据题意有 $f(-x)=f(x),g(-x)=-g(x)$，所以 $f(-x)+|g(-x)|=f(x)+|-g(x)|=f(x)+|g(x)|$，所以 $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数。同理，易知选项 C，D 中的函数既不是奇函数也不是偶函数，选项 B 中的函数是偶函数。

6 $\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{4}\right]$ 【解析】由偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$，可得 $f(x)=f(|x|)$，$f(2x-1)\geqslant 0$，即为 $f(|2x-1|)\geqslant 0=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$，即有 $|2x-1|\leqslant\dfrac{5}{2}$，可得 $-\dfrac{5}{2}\leqslant 2x-1\leqslant\dfrac{5}{2}$，解得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{4}$。则 $x$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{4}\right]$。

7 $-2$ 【解析】因为 $f(x-1)$ 为偶函数，所以 $f(x-1)=f(-x-1)$，所以 $f(0)=f(-2)=2$。又 $f(x+1)$ 为奇函数，所以 $f(x+1)=-f(-x+1)$，所以 $f(4)=-f(-2)=-2$。

8 $\begin{cases}x^2,-1\leqslant x\leqslant 1,\\0,x>1\text{ 或 }x<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x|,-1\leqslant x\leqslant 1,\\0,x>1\text{ 或 }x<-1。\end{cases}$

9 ①1 ② $\{t\,|\,t\leqslant -2$ 或 $t=0$ 或 $t\geqslant 2\}$ 【解析】①因为函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $[-1,1]$ 上为增函数，$f(-1)=-1$，所以 $f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 1。②若 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 都成立，则 $t^2-2at+1\geqslant f(x)_{\max}=1$，所以 $t^2-2at\geqslant 0$，令 $\varphi(a)=t^2-2at=(-2t)a+t^2$，则 $\varphi(a)\geqslant 0$ 在 $a\in$

$[-1,1]$上恒成立，所以$\varphi(1)\geqslant 0$，且$\varphi(-1)\geqslant 0$，解得$t\leqslant -2$或$t=0$或$t\geqslant 2$，故$t$的范围为$\{t|t\leqslant -2$或$t=0$或$t\geqslant 2\}$。

10 解：(1)因为函数$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，

所以$f(0)=b=0$。

由$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{5}$及$b=0$，得$a=1$。

故$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$。

(2)$f(x)$在$(-1,1)$上为增函数，证明如下：

设$x_1,x_2$是$(-1,1)$上的任意两个实数，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2}{1+x_2^2}=\dfrac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$。

因为$-1<x_1<x_2<1$，所以$x_1-x_2<0$，$-1<x_1x_2<1$，所以$1-x_1x_2>0$，又$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，

因为$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

所以$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数。

(3)$f(2x-1)+f(x)<0$，即$f(2x-1)<-f(x)$，由$f(x)$为奇函数得$f(2x-1)<f(-x)$，又$f(x)$在$(-1,1)$上单调递增，所以

$$\begin{cases}-1<2x-1<1,\\-1<-x<1,\\2x-1<-x,\end{cases}\quad 即\begin{cases}0<x<1,\\-1<x<1,\\x<\dfrac{1}{3},\end{cases}解得0<x<\frac{1}{3}。$$

所以原不等式的解集为$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$。

11 解：(1)令$x=y=0$，可得$f(0)+f(0)=f(0+0)$，得$f(0)=0$。

令$y=-x$，可得$f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)$，

即$f(x)=-f(-x)$，故$f(x)$为奇函数。

(2)设$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且$x_2>x_1$，则$x_2-x_1>0$，于是$f(x_2-x_1)<0$。

又$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)$，

所以$f(x_2)-f(x_1)<0$。

所以$f(x)$为$\mathbf{R}$上的减函数。

(3)由(2)知，函数$f(x)$在$[-3,6]$上的最大值为$f(-3)$，最小值为$f(6)$。

$f(-3)=-f(3)=-(f(2)+f(1))=-3f(1)=2$，

$f(6)=-f(-6)=-(f(-3)+f(-3))=-2f(-3)=-4$。

于是$f(x)$在$[-3,6]$上的最大值为2，最小值为$-4$。

## 2.2 一次函数和二次函数

### 变式题型

变式 解：(1)因为当$x\leqslant 1$时，$f(x)\geqslant 0$；当$1\leqslant x\leqslant 3$时，$f(x)\leqslant 0$，

所以$f(1)\geqslant 0$与$f(1)\leqslant 0$同时成立，

所以$f(1)=0$，所以$1+b+c=0$。所以$b+c=-1$。

(2)假设存在实数$m$，使满足条件的$g(x)$存在，

则$g(x)=x^2+bx+c-m^2x=x^2+(b-m^2)x+c$，

所以$g(x)$的图像开口向上，所以$g(x)$在区间$\left[\dfrac{m^2-b}{2},+\infty\right)$上单调递增。

因为$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上是单调函数，

所以$\dfrac{m^2-b}{2}\leqslant 0$，即$b\geqslant m^2\geqslant 0$。

又因为$c\geqslant 3$，所以$b=-c-1\leqslant -4$，这与$b\geqslant 0$矛盾，

所以满足题设的实数$m$不存在。

### 题组A 学考通关测试

正文 P86

1 C 【解析】方法一：若$a=2$，则函数$y=2x+1$在$[1,2]$上的最大值为5，最小值为3，满足题意；若$a=-2$，则函数$y=-2x+1$在$[1,2]$上的最大值为$-1$，最小值为$-3$，满足题意。故选C。

方法二：当$a>0$时，函数$y=ax+1$是增函数，在$[1,2]$上的最大值为$2a+1$，最小值为$a+1$，由题意知$2a+1-(a+1)=a=2$；当$a<0$时，函数$y=ax+1$是减函数，在$[1,2]$上的最大值为$a+1$，最小值为$2a+1$，由题意得$a+1-(2a+1)=-a=2$，所以$a=-2$。故选C。

2 A 【解析】二次函数$f(x)=x^2+mx+1$的图像的对称轴为直线$x=-\dfrac{m}{2}$，所以$-\dfrac{m}{2}=1$，解得$m=-2$。

3 C 【解析】由$b<0$可知$y=ax+b$的纵截距小于0，排除B，D；A中抛物线开口向下，$a<0$，而由直线却得出$a>0$，从而排除A，应选C。

4 B 【解析】易知$a\neq 0$，若$a>0$，则函数$f(x)=ax^2-2x+1$的图像开口向上，对称轴为直线$x=-\dfrac{-2}{2a}=\dfrac{1}{a}$，要使$f(x)$在区间$[1,2]$上为增函数，则需$\begin{cases}a>0,\\\dfrac{1}{a}\leqslant 1。\end{cases}$

若$a<0$，则函数$f(x)$的图像开口向下，要使$f(x)$在区间$[1,2]$上为增函数，则需$\dfrac{1}{a}\geqslant 2$，显然不可能。综上，可推得函数$f(x)=ax^2-2x+1$在区间$[1,2]$上为增函数的一个条件是$\begin{cases}a>0,\\\dfrac{1}{a}<1。\end{cases}$

5 $(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$ 【解析】由题意知，$f(x)=4x^2-kx-8$在$[5,20]$上是单调函数，所以$\dfrac{k}{8}\geqslant 20$或$\dfrac{k}{8}\leqslant 5$，解得$k\geqslant 160$或$k\leqslant 40$。故$k$的取值范围为$(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$。

6 $(1,3]$ 【解析】函数$f(x)=x^2-6x+8$的图像的对称轴为直线$x=3$，根据函数的单调性有$a\leqslant 3$。又$a>1$，所以$1<a\leqslant 3$。

7 解：(1)当$a=-1$时，$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$。因为$x\in[-5,5]$，故当$x=1$时，$f(x)$的最小值为1。当$x=-5$时，$f(x)$的最大值为37。

(2)函数$f(x)=(x+a)^2+2-a^2$的图像的对称轴为直线$x=-a$。因为$f(x)$在$[-5,5]$上是单调的，故$-a\leqslant -5$或$-a\geqslant 5$。

即实数$a$的取值范围是$(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$。

### 题组B 高考通关测试

正文 P86

1 C 【解析】由题意得$2a+1=-1$，解得$a=-1$，则函数的解析式为$f(x)=-x+1$，所以$f(-2)=-1\times(-2)+1=3$。故选C。

2 D 【解析】由题意可知二次函数图像的对称轴为直线$x=-\dfrac{m}{2}=-1$，所以$m=2$，所以$f(-1)=1-2+1=0$，最小值为0。

3 C 【解析】由题中函数图像可知$a>0$，$0<-\dfrac{b}{2a}<1$，$c=-2$，$f(-1)>0$，$f(1)<0$，整理化简得$b<0$，$2a+b>0$，$a-b+c>0$，$a+b+c<0$，由此可知结论①错误，其余4个正确。

4 B 【解析】令$g(a)=x^2+(a-4)x+4-2a=(x-2)a+x^2-4x+4$，因为对任意$a\in[-1,1]$，函数$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$的值恒大于零，则$\begin{cases}g(-1)=x^2-5x+6>0,\\g(1)=x^2-3x+2>0,\end{cases}$解得$x<1$或$x>3$。

5 C 【解析】由题意可得$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1,\\a-b+1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\b=-4,\end{cases}$故选C。

6 $a<-1$ 【解析】$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，则$x^2+2x-a>0$在$\mathbf{R}$上恒成立。

解法一：令$g(x)=x^2+2x-a$，则$g(x)=(x+1)^2-1-a>0$在$\mathbf{R}$上恒成立，只需$g(x)_{\min}=-1-a>0$，解得$a<-1$。

解法二：$x^2+2x-a>0\Rightarrow a<x^2+2x=(x+1)^2-1$，而$(x+1)^2-1\geqslant -1$，所以$a<-1$。

7 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{4}$ 【解析】二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有最小值，则 $a>0$。$f(1-x)=f(1)+f(x)$，即 $a(1-x)^2+b(1-x)+c=a+b+c+ax^2+bx+c$，即 $2(a+b)x=-c$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $a+b=0$ 且 $c=0$，所以 $f(x)$ 图像的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$。因为 $f(x)$ 在 $[2m,m+1]$ 上不单调，则 $2m<\frac{1}{2}<m+1$，所以 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{4}$。

8 $(1,2]$ 【解析】因为 $0<\frac{1}{a}<a$，所以 $a>1$。由题意可知 $\frac{1}{2a}\leqslant f(x)\leqslant 2a$ 恒成立，因为 $f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2>\frac{3}{4}>\frac{1}{2}>\frac{1}{2a}$，所以 $f(x)_{\max}\leqslant 2a$ 即可。因为函数 $f(x)$ 图像的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}-\frac{1}{a}<a-\frac{a}{2}$，所以 $x=a$ 时，$f(x)$ 取得最大值，即 $f(a)=a^2-a^2+a^2\leqslant 2a$，解得 $0\leqslant a\leqslant 2$。综上，可得 $1<a\leqslant 2$。

9 解：(1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$。
因为 $x\in[-4,6]$，所以 $f(x)$ 在区间 $[-4,2]$ 上是减函数，在区间 $[2,6]$ 上是增函数。所以 $f(x)$ 的最小值是 $f(2)=-1$。
又因为 $f(-4)=35$，$f(6)=15$，所以 $f(x)$ 的最大值是 35。
(2) 因为函数 $f(x)=x^2+2ax+3$ 的图像开口向上，对称轴是直线 $x=-a$，所以要使 $f(x)$ 在区间 $[-4,6]$ 上是单调函数，
应有 $-a\leqslant -4$ 或 $-a\geqslant 6$。解得 $a\leqslant -6$ 或 $a\geqslant 4$，
所以实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[4,+\infty)$。
(3) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2+2x+3$，
所以 $f(|x|)=x^2+2|x|+3$，定义域为 $[-6,6]$，
所以 $f(|x|)=\begin{cases}x^2+2x+3, x\in(0,6],\\ x^2-2x+3, x\in[-6,0],\end{cases}$
所以 $f(|x|)$ 的单调递增区间是 $(0,6]$，单调递减区间是 $[-6,0]$。

10 解：(1) 证明：原问题可化为证明 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant 0$ 对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 恒成立，
因为 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{a(x_1-x_2)^2}{4}\geqslant 0$，
所以原不等式成立。
(2) 由题意得 $-1\leqslant ax^2+x\leqslant 1$ 对任意 $x\in(0,2]$ 恒成立，
即 $\frac{-1-x}{x^2}\leqslant a\leqslant\frac{1-x}{x^2}$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，
即 $-\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}$ 对任意 $x\in(0,2]$ 恒成立。
易求得 $-\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}$ 的最大值为 $-\frac{3}{4}$，
$\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}$ 的最小值为 $-\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{4}$。
(3) 由题意得 $\frac{1}{4}m^2+m=n^2$，即 $(m+2)^2-4n^2=4$，即 $(m+2-2n)(m+2+2n)=4$。
因为 $(m+2-2n)+(m+2+2n)=2m+4$ 为偶数，
所以 $m+2-2n$，$m+2+2n$ 同奇同偶，
所以 $\begin{cases}m+2-2n=2,\\ m+2+2n=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+2-2n=-2,\\ m+2+2n=-2,\end{cases}$
得 $\begin{cases}m=0,\\ n=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-4,\\ n=0。\end{cases}$

## 2.3 函数的应用(Ⅰ)

### 变式题型

变式 解：(1) 由题意知空闲率为 $\frac{m-x}{m}$，所以 $y=kx\cdot\frac{m-x}{m}(0\leqslant x<m)$。
(2) $y=kx\cdot\frac{m-x}{m}=-\frac{k}{m}x^2+kx=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{mk}{4}$，
所以当 $x=\frac{m}{2}$ 时，$y$ 取得最大值 $\frac{mk}{4}$。

### 题组A 学考通关测试 正文 P94

1 B 【解析】$y=0.2+0.1\times([x]-3)$（$[x]$ 是不小于 $x$ 的最小整数，$x>0$），令 $x=\frac{550}{60}$，故 $[x]=10$，则 $y=0.9$。

2 C 【解析】当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时，$4\leqslant y\leqslant 40$，不符合题意；当 $x>100$ 时，$y>150$，不符合题意。因此 $10<x\leqslant 100$，由 $2x+10=60$，得 $x=25$。

3 B 【解析】设函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，函数图像过点 $(1,800)$，$(2,1\,300)$，则 $\begin{cases}k+b=800,\\ 2k+b=1\,300,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=500,\\ b=300,\end{cases}$ 所以 $y=500x+300$，当 $x=0$ 时，$y=300$。故营销人员没有销售量时的收入是 300 元。

4 D 【解析】由题意可知，1 460 = 1 400 + 20 + 40，1 400 元现金可送 280 元购物券，把 280 元购物券当作现金加上 20 元现金可送 60 元购物券，再把 60 元购物券当作现金加上 40 元现金可送 20 元购物券，所以最多可获赠购物券 280 + 60 + 20 = 360(元)。

5 2 500 【解析】设围成矩形的宽为 $x$ m，则长为 $(200-4x)$m，故矩形面积 $S=x(200-4x)=-4(x-25)^2+2\,500\ (0<x<50)$，所以当 $x=25$ 时，$S$ 取得最大值，为 2 500 $\mathrm{m}^2$。

6 16.3 【解析】当 $x=40$ 时，汽车从甲地到乙地的行驶时间为 $\frac{100}{40}=2.5$（小时），所以耗油量为 $\left(\frac{1}{128\,000}\times 40^2-\frac{3}{80}\times 40+8\right)\times 2.5\approx 16.3$（升）。

7 解：设日销售金额为 $y$（元），则 $y=p\cdot Q$。
所以 $y=\begin{cases}-t^2+20t+800, 0<t<25, t\in\mathbf{N},\\ t^2-140t+4\,000, 25\leqslant t\leqslant 30, t\in\mathbf{N}\end{cases}$
$=\begin{cases}-(t-10)^2+900, 0<t<25, t\in\mathbf{N},\\ (t-70)^2-900, 25\leqslant t\leqslant 30, t\in\mathbf{N}。\end{cases}$
当 $0<t<25$，$t\in\mathbf{N}$ 时，$y_{\max}=900$（元），此时 $t=10$；
当 $25\leqslant t\leqslant 30$，$t\in\mathbf{N}$ 时，$y_{\max}=1\,125$（元），此时 $t=25$。
由 1 125 > 900，知 $y_{\max}=1\,125$（元），故第 25 天，日销售金额最大。

### 题组B 高考通关测试 正文 P94

1 C 【解析】设 $f(a)$ 为 $a$ 与其前三个月的市场收购价格之差的平方和，由题意得 $f(a)=(a-71)^2+(a-72)^2+(a-70)^2=3(a-71)^2+2$，当 $a=71$ 时，$f(a)$ 最小。所以 7 月份该产品的市场收购价格为 71 元。故选 C。

2 B 【解析】蜡烛剩下的长度随时间增长而缩短，根据实际意义知不可能是 D，应用一次函数结合实际意义，$t=4$ 时，$h=0$。故选 B。

3 B 【解析】设司机甲每次的加油量为 $x$，司机乙每次的加油花费为 $y$，两次加油的单价分别为 $a$，$b$，则司机甲两次加油的均价为 $\frac{ax+bx}{2x}=\frac{a+b}{2}$，司机乙两次加油的均价为 $\frac{2y}{\frac{y}{a}+\frac{y}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$。
因为 $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqslant 0$，又因为 $a\neq b$，所以 $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}>0$，即 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$。故这两次加油的均价司机乙的较低，故乙更合适，故选 B。

4 D 【解析】设每桶水的销售单价为 $(6+x)$ 元，公司日利润为 $y$ 元，则 $y=(6+x-5)(480-40x)-200=-40x^2+440x+280$。

因为 $-40<0$,所以当 $x=-\frac{b}{2a}=5.5$ 时函数有最大值,因此,每桶水的销售单价为 11.5 元时,公司的日利润最大。故选 D。

5 D 【解析】设汽车经过 $t$ s 行驶的路程为 $s$ m,则 $s=\frac{1}{2}t^2$,车与人的间距 $d=(s+25)-6t=\frac{1}{2}t^2-6t+25=\frac{1}{2}(t-6)^2+7$,当 $t=6$ 时,$d$ 取得最小值 7,故选 D。

6 ②③ 【解析】根据题意和图(2)知,两直线平行即票价不变,直线向上平移说明当乘客量为 0 时,收入是 0 但是支出变少了,即说明了此建议是降低成本而保持票价不变,故②正确;由图(3)看出,当乘客量为 0 时,支出不变,但是直线的倾斜角变大,即相同的乘客量时收入变大,即票价提高了,即说明了此建议是提高票价而保持成本不变,故③正确。

7 400 【解析】设每天从报社买进 $x(250\leqslant x\leqslant 400,x\in\mathbf{N})$ 份报纸时,每月所获利润为 $y$ 元,具体情况如下表。

| | 数量/份 | 单价/元 | 金额/元 |
|---|---|---|---|
| 买进 | $30x$ | 2 | $60x$ |
| 卖出 | $20x+10\times250$ | 3 | $60x+7\ 500$ |
| 退回 | $10(x-250)$ | 0.8 | $8x-2\ 000$ |

$y=[(60x+7\ 500)+(8x-2\ 000)]-60x=8x+5\ 500(250\leqslant x\leqslant 400,x\in\mathbf{N})$。因为 $y=8x+5\ 500$ 在 $[250,400]$ 上是增函数,所以当 $x=400$ 时,$y$ 取得最大值 8 700。即每天从报社买进 400 份报纸时,每月获得的利润最大,最大利润为 8 700 元。

8 0.5 【解析】若以距离小明较近的那棵树的树根为原点、以水平线为 $x$ 轴建立平面直角坐标系,则抛物线的对称轴为 $x=1$,设抛物线方程为 $y=ax^2-2ax+2.5$。当 $x=0.5$ 时,$y=0.25a-a+2.5=1$,所以 $a=2$,$y=2(x-1)^2+0.5$,所以绳子的最低点距地面的高度为 0.5 m。

9 4 【解析】设用热水器 $x$ min,则水箱内的水量 $y=200+2x^2-34x=2\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{111}{2}$,所以当 $x=\frac{17}{2}$ 时,$y$ 有最小值,此时共放水 $34\times\frac{17}{2}=289$ L。因为每人洗浴用水 65 L,所以至多可供 4 人洗澡。

10 解:(1)依题意,生产 $x$ 辆新样式单车的总成本为 $(20\ 000+100x)$ 元,则 $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+300x-20\ 000,0<x\leqslant 400\text{ 且 }x\in\mathbf{N},\\60\ 000-100x,x>400\text{ 且 }x\in\mathbf{N}。\end{cases}$

(2)当 $0<x\leqslant 400$ 时,$y=-\frac{1}{2}(x-300)^2+25\ 000$,

则当 $x=300$ 时,$y_{\max}=25\ 000$;

当 $x>400$ 时,$y=60\ 000-100x$ 是减函数,

则 $y<60\ 000-100\times400=20\ 000$,

所以当月产量为 300 辆时,自行车厂生产新样式单车的利润最大,最大利润为 25 000 元。

11 解:(1)$f(t)=\begin{cases}2t(0\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{Z}),\\-6t+240(30<t\leqslant 40,t\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

$g(t)=\begin{cases}3t(0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{Z}),\\-\frac{3}{20}t^2+6t(20<t\leqslant 40,t\in\mathbf{Z})。\end{cases}$

(2)由题意得 $y=\begin{cases}3t(0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{Z}),\\60(20<t\leqslant 40,t\in\mathbf{Z})。\end{cases}$

设这家公司的日销售利润为 $Q(t)$(万元),则

$Q(t)=y[f(t)+g(t)]=\begin{cases}15t^2(0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{Z}),\\-9t^2+480t(20<t\leqslant 30,t\in\mathbf{Z}),\\-9t^2+14\ 400(30<t\leqslant 40,t\in\mathbf{Z})。\end{cases}$

①当 $0\leqslant t\leqslant 20$ 时 $Q(t)$ 在区间 $[0,20]$ 上单调递增,从而 $Q(t)\leqslant Q(20)=6\ 000<6\ 300$;

②当 $20<t\leqslant 30$ 时,若 $Q(t)>6\ 300$,

则 $-9t^2+480t-6\ 300>0$,

令 $h=-9t^2+480t-6\ 300=-9\left(t-\frac{70}{3}\right)(t-30)$,由其图像可得当 $\frac{70}{3}<t<30$ 时,$h>0$,即 $Q(t)>6\ 300$,又 $t\in\mathbf{Z}$,所以当 $t=24,25,26,27,28,29$ 时,能使 $Q(t)>6\ 300$;

③当 $30<t\leqslant 40$ 时,$Q(t)$ 在区间 $(30,40]$ 上单调递减,从而 $Q(t)<Q(30)=6\ 300$。

综上所述,在第一批产品 $A$ 上市后的第 24,25,26,27,28,29 天,公司的日销售利润能超过 6 300 万元。

## 2.4 函数与方程

### 2.4.1 函数的零点

变式题型

变式 【解析】分别令 $y=0$,求出相应方程的根,即为函数的零点。

解:(1)令 $y=0$,即 $-x^2-x+20=0$,

解得 $x_1=-5,x_2=4$。

故所求函数的零点为 $-5,4$。

(2)令 $y=0$,即 $(x^2-2)(x^2-3x+2)=0$,解得 $x_1=-\sqrt{2},x_2=\sqrt{2},x_3=1,x_4=2$。

故所求函数的零点为 $-\sqrt{2},\sqrt{2},1,2$。

题组A 学考通关测试 正文 P102

1 C 【解析】因为函数 $f(x)=ax+b$ 有一个零点 2,所以 $2a+b=0$,即 $b=-2a,a\neq0$,则方程 $bx^2-ax=0$ 可化为 $-2ax^2-ax=0$,解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=0$,故函数 $g(x)=bx^2-ax$ 的零点是 $0,-\frac{1}{2}$,则函数 $g(x)=bx^2-ax$ 的图像可能是 C。

2 C 【解析】依题意可知 $f(x)$ 在 $[1,2\ 019]$ 上单调递增。故 $f(x)$ 在 $[1,2\ 019]$ 上至多有 1 个零点。故选 C。

3 C 【解析】函数 $y=2x^2-4x-3$ 为二次函数,且方程 $2x^2-4x-3=0$ 的判别式 $\Delta=(-4)^2-4\times2\times(-3)>0$,所以方程 $2x^2-4x-3=0$ 有两个不相等的实数根,即函数 $y=2x^2-4x-3$ 有两个零点。

4 D 【解析】选项 A 中的区间显然不符合题意,故排除。因为 $f(0)=-3<0,f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{127}{64}<0,f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}<0,f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}>0$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)<0$。又函数 $f(x)=x^3+4x-3$ 的图像在定义域 $\mathbf{R}$ 上是连续不断的,所以由零点的存在性定理知函数 $f(x)=x^3+4x-3$ 的正零点所在的区间为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$。

5 2 【解析】由表可知函数 $f(x)$ 的零点至少有一个在 $(2,3)$ 内,一个在 $(3,4)$ 内。

6 $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $f(x)=\frac{x-1}{x}$,所以 $g(x)=f(4x)-x=\frac{4x-1}{4x}-x$,令 $g(x)=0$,即 $\frac{4x-1}{4x}-x=0$,解得 $x=\frac{1}{2}$。

7 解:①若 $a=0$ 时,$f(x)=-x-1$ 的零点为 $-1$;

②若 $a\neq0,\Delta=1+4a=0$,即 $a=-\frac{1}{4}$ 时,$f(x)=-\frac{1}{4}x^2-x-1=-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 的零点为 $-2$;

③若 $a\neq0,\Delta=1+4a>0$,即 $a>-\frac{1}{4}$ 且 $a\neq0$ 时,$f(x)=ax^2-x-1=0$ 有两个不同的实数根,即 $f(x)$ 有两个零点;

④若 $a\neq0$，$\Delta=1+4a<0$，即 $a<-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 没有零点。

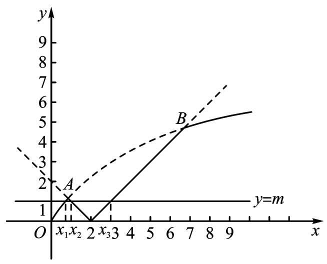
综上所述，$a=0$ 与 $a=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点，当 $a>-\frac{1}{4}$ 且 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 有两个零点，当 $a<-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 无零点。

## 题组B 高考通关测试

正文 P102

1 D 【解析】因为 $f(x)=x^3+2x-5$ 是单调递增的连续不断的函数，且 $f(1)=-2<0$，$f(2)=8+4-5=7>0$，所以由零点存在性定理可得零点在 $(1,2)$ 内。故选 D。

2 C 【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 的图像如下：




第 2 题图

其中 $A(4-2\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$，$B(4+2\sqrt{3},2+2\sqrt{3})$，动直线 $y=m$ 与函数 $f(x)$ 的图像有 3 个交点，由图可知 $0<m<2\sqrt{3}-2$。因为 $x_2$ 与 $x_3$ 关于 $x=2$ 对称，所以 $x_2+x_3=4$，又因为 $0<x_1<4-2\sqrt{3}$，所以 $x_1+x_2+x_3\in(4,8-2\sqrt{3})$。故选 C。

3 B 【解析】依题意有 $f(x)$ 的图像与 $g(x)$ 的图像有 2 个不同的交点，且 $f(x)$ 的图像过点 $(0,2)$。当 $a=0$ 时，$f(x)=2-x$，此时 $g(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像仅有 1 个交点，舍去。
当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的图像是开口向下且过点 $(0,2)$ 的抛物线，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像一定有 2 个不同的交点。
当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的图像是开口向上且恒过点 $(0,2)$，对称轴为直线 $x=\frac{1}{2a}>0$ 的抛物线。当 $f(x)=ax^2-x+2$ 与 $g(x)=x$ 的图像相切时，可求得 $a=\frac{1}{2}$。要使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有 2 个不同的交点，只需 $0<a<\frac{1}{2}$。综上，$a$ 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$。故选 B。

4 C 【解析】方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个实根 1，2，则 $\begin{cases}1+2=-\frac{b}{a},\\1\times2=\frac{c}{a},\end{cases}$ 所以 $\frac{b}{a}=-3$，$\frac{c}{a}=2$，于是 $f(x)=cx^2+bx+a=a\left(\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1\right)=a(2x^2-3x+1)=a(x-1)(2x-1)$，所以函数 $f(x)$ 的零点是 $1,\frac{1}{2}$，故选 C。

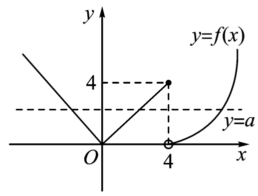
5 A 【解析】由题意可得函数 $y=f(x)-g(x)=x^2-5x+4-m$ 在 $[0,3]$ 上有两个不同的零点，函数图像的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$，所以函数的最小值为 $-\frac{9}{4}-m$。当 $x=0$ 时，$y=4-m$，当 $x=3$ 时，$y=-2-m<4-m$，所以 $-\frac{9}{4}-m<0\leqslant-2-m$，解得 $-\frac{9}{4}<m\leqslant-2$，故选 A。

6 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$ 【解析】由题知 $f(-1)\cdot f(1)<0$，即 $(-5a+1)(a+1)<0$，$(5a-1)(a+1)>0$，解得 $a>\frac{1}{5}$ 或 $a<-1$。

7 $(0,3)$ 【解析】当 $m=0$ 时，$f(x)=-6$ 无零点，不合题意，舍；
当 $m>0$ 时，由于 $f(0)=-6$，结合图像知 $f(2)<0$，即 $2m-6<0$，故 $0<m<3$；
当 $m<0$ 时，由于 $f(0)=-6$ 且对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，结合图像知 $f(2)>0$，即 $2m-6>0$，$m$ 无解，综上所述，$0<m<3$。

8 1 【解析】依题意得 $f(1)=0$，即 $a+1-2a=0$，解得 $a=1$。

9 $(0,4]$ 【解析】作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示，由图形知，$f(x)=a$ 恰有三个不同实数解时，$a$ 的取值范围是 $0<a\leqslant4$。




第 9 题图

10 解：(1)若 $a=-1$，则 $f(x)=-x^2+2x-1$，
由 $f(x)=-x^2+2x-1=0$，得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，故当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 的零点是 1。
(2)已知函数 $f(x)=ax^2+2x-2-a$，且 $a\leqslant0$，
①当 $a=0$ 时，$f(x)=2x-2$，由 $2x-2=0$，得 $x=1$，且 $1\in(0,1]$，符合题意。
②当 $a<0$ 时，由 $f(x)=ax^2+2x-2-a$，易得 $f(1)=0$，所以 $f(x)=0$ 必有一个零点 $1\in(0,1]$。
设另一个零点为 $x_0$，则 $x_0\cdot1=\frac{-2-a}{a}$，
即 $x_0=\frac{-2-a}{a}=-\frac{2}{a}-1$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上恰有一个零点。从而 $x_0\leqslant0$ 或 $x_0\geqslant1$，即 $-\frac{2}{a}-1\leqslant0$ 或 $-\frac{2}{a}-1\geqslant1$，
解得 $a\leqslant-2$ 或 $-1\leqslant a<0$。
综合①②得，$a$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[-1,0]$。

11 解：(1)因为方程 $x^2-2ax+4=0$ 的两根均大于 1，结合二次函数的单调性与零点存在性定理得 $\begin{cases}(-2a)^2-16\geqslant0,\\f(1)=5-2a>0,\\a>1,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a<\frac{5}{2}$。所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left[2,\frac{5}{2}\right)$。
(2)因为方程 $x^2-2ax+4=0$ 的一个根大于 1，一个根小于 1，结合二次函数的单调性与零点存在性定理得 $f(1)=5-2a<0$，解得 $a>\frac{5}{2}$。所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$。
(3)因为方程 $x^2-2ax+4=0$ 的一个根在 $(0,1)$ 内，另一个根在 $(6,8)$ 内，结合二次函数的单调性与零点存在性定理得
$\begin{cases}f(0)=4>0,\\f(1)=5-2a<0,\\f(6)=40-12a<0,\\f(8)=68-16a>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{10}{3}<a<\frac{17}{4}$。
所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{10}{3},\frac{17}{4}\right)$。

## 2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法

### 变式题型

变式 1 B 【解析】由 $f(a)\cdot f(b)<0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，可知 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$，根据零点的存在性定理，可知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上有零点。

变式 2 【解析】求方程的近似解，即求相应函数的近似零点，可先确定零点所在的大致区间，再用二分法求解。

解：令 $f(x)=x^2-2x-1$，则方程 $x^2-2x-1=0$ 的正实数解的近似值即为函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的正零点的近似值。

由于 $f(2)=-1<0, f(3)=2>0$，所以可取区间 $[2,3]$ 作为计算的初始区间，用二分法逐步计算，列表如下：

| 端点或中点横坐标 | 计算端点或中点的函数值 | 定区间 |
|---|---|---|
| $a_0=2, b_0=3$ | $f(2)=-1, f(3)=2$ | $[2,3]$ |
| $x_0=\frac{2+3}{2}=2.5$ | $f(x_0)=0.25>0$ | $[2,2.5]$ |
| $x_1=\frac{2+2.5}{2}=2.25$ | $f(x_1)=-0.4375<0$ | $[2.25,2.5]$ |
| $x_2=\frac{2.25+2.5}{2}=2.375$ | $f(x_2)\approx-0.1094<0$ | $[2.375,2.5]$ |
| $x_3=\frac{2.375+2.5}{2}=2.4375$ | $f(x_3)\approx0.0664>0$ | $[2.375,2.4375]$ |
| $x_4=\frac{2.375+2.4375}{2}=2.40625$ | $f(x_4)\approx-0.0225<0$ | $[2.40625,2.4375]$ |

由上表的计算可知，区间 $[2.40625,2.4375]$ 的长度为 $0.03125<0.1$，且区间端点精确到 0.1 的近似值都是 2.4，因此可以取 2.4 作为所求函数的一个正零点的近似值，即所求方程的一个正数解的近似值为 2.4。

## 题组A 学考通关测试

正文 P107

1 D【解析】由题图可知，函数零点的个数为 4，由函数零点存在性定理知，能用二分法求解的零点必须满足函数图像通过零点时穿过 $x$ 轴，所以有一个零点不能用二分法求解，即能用二分法求解的零点有 3 个。

2 C【解析】因为 $f(1)=-2<0, f(2)=3>0, f(1.5)=-0.625<0$，所以下一个有零点的区间是 $(1.5,2)$。

3 B【解析】由 $f(1.25)<0, f(1.5)>0$，得 $f(1.25)\cdot f(1.5)<0$，易知函数 $f(x)$ 的图像是连续不断的，根据零点的存在性定理可知，函数 $f(x)$ 的一个零点 $x_0\in[1.25,1.5]$，即方程 $x^3+3x-7=0$ 的根落在区间 $[1.25,1.5]$ 上。

4 $[2,2.5]$【解析】令 $f(x)=x^3-2x-5$，由于 $f(2)=-1<0$，$f(3)=16>0$，而 $f(2.5)=5.625>0$，根据二分法的步骤可知，方程 $x^3-2x-5=0$ 的下一个有根区间是 $[2,2.5]$。

5 $(2,3)$【解析】利用零点存在性定理可知，函数在区间 $(2,3)$ 上有零点，所以 $x_0\in(2,3)$。

6 解：设函数 $f(x)=x^3-x-1$，因为 $f(1)=-1<0, f(1.5)=0.875>0$，所以 $f(1)\cdot f(1.5)<0$，

又函数 $y=f(x)$ 的图像是不间断的，

所以方程 $x^3-x-1=0$ 在区间 $[1,1.5]$ 上有实数根。

用二分法逐步计算，列表如下：

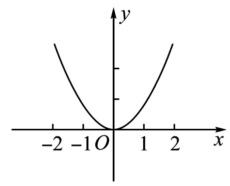
| 端点或中点横坐标 | 计算端点或中点的函数值 | 定区间 |
|---|---|---|
| $a_0=1$, $b_0=1.5$ | $f(1)=-1$, $f(1.5)=0.875$ | $[1,1.5]$ |
| $x_0=1.25$ | $f(x_0)\approx-0.297<0$ | $[1.25,1.5]$ |
| $x_1=1.375$ | $f(x_1)\approx0.225>0$ | $[1.25,1.375]$ |
| $x_2=1.3125$ | $f(x_2)\approx-0.052<0$ | $[1.3125,1.375]$ |
| $x_3=1.34375$ | $f(x_3)\approx0.083>0$ | $[1.3125,1.34375]$ |

由上表的计算可知，区间 $[1.3125,1.34375]$ 的左、右端点精确到 0.1 所取的近似值都是 1.3，因此 1.3 就是方程在区间 $[1,1.5]$ 上的一个近似解。

## 题组B 高考通关测试

正文 P108

1 D【解析】依题意 $f(x)=0$ 在 $[-2,2]$ 上仅有一个实数根 0，但不一定有 $f(-1)\cdot f(1)<0$，也可能是 $f(-1)\cdot f(1)>0$，如图。




第 1 题图

2 B【解析】$b-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$，因此误差最大不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$。

3 D

4 C【解析】函数零点存在的区间端点处的函数值异号，由对应值表可得 C 正确。

5 C【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 至少有一个零点。

6 ②③【解析】零点有变号零点与不变号零点，故①不正确；二分法针对的是连续不断的函数的变号零点，故④不正确；由零点的性质知②③都正确。

7 3【解析】由题表可知，$f(2)f(3)<0, f(3)f(4)<0, f(4)f(5)<0$，又函数 $f(x)$ 在 $[1,6]$ 上是不间断的，所以由零点的存在性定理，得函数 $y=f(x)$ 在区间 $[2,3],[3,4],[4,5]$ 上各至少存在一个零点，所以函数 $y=f(x)$ 在 $[1,6]$ 上至少存在 3 个零点。

8 0【解析】方程 $x^3+x-1=0$ 的解即是函数 $y=x^3+x-1$ 的零点，也就是函数 $y=x^3$ 与函数 $y=1-x$ 的图像的交点的横坐标，在同一坐标系中作出函数 $y=x^3$ 与 $y=1-x$ 的图像，由图可知函数图像交点的横坐标位于区间 $[0,1]$ 内，故 $n=0$。

9 $-1$ 或 $-0.8$【解析】令 $f(x)=2^x-x^2$，由表中的数据可得 $f(-1)<0, f(-0.6)>0, f(-0.8)<0, f(-0.4)>0$，

所以方程的根在区间 $(-0.8,-0.6)$ 内，

所以 $a=-1$ 或 $a=-0.8$。

10 解：(1) 若 $a=0$，则 $f(x)=-4$，与题意不符，所以 $a\neq0$。

由题意得 $f(-1)\cdot f(1)=8(a-1)(a-2)<0$，得 $1<a<2$。

故实数 $a$ 的取值范围为 $(1,2)$。

(2) 若 $a=\frac{32}{17}$，则 $f(x)=\frac{32}{17}x^3-\frac{64}{17}x+\frac{28}{17}$，

所以 $f(-1)=\frac{60}{17}>0, f(0)=\frac{28}{17}>0$，

$f(1)=-\frac{4}{17}<0$，所以函数零点在 $(0,1)$ 上，区间中点为 $\frac{1}{2}$，而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-1,1)$ 上的一个根为 $\frac{1}{2}$。

11 解：利用二分法，最多四次可以找出这枚假币。第一次把 26 枚金币分成两组，放在天平上称，天平一定不平衡，轻的一组（13 个金币）含假币；第二次把含假币的 13 个金币分成三组，每组金币数分别为 6,6,1。把 6 个金币的两组放在天平上称，如果平衡，说明剩下的 1 个是假币（称量结束）；如果不平衡，轻的一组（6 个金币）含假币；第三次把含假币的 6 个金币分成两组，放在天平上称，天平不平衡，轻的一组（3 个金币）含假币；第四次把含假币的 3 个金币中的两个放在天平上称，如果平衡，说明剩下的 1 个是假币；如果不平衡，轻的一个是假币。

# 第二章 单元复习方案

**测评·高考模拟卷** → 正文 P111

1 C【解析】根据函数的定义可知，$y=f(x)$图像与$x=a$的图像有0个或1个公共点。故选C

2 D【解析】依题意得$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$解得$x\geqslant 1$且$x\neq 2$。

3 A【解析】函数$y=f(x+a)$是把函数$y=f(x)$的图像向左($a>0$)平移了$a$个单位长度，或向右($a<0$)平移了$|a|$个单位长度，所以函数的值域不变，故选A。

4 B【解析】由$f\left(\frac{1}{2}x-1\right)=2x-5=4\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1$，得$f(x)=4x-1$，又$f(a)=6$，则$4a-1=6$，解得$a=\frac{7}{4}$。

5 C【解析】因为$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-2},x>2,\\ f(x+3),x\leqslant 2,\end{cases}$

所以$f(2)=f(5)=\frac{5+1}{5-2}=2$。故选C。

6 B【解析】当$a<0$时，$f(x)=|x|-a>0$恒成立，所以函数$f(x)$无零点；当$a=0$时，$f(x)=|x|$的零点为0，故选B。

7 C【解析】函数$f(x)=|x|$的单调递增区间为$[0,+\infty)$，函数$g(x)=x(2-x)=-(x-1)^2+1$的单调递增区间为$(-\infty,1]$。故选C。

8 A【解析】因为函数$f(x)=ax^2+bx+1$是定义在$[-1-a,2a]$上的偶函数，所以$-1-a+2a=0$，所以$a=1$，所以函数的定义域为$[-2,2]$。因为函数图像的对称轴为直线$x=0$，所以$b=0$，所以$f(x)=x^2+1$，所以$x=\pm 2$时函数取得最大值，最大值为5。

9 C【解析】由已知，得$\begin{cases}16-4b+c=c,\\ 4-2b+c=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=4,\\ c=2,\end{cases}$所以$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2,x\leqslant 0,\\ 2,x>0。\end{cases}$当$x\leqslant 0$时，方程为$x^2+4x+2=x$，即$x^2+3x+2=0$，解得$x=-1$或$x=-2$。当$x>0$时，方程的解为$x=2$。故方程$f(x)=x$有3个解。

10 C【解析】对于A，由二次函数图像知，开口向上，$a>0$，一次函数为减函数，所以$a<0$，所以排除A。

对于B，由二次函数图像知，开口向上，$a>0$，对称轴为直线$x=0$，所以$b=0$，一次函数为增函数，且与$y$轴交于正半轴，所以$a>0$，$b>0$，所以排除B。

对于C，由二次函数图像知，开口向下，$a<0$，因为对称轴在$y$轴右侧，所以$b>0$，一次函数为减函数，且与$y$轴交于正半轴，所以$a<0,b>0$，所以C正确。

对于D，由二次函数图像知，开口向下，$a<0$，因为对称轴在$y$轴右侧，所以$b>0$，一次函数为增函数，所以$a>0$，所以排除D。

11 B【解析】对于①，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-x=-f(x)$，故①满足"倒负"变换；对于②，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x=f(x)$，故②不满足"倒负"变换；对于③，当$0<x<1$时，$\frac{1}{x}>1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x=-f(x)$；当$x>1$时，$0<\frac{1}{x}<1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}=-f(x)$；当$x=1$时，$\frac{1}{x}=1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=0=-f(x)$，故③满足"倒负"变换。

12 A【解析】由$f(x+4)=f(x)$可知，$f(6.5)=f(2.5)$，$f(5)=f(1)$，$f(15.5)=f(3.5)$，因为$y=f(x)$的图像向左平移2个单位长度可得$y=f(x+2)$的图像，所以$y=f(x)$的图像关于$x=2$对称，则有$f(6.5)=f(2.5)=f(1.5)$，$f(15.5)=f(3.5)=f(0.5)$，因为对于任意的$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，所以$y=f(x)$在区间$[0,2]$上单调递增，所以$f(1.5)>f(1)>f(0.5)$，故$f(6.5)>f(5)>f(15.5)$。

13 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$【解析】因为$f(x)=-x+3a$在$x\in(-\infty,1)$上是单调递减的，而$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上一定单调递减，所以$\begin{cases}a>0,\\ a\leqslant -1+3a,\end{cases}$解得$a\geqslant\frac{1}{2}$，所以$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。

14 $-\frac{2}{5}$【解析】$f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow -\frac{1}{2}+a=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\Rightarrow a=\frac{3}{5}$，因此$f(5a)=f(3)=f(1)=f(-1)=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$。

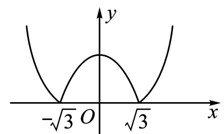
15 4【解析】由题意知2是方程$x^2-4x+b=-c$的根，将其代入并整理得$b+c=4$。

16 ①④【解析】①方程$x^2+(a-3)x+a=0$有一正一负两个实根，则$\begin{cases}\Delta=(a-3)^2-4a>0,\\ x_1x_2=a<0,\end{cases}$解得$a<0$。

②定义域为$\{1,-1\}$，此时$f(x)=0$，所以$f(x)$既是奇函数也是偶函数。

③$y=f(x)$与$y=f(x+1)$的值域相同。

④画出曲线$y=|3-x^2|$，如图。



第16题图

所以曲线$y=|3-x^2|$和直线$y=a(a\in\mathbf{R})$的公共点的个数可能为0,2,3,4，故$m$的值不可能是1。故填①④。

17 解：(1)设$f(x)=ax+b(a\neq 0)$，

由题意得$\begin{cases}a-b=5,\\ a+b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=-2。\end{cases}$所以$f(x)=3x-2$。

(2)$g(x)=f(x)-x^2=3x-2-x^2$，

令$g(x)=0$，得$3x-2-x^2=0$，解得$x=1$或$x=2$。

所以函数$g(x)$的零点是1和2。

18 解：(1)由题意，可知$f(x)$是二次函数，且$f(0)=f(2)$，所以其图像的对称轴为直线$x=1$，又$f(x)$的最小值为1，所以可设$f(x)=a(x-1)^2+1$，又$f(0)=3$，所以$a=2$。所以$f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$。

(2)要使$f(x)$在区间$[2a,a+1]$上不单调，则$2a<1<a+1$，所以$0<a<\frac{1}{2}$。

19 解：(1)当$a>0$且$a\neq 1$时，由$3-ax\geqslant 0$，得$x\leqslant\frac{3}{a}$，即函数的定义域为$\left(-\infty,\frac{3}{a}\right]$。

(2)当$a-1>0$，即$a>1$时，要使$f(x)$在$(0,1]$上是减函数，则需$3-a\times 1\geqslant 0$，此时$1<a\leqslant 3$。当$a-1<0$，即$a<1$时，要使$f(x)$在$(0,1]$上是减函数，则需$-a>0$且$3-a\times 1\geqslant 0$，此时$a<0$，综上所述，实数$a$的取值范围是$(-\infty,0)\cup(1,3]$。

20 解：(1)设每个零件的实际出厂单价降为51元时，一次订购量为$x_0$个，则$x_0=100+\frac{60-51}{0.02}=550$。因此，当一次订购量为550个时，零件的实际出厂单价降为51元。

(2)当$0<x\leqslant 100$时，$p=60$；

当$100<x<550$时，$p=60-0.02(x-100)=62-\frac{x}{50}$；

当$x\geqslant 550$时，$p=51$。

所以$p=f(x)=\begin{cases}60,0<x\leqslant 100,x\in\mathbf{N}^*,\\ 62-\frac{x}{50},100<x<550,x\in\mathbf{N}^*,\\ 51,x\geqslant 550,x\in\mathbf{N}^*。\end{cases}$

21 解：(1)由已知 $a=c=1$，$f(-1)=a-b+c=0$，解得 $b=2$，

所以 $f(x)=(x+1)^2$，所以 $F(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x>0,\\ -(x+1)^2, x<0,\end{cases}$

所以 $F(2)+F(-2)=(2+1)^2+[-(-2+1)^2]=8$。

(2)由题意知，$f(x)=x^2+bx$，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 在区间$(0,1]$上恒成立，等价于 $-1\leqslant x^2+bx\leqslant 1$ 在$(0,1]$上恒成立，即 $b\leqslant \frac{1}{x}-x$ 且 $b\geqslant -\frac{1}{x}-x$ 在$(0,1]$上恒成立，令 $g(x)=\frac{1}{x}-x$，$h(x)=-\frac{1}{x}-x$，则 $g(x)=\frac{1}{x}-x$ 在$(0,1]$上递减，$h(x)=-\frac{1}{x}-x$ 在$(0,1]$上递增，所以当 $x\in(0,1]$时，$g(x)$的最小值为 $g(1)=0$，$h(x)$的最大值为 $h(1)=-2$。

所以 $-2\leqslant b\leqslant 0$。

22 解：(1)证明：因为 $f(x)\neq 0$，所以 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0$。

(2)证明：任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，又因为$f(x)$为非零函数，所以 $f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1-x_2)\cdot f(x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1-x_2+x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1)}{f(x_2)}>1$，因为$f(x)>0$，所以$f(x_1)>f(x_2)$，所以$f(x)$为减函数。

(3)由 $f(4)=f^2(2)=\frac{1}{16}$，$f(x)>0$，得 $f(2)=\frac{1}{4}$。

原不等式转化为 $f(x^2+x-3+5-x^2)\leqslant f(2)$，

结合(2)得 $x+2\geqslant 2$，所以 $x\geqslant 0$，故不等式的解集为$\{x|x\geqslant 0\}$。

# 第三章 基本初等函数(Ⅰ)

## 3.1 指数与指数函数

### 3.1.1 实数指数幂及其运算

**变式题型**

变式1 解：(1)$2^{-2}\times 3^0\times 4^2=\frac{1}{2^2}\times 1\times 16=4$。

(2)$(ab)^{-1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^3=a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot(a\cdot b^{-1})^3=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot a^3\cdot\frac{1}{b^3}=\frac{a^2}{b^4}$。

【点评】利用整数指数幂的运算法则求解。

变式2 解：(1)$\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$。

(2)当 $n$ 是奇数时，原式$=(a-b)+(a+b)=2a$。

当 $n$ 是偶数时，因为 $a<b<0$，所以 $a-b<0$，$a+b<0$。

所以原式$=-(a-b)-(a+b)=-2a$。

所以 $\sqrt[n]{(a-b)^n}+\sqrt[n]{(a+b)^n}=\begin{cases}2a, n\text{ 是奇数},\\ -2a, n\text{ 是偶数}。\end{cases}$

【点评】对于(1)，先乘方再开方；对于(2)，由于根指数与被开方数都用字母表示，需讨论 $n$ 的奇偶性。

变式3 解：(1)将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，两边平方，得 $a+a^{-1}+2=9$，即 $a+a^{-1}=7$。

(2)将上式平方，有 $a^2+a^{-2}+2=49$，所以 $a^2+a^{-2}=47$。

(3)因为 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3$，

所以原式$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{-1}+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=a+a^{-1}+1=8$。

**题组A 学考通关测试** 正文 P120

1 B 【解析】对于①$\sqrt[n]{a^n}=a$，当 $n$ 为偶数时，结果应该是$|a|$；当 $n$ 为奇数时，结果是 $a$，故错误。对于②$(a^2-3a+3)^0=1$，因为 $a^2-3a+3>0$ 恒成立，所以等式成立，故正确。对于③$\sqrt[3]{-3}=\sqrt[6]{-3^2}$，偶次根式下被开方数不能是负数，故错误。选 B。

2 C 【解析】对于 A，$-\sqrt[4]{x}=-x^{\frac{1}{4}}(x>0)$，所以 A 错；对于 B，$x^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$，所以 B 错；对于 C，$\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3}(x,y\neq 0)$，所以 C 正确；对于 D，$\sqrt[8]{y^2}=|y|^{\frac{1}{4}}$，所以 D 错。故选 C。

3 A 【解析】因为 $x\in(7,9)$，所以 $\sqrt{(x-7)^2}+\sqrt{(x-9)^2}=(x-7)+(9-x)=2$。

4 C 【解析】解：原式$=(-3a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}})\cdot(3a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}})=-9a$。

5 ② 【解析】解：由题意，①显然不正确；②中，因为 $a^2+b^2\geqslant 0$，所以②一定成立。③，④中，因为 $a,b\in\mathbf{R}$，所以 $\sqrt[4]{a^4}=|a|$，$\sqrt[4]{b^4}=|b|$，则 $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[4]{b^4}=|a|-|b|$，$\sqrt[10]{(a+b)^{10}}=|a+b|$，故③，④不正确。

6 $-4$ 【解析】解：原式$=\frac{1}{4}\times 16-4\div 1-4=4-4-4=-4$。

7 解：(1)$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+(1.5)^{-2}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}}-\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{3}{2}-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{3}{2}$。

(2)$2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\div(x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{y})=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\cdot(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}})=2xy^{\frac{1}{6}}$。

**题组B 高考通关测试** 正文 P120

1 D 【解析】原式$=1-\left(1-\frac{1}{0.5^2}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)^2=1-\left(1-\frac{1}{0.25}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)^2=1-(1-4)\times\frac{4}{9}=1-(-3)\times\frac{4}{9}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$。故选 D。

2 B 【解析】$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=m^{\frac{1}{3}}\cdot\left(m^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}m^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}m$。

3 C 【解析】因为 $a>0$，所以 $x<0$，$\sqrt{-ax^3}=|x|\sqrt{-ax}=-x\sqrt{-ax}$。故选 C。

4 B 【解析】因为 $x^{9x}=(9x)^x$，$(x^9)^x=(9x)^x$，所以 $x^9=9x$。所以 $x^8=9$。所以 $x=\sqrt[8]{9}=\sqrt[4]{3}$。

5 A 【解析】因为$f(-1)=\frac{3}{4}$，所以 $f(1)=-\frac{3}{4}$，即 $2^{1+a}-1=-\frac{3}{4}$，即 $1+a=-2$，解得 $a=-3$。

6 $-\frac{8}{3}$ 【解析】原式$=\frac{10}{3}-3\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}-3=-\frac{8}{3}$。

7 $\frac{2}{3}$ 【解析】因为 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，$b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，所以 $(a+1)^{-2}+(b+1)^{-2}=\frac{1}{(3-\sqrt{3})^2}+\frac{1}{(3+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{12-6\sqrt{3}}+\frac{1}{12+6\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{6}=\frac{2}{3}$。

8 $-1$ 【解析】原式$=\sqrt{(x-2)^2}-|3-x|=2-x-(3-x)=-1$。

9 8 【解析】由题意得 $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$，所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=8$。

10 解：(1)原式$=\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}=\sqrt{3+2(\sqrt{8}+\sqrt{9})}=\sqrt{3+2\sqrt{8}+6}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}=1+2\sqrt{2}$。

(2)原式$=0.3^{-1}+(3+8-2)^{\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}+3=\frac{19}{3}$。

11 解：(1)设 $x^{\frac{1}{2}}=t$，则 $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{t}$，由题意知 $t+\frac{1}{t}=3$，所以 $t^2+$

$\frac{1}{t^2}+2=9$，即 $t^2+\frac{1}{t^2}=7$。所以原式 $=\frac{t^3+\frac{1}{t^3}+2}{t^4+\frac{1}{t^4}+3}=$ $\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^2+\frac{1}{t^2}-1\right)+2}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2-2+3}=\frac{3\times(7-1)+2}{7^2-2+3}=\frac{2}{5}$。

（2）由已知得 $a^{-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，所以原式 $=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}-1=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)-1=2\sqrt{2}-1$。

## 3.1.2 指数函数

**变式题型**

变式 （1）方程可化为 $3^{2x+4}=3^{-2(x+2)}$，
即 $2x+4=-2(x+2)$，解得 $x=-2$。
（2）方程可化为 $4\times(2^x)^2+3\times2^x-1=0$。
令 $t=2^x(t>0)$，则 $4t^2+3t-1=0$，解得 $t=\frac{1}{4}$，即 $2^x=\frac{1}{4}$，解得 $x=-2$。

**题组A 学考通关测试** 正文 P129

1 C 【解析】①②③不是，④⑤是。

2 A 【解析】由题意得 $4-2^x\geqslant0$，所以 $2^x\leqslant4$，所以 $x\leqslant2$。

3 B 【解析】$M=\{-1,1\}$，$N=\{x|2^{-1}<2^{x+1}<2^2,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|-1<x+1<2,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0\}$，所以 $M\cap N=\{-1\}$。

4 D 【解析】函数 $f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线，$f(2)\cdot f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3-3+2\right]=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}-1\right)<0$。根据零点存在性定理，知 $f(x)$ 的零点所在的一个区间是 $(2,3)$。

5 $\left[-\frac{1}{2},3\right]$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(x)_{\max}=f(1)=3$。

6 $[2,4]$ 【解析】函数 $f(x)=2^{|x-2|}-1$ 图像的对称轴为 $x=2$，且在 $(-\infty,2]$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，由函数 $f(x)=2^{|x-2|}-1$ 在区间 $[0,m]$ 上的值域为 $[0,3]$ 且函数图像关于直线 $x=2$ 对称，得 $f(0)=f(4)=3$。又 $f(2)=0$，则 $m\in[2,4]$，故答案为 $[2,4]$。

7 解：当 $a>1$ 时，$a^{2x+7}<a^{3x-2}$ 等价于 $2x+7<3x-2$，所以 $x>9$；
当 $0<a<1$ 时，$a^{2x+7}<a^{3x-2}$ 等价于 $2x+7>3x-2$，所以 $x<9$。
综上，当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\{x|x>9\}$；
当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\{x|x<9\}$。

**题组B 高考通关测试** 正文 P129

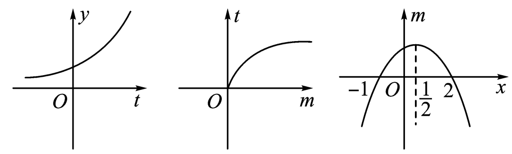
1 A 【解析】由题图可知 $0<a<1$，$b<-1$，则 $g(x)$ 是一个减函数，可排除 C，D，再根据 $g(0)=1+b<0$，可排除 B，选 A。

2 B 【解析】根据题意，结合指数函数的性质，得 $0<y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}\leqslant1$，由方程 $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-a-1=0$ 有解，知 $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=a+1$ 有解，则 $a+1\in(0,1]$，即 $-1<a\leqslant0$。故选 B。

3 D 【解析】$y_1=4^{0.9}=2^{2\times0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{3\times0.48}=2^{1.44}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$。因为函数 $y=2^x$ 在定义域上为增函数，所以 $y_1>y_3>y_2$。故选 D。

4 A 【解析】设 $t=2^x(t>0)$，则原函数可化为 $y=t^2-2t-a=(t-1)^2-1-a\geqslant-1-a>0$，所以 $a<-1$。

5 C 【解析】设 $y=2^t$，$t=\sqrt{m}$，$m=-x^2+x+2$，函数定义域为 $[-1,2]$，所以先排除 A，B；在 $[-1,2]$ 上函数 $m$ 先增后减，故排除 D；由图像可知，该复合函数单调增区间为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，故选 C。




第 5 题图

6 $(-1,1)$ 【解析】函数 $y=a^{x+1}(a>0$ 且 $a\neq1)$，满足当 $x=-1$ 时，$y=1$。所以函数 $y=a^{x+1}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像恒过定点 $(-1,1)$。

7 $2^{x+1}-1$ 【解析】令 $t=x-1$，则 $x=t+1$。因为函数 $f(x-1)=2^x-1$，所以 $f(t)=2^{t+1}-1$，所以 $f(x)=2^{x+1}-1$。

8 $[0,1)$ 【解析】当 $x\geqslant1$ 时，$2^{x-1}\geqslant1$，又函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，所以 $(1-a)x+2a$ 必须为递增的，即满足 $\begin{cases}1-a>0,\\1-a+2a\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a<1$，即 $a$ 的取值范围是 $[0,1)$。

9 $(1,+\infty)$ 【解析】设 $F(x)=f(x)-2$，则 $F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$F(x)$ 是奇函数，又 $F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，由 $f(a)+f(a-2)>4$，得 $F(a)+F(a-2)>0$，于是 $F(a)>F(2-a)$，即 $a>2-a$，解得 $a>1$。

10 解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=2^{3-2x}<4=2^2$，
则 $3-2x<2$，得 $x>\frac{1}{2}$，即 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$。
（2）$y=3-ax$ 在定义域内单调递减，
当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，
$f(x)_{\min}=f(1)=a^{3-a}>1=a^0$，得 $1<a<3$。
当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，
$f(x)_{\min}=f(0)=a^3>1$，不成立。
综上可得 $a\in(1,3)$。

11 解：（1）因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，
所以 $f(0)=0$，即 $\frac{a-1}{2}=0$，由此得 $a=1$。
（2）由（1）知 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，
所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数。
证明：设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{2}{2^{x_1}+1}-\left(1-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$。
因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$。
所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数。
（3）因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，
所以原不等式可化为 $f[f(x)]>-f(3-m)$，
即 $f[f(x)]>f(m-3)$。
又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f(x)>m-3$，
由此可得，不等式 $m<f(x)+3=4-\frac{2}{2^x+1}$ 对任意实数 $x$ 恒成立。
由 $2^x>0$ 得 $2^x+1>1$，所以 $0<\frac{2}{2^x+1}<2$，所以 $-2<-\frac{2}{2^x+1}<0$，
则 $2<4-\frac{2}{2^x+1}<4$。所以 $m\in(-\infty,2]$。

## 3.2 对数与对数函数

### 3.2.1 对数及其运算

**变式题型**

变式1 解:(1)原式 $=\lg\dfrac{2^4\times5^3}{\frac{1}{5}}=\lg(2^4\times5^4)=\lg(2\times5)^4=4$;

(2)原式 $=\dfrac{\frac{3}{2}\lg3+3\lg2-\frac{3}{2}}{\lg3+2\lg2-1}=\dfrac{\frac{3}{2}(\lg3+2\lg2-1)}{\lg3+2\lg2-1}=\dfrac{3}{2}$;

(3)原式 $=2\log_32-(5\log_32-2)+3\log_32-3=2\log_32-5\log_32+2+3\log_32-3=-1$。

变式2 B 【解析】$x=\log_65$,$6^x+6^{-x}=5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$。故选 B。

变式3 $\dfrac{1}{3}$ 【解析】在第二个集合中,根据集合中元素的互异性,有 $x\neq0$,$y\neq0$,则第一个集合中的元素 $xy\neq0$,只有 $\lg(xy)=0$,可得 $xy=1$①。然后,还有两种可能,$x=y$②,或 $xy=y$③。由①②联立,解得 $x=y=1$ 或 $x=y=-1$。若 $x=y=1$,$xy=1$,违背集合中元素的互异性;若 $x=y=-1$,则 $xy=|x|=1$,从而两个集合中的元素相同。由①③联立,解得 $x=y=1$ 不符合题意,舍去。故 $x=-1$,$y=-1$ 时符合集合相等的条件。因此,$\log_8(x^2+y^2)=\log_82=\dfrac{1}{3}$。

**题组A 学考通关测试** 正文 P136

1 B【解析】由对数的运算法则可得 $\lg\dfrac{3}{2}=\lg3-\lg2=b-a$。

2 B【解析】$\log_2\dfrac{2}{3}+\log_26=\log_2\left(\dfrac{2}{3}\times6\right)=\log_24=2$。

3 B【解析】方法一:令 $10^x=t$,则 $x=\lg t$,所以 $f(t)=\lg t$,即 $f(x)=\lg x$,所以 $f(3)=\lg3$。

方法二:令 $10^x=3$,则 $x=\lg3$,所以 $f(3)=\lg3$。

4 D【解析】$9^{\frac{3}{2}}-3^{\log_32}\times\log_2\dfrac{1}{4}+\lg4+2\lg5=\sqrt[2]{9^3}-2\times(-2)+\lg(4\times25)=27+4+2=33$。

5 $2+a$【解析】$2\log_36+\log_30.5=\log_336+\log_30.5=\log_3(36\times0.5)=\log_318=\log_39+\log_32=2+a$。

6 解:解法1:(1)原式 $=\dfrac{\log_29}{\log_28}\times\dfrac{1}{\log_23}\times\dfrac{\log_232}{\log_264}=\dfrac{2\log_23}{3}\times\dfrac{1}{\log_23}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{9}$。

解法2:(1)原式 $=\dfrac{\lg9}{\lg8}\div\dfrac{\lg3}{\lg2}\times\dfrac{\lg32}{\lg64}=\dfrac{2\lg3}{3\lg2}\times\dfrac{\lg2}{\lg3}\times\dfrac{5\lg2}{6\lg2}=\dfrac{5}{9}$。

(2)原式 $=(\log_25+\log_25\sqrt{5})\times\dfrac{\log_32}{2\log_35}$

$=\dfrac{1}{2}\log_225\sqrt{5}\times\log_52=\dfrac{1}{2}\log_25^{\frac{5}{2}}\times\log_52$

$=\dfrac{5}{4}\log_25\times\log_52$

$=\dfrac{5}{4}$。

**题组B 高考通关测试** 正文 P137

1 C【解析】由 $\log_ab+3\log_ba=\dfrac{13}{2}$ 得 $\log_ab+\dfrac{3}{\log_ab}=\dfrac{13}{2}$,即 $2(\log_ab)^2-13\log_ab+6=0$,解得 $\log_ab=6$ 或 $\log_ab=\dfrac{1}{2}$,所以 $b=a^6$ 或 $b=\sqrt{a}$,故选 C。

2 D【解析】由于 $2+\log_23<2+\log_24=4$,所以 $f(2+\log_23)=f(3+\log_23)$。因为 $3+\log_23=\log_224>4$,所以 $f(3+\log_23)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3+\log_23}=2^{-3-\log_23}=\dfrac{1}{8}\times2^{\log_2\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{24}$,故选 D。

3 B【解析】由已知得 $\alpha+\beta=-\log_26$,$\alpha\cdot\beta=\log_23$,所以 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\alpha}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\beta}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\log_26}=2^{2\log_26}=6^2=36$,故选 B。

4 B【解析】由 $\log_xm=24$ 得 $\log_mx=\dfrac{1}{24}$,由 $\log_ym=40$ 得 $\log_my=\dfrac{1}{40}$,由 $\log_{xyz}m=12$ 得 $\log_m(xyz)=\dfrac{1}{12}$,则 $\log_mx+\log_my+\log_mz=\dfrac{1}{12}$。所以 $\log_mz=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}=\dfrac{1}{60}$,所以 $\log_zm=60$,故选 B。

5 A【解析】因为 $f(n)=\log_{n+1}(n+2)=\dfrac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}$,

所以 $f(1)f(2)\cdots f(n)=\dfrac{\lg3}{\lg2}\cdot\dfrac{\lg4}{\lg3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}=\dfrac{\lg(n+2)}{\lg2}=\log_2(n+2)$。

因为 $n\in(1,2\,015)$,所以 $n+2\in(3,2\,017)$。

所以 $2^{10}=1\,024$,$2^{11}=2\,048$,所以在 $(3,2\,017)$ 内含有 $2^2,2^3,\cdots,2^{10}$ 共9个2的整数幂,故选 A。

6 $2\sqrt{6}$【解析】$3^{\log_9(\sqrt{6}+2)^2}+5^{\log_{25}(2-\sqrt{6})^2}=3^{\log_3(\sqrt{6}+2)}+5^{\log_5(\sqrt{6}-2)}=\sqrt{6}+2+\sqrt{6}-2=2\sqrt{6}$。

7 $\dfrac{10}{81}$【解析】设 $\log_{3x}3=t$,则 $\log_{27}(3x)=\dfrac{1}{3t}$,即 $t+\dfrac{1}{3t}=-\dfrac{4}{3}$,解得 $t_1=-1$,$t_2=-\dfrac{1}{3}$,所以 $a=\dfrac{1}{9}$,$b=\dfrac{1}{81}$,所以 $a+b=\dfrac{10}{81}$。

8 19【解析】原式 $=(3^3)^{\frac{2}{3}}-2^{\log_23}\times\log_22^{-3}+\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2=3^2-3\times(-3)+\lg[6+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}]=18+\lg10=19$。

9 2【解析】因为 $f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1+\ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)+1=2+\ln(1+9x^2-9x^2)=2$,所以 $f(\lg2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=f(\lg2)+f(-\lg2)=2$。

10 解:(1)因为 $10^b=3$,所以 $b=\lg3$,

所以 $\log_6\sqrt{30}=\dfrac{1}{2}\log_630=\dfrac{1}{2}(1+\log_65)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\lg5}{\lg6}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1-\lg2}{\lg2+\lg3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1-a}{a+b}\right)=\dfrac{b+1}{2(a+b)}$。

(2)$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$,移项并整理得 $\log_4\dfrac{3-x}{1-x}=\log_{0.25}\dfrac{2x+1}{3+x}=\log_4\dfrac{x+3}{2x+1}$,所以 $\dfrac{3-x}{1-x}=\dfrac{x+3}{2x+1}$,解得 $x=7$ 或 $x=0$,经检验 $x=0$ 为所求。

### 3.2.2 对数函数

### 3.2.3 指数函数与对数函数的关系

**变式题型**

变式1 D 【解析】方法一:因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$,所以 $g(x)=\log_2x$,所以 $f(2)+g(4)=2^2+\log_24=6$。

方法二:因为 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$,所以 $f(2)=4$,即函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(2,4)$,因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,所以函数 $g(x)$ 的图像经过点 $(4,2)$,所以 $f(2)+g(4)=4+2=6$。

变式2 ① 【解析】方法一:因为 $y=|f(1-x)|=|\lg(1-x)|$,显然 $x\neq1$,故排除②④。又当 $x=0$ 时,$y=0$,排除③,故填①。

方法二:从图像变换得结果:

$y=\lg x\xrightarrow[y\text{ 轴对称}]{\text{将图像沿}}y=\lg(-x)\xrightarrow[1\text{ 个单位长度}]{\text{将图像向右平移}}y=\lg[-(x-1)]$

$\xrightarrow[x\text{ 轴翻折到 }x\text{ 轴上方}]{\text{将 }x\text{ 轴下方部分沿}} y=|\lg(1-x)|$。

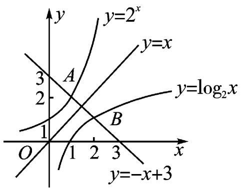
故知①正确。

方法三：$y=\lg x \xrightarrow[1\text{ 个单位长度}]{\text{向左平移}} y=\lg(1+x) \xrightarrow[y\text{ 轴对称}]{\text{将图像关于}} y=\lg(1-x)$

$\xrightarrow[x\text{ 轴翻折到 }x\text{ 轴上方}]{\text{将 }x\text{ 轴下方部分沿}} y=|\lg(1-x)|$。故填①。

变式 3 解：将方程整理得 $2^x=-x+3$，$\log_2 x=-x+3$。

由图可知，$a$ 是指数函数 $y=2^x$ 的图像与直线 $y=-x+3$ 的交点 $A$ 的横坐标，$b$ 是对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像与直线 $y=-x+3$ 的交点 $B$ 的横坐标。




变式 3 图

由于函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数，所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，由题意可得出 $A$、$B$ 两点也关于直线 $y=x$ 对称，于是 $A$、$B$ 两点的坐标分别为 $A(a,b)$，$B(b,a)$。

而 $A$、$B$ 都在直线 $y=-x+3$ 上，所以 $b=-a+3$（$A$ 点坐标代入），或 $a=-b+3$（$B$ 点坐标代入），故 $a+b=3$。

【解析】解答本题可先根据两个方程的形式特点，观察出从正面难以入手，因而可变换方程形式，用数形结合的方法解决。

## 题组A 学考通关测试

正文 P150

1 C 【解析】方法一：由于 $y=\log_a x(a>1)$ 的图像恒过定点 $(1,0)$，$\log_a(x-3)+2(a>1)$ 的图像可以看作是由 $y=\log_a x(a>1)$ 的图像向右平移 3 个单位长度，向上平移 2 个单位长度得到的，所以函数 $y=\log_a(x-3)+2(a>1)$ 的图像恒过点 $(4,2)$，故选 C。

方法二：由 $\log_a(4-3)+2=2$，即 $f(4)=2$，与 $a$ 无关，所以恒过点 $(4,2)$。故选 C。

2 C 【解析】由题意得 $M=(0,1]$，$N=(-\infty,0]$，所以 $M\cup N=(-\infty,1]$。故选 C。

3 B 【解析】由函数 $y_1=7^x$ 单调递增得 $a=7^{0.3}>7^0=1$，由函数 $y_2=0.3^x$ 单调递减得 $b=0.3^7<0.3^0=1$，则 $0<b<1$。由函数 $y=\log_7 x$ 单调递增得 $c=\log_7 0.3<\log_7 1=0$，所以 $a>1$，$0<b<1$，$c<0$，所以 $c<b<a$。故选 B。

4 C 【解析】由函数 $f(x)$ 的解析式知定义域为 $\{x|x\neq 0$ 且 $x\neq -1\}$，则

$$f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\log_a|x|=\begin{cases}-\log_a(-x),x<-1,\\ \log_a(-x),-1<x<0,\\ \log_a x,x>0。\end{cases}$$故选 C。

5 $(3,1)$ 【解析】令 $x-2=1$，得 $x=3$，所以函数的图像恒过定点 $(3,1)$。

6 0 【解析】令 $u=x^2+6x+10$，由 $x^2+6x+10=(x+3)^2+1>0$ 知，函数的定义域是 $\mathbf{R}$，$u=x^2+6x+10$ 的最小值是 1，而函数 $y=\log_3 u$ 是增函数，所以原函数的最小值是 $\log_3 1=0$。

7 解：由题意知 $f(x)=\frac{1}{2}(\log_a x+1)\cdot(\log_a x+2)=\frac{1}{2}(\log_a^2 x+3\log_a x+2)=\frac{1}{2}\left(\log_a x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$。

当 $f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{8}$ 时，$\log_a x=-\frac{3}{2}$。

又因为 $x\in[2,8]$，所以 $a\in(0,1)$。

因为 $f(x)$ 是关于 $\log_a x$ 的二次函数，

所以 $f(x)$ 的最大值必在 $x=2$ 或 $x=8$ 时取得。

若 $\frac{1}{2}\left(\log_a 2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}=1$，则 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$f(x)$ 取得最小值时，$x=(2^{-\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{2}\notin[2,8]$，舍去。

若 $\frac{1}{2}\left(\log_a 8+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}=1$，则 $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$ 取得最小值时，$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\in[2,8]$，符合题意，所以 $a=\frac{1}{2}$。

## 题组B 高考通关测试

正文 P150

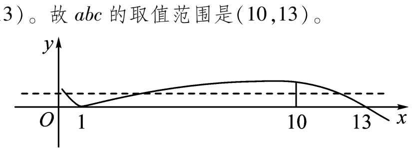
1 C 【解析】函数 $y=x^2-ax+2$ 图像的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$，依题意得 $\begin{cases}a>1,\\ \frac{a}{2}\geqslant 1,\\ 3-a>0,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a<3$，故选 C。

2 D 【解析】函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，由于 $f(2)=\ln 2-\frac{2}{2}=\ln 2-\ln \mathrm{e}=\ln\frac{2}{\mathrm{e}}<0$，$f(3)=\ln 3-\frac{2}{3}=\ln 3-\ln \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}=\ln\frac{3}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}}>0$，故 $f(2)\cdot f(3)<0$，所以函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间为 $(2,3)$，故选 D。

3 A 【解析】$\log_6 15<\log_5 15<\log_5 16<2<2^{1.5}=0.5^{-1.5}$，所以 $b<c<a$，故选 A。

4 D 【解析】显然函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因此要使 $f(3x-2)>f(x-4)$ 成立，只需 $|3x-2|>|x-4|$，即 $(3x-2)^2>(x-4)^2$，解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}$。

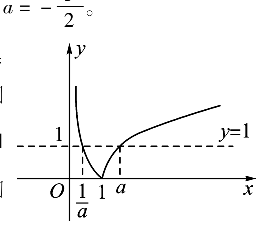
5 B 【解析】由题知，函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,0<x\leqslant 10,\\ -\frac{1}{27}(x^2-14x+13),x>10,\end{cases}$ 且 $a<b<c$ 时，$f(a)=f(b)=f(c)$，作出函数 $f(x)$ 的图像如图，则 $-\lg a=\lg b=-\frac{1}{27}(c^2-14c+13)\in(0,1)$，所以 $ab=1$，$0<-\frac{1}{27}(c^2-14c+13)<1$，且 $c>10$，解得 $10<c<13$，所以 $abc=c\in(10,13)$。故 $abc$ 的取值范围是 $(10,13)$。




第 5 题图

6 $-\frac{3}{2}$ 【解析】函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{3x}+1)+ax$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，即 $\ln(\mathrm{e}^{-3x}+1)-ax=\ln(\mathrm{e}^{3x}+1)+ax$，化简得 $\ln\frac{1+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{6x}}=2ax=\ln \mathrm{e}^{2ax}$，即 $\frac{1+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{6x}}=\mathrm{e}^{2ax}$，整理得 $\mathrm{e}^{3x}+1=\mathrm{e}^{2ax+3x}(\mathrm{e}^{3x}+1)$，所以 $\mathrm{e}^{2ax+3x}=1$，所以 $2ax+3x=0$，解得 $a=-\frac{3}{2}$。

7 4 【解析】由题意可作出函数 $y=|\log_a x|(a>1)$ 的图像，如图，在区间 $\left[\frac{1}{a},1\right]$ 和区间 $[1,a]$ 上 $|\log_a x|(a>1)$ 的取值范围都是 $[0,1]$。因为 $a-1-\left(1-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}-2>0(a>1)$，所以区间 $\left[\frac{1}{a},1\right]$ 的长度最小，故 $1-\frac{1}{a}=\frac{3}{4}$，解得 $a=4$。




第 7 题图

8 $(-2,0)$ 【解析】由 $\log_a 1=0$ 得 $\begin{cases}\frac{2x+1}{x-1}=1,\\ y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0。\end{cases}$

故 $y=\log_a\frac{2x+1}{x-1}$ 的图像恒过点 $P(-2,0)$。

9 $\left(0,\frac{2}{5}\right)\cup(1,+\infty)$ 【解析】$\log_a\frac{2}{5}<1\Leftrightarrow\log_a\frac{2}{5}<\log_a a\Leftrightarrow$

$\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{2}{5}>a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1,\\ \frac{2}{5}<a\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<\frac{2}{5}$ 或 $a>1$。

因此，$a$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{5}\right)\cup(1,+\infty)$

10 解：(1)由 $\frac{1+x}{1-x}>0$，得 $-1<x<1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$。

(2)$f(x)$ 为奇函数。证明如下：

由(1)，知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称。

因为 $f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=\log_a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数。

(3)当 $a>1$ 时，$f(x)>0$，则 $\frac{1+x}{1-x}>1$，解得 $0<x<1$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)>0$，则 $0<\frac{1+x}{1-x}<1$，解得 $-1<x<0$。

综上，当 $a>1$ 时，实数 $x$ 的取值范围为 $(0,1)$；

当 $0<a<1$ 时，实数 $x$ 的取值范围为 $(-1,0)$。

11 解：(1)由 $\log_2\left(\frac{1}{x}+5\right)>0$，得 $\frac{1}{x}+5>1$，

解得 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(0,+\infty)$。

(2)依题意得：$\frac{1}{x}+a=(a-4)x+2a-5$，

$(a-4)x^2+(a-5)x-1=0$，

当 $a=4$ 时，$x=-1$，经检验，满足题意。

当 $a=3$ 时，$x_1=x_2=-1$，经检验，满足题意。

当 $a\neq3$ 且 $a\neq4$ 时，$x_1=\frac{1}{a-4}$，$x_2=-1$，$x_1\neq x_2$。

$x_1$ 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_1}+a>0$，即 $a>2$；

$x_2$ 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_2}+a>0$，即 $a>1$。于是满足题意的

$a\in(1,2]$。

综上，$a$ 的取值范围为 $(1,2]\cup\{3,4\}$。

12 解：(1)由 $\begin{cases}a^x-2a>0,\\ a^x-3a>0\end{cases}\Rightarrow a^x>3a$。

①当 $a>1$ 时，$x>\log_a(3a)$，此时定义域 $D=(\log_a(3a),+\infty)$，

对任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，

因为 $a^{x_1}<a^{x_2}$，所以 $0<a^{x_1}-2a<a^{x_2}-2a$，$0<a^{x_1}-3a<a^{x_2}-3a$，

所以 $\log_a(a^{x_1}-2a)<\log_a(a^{x_2}-2a)$，$\log_a(a^{x_1}-3a)<\log_a(a^{x_2}-3a)$，所以 $g(x_1)<g(x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $D=(\log_a(3a),+\infty)$ 内是增函数；

②当 $0<a<1$ 时，$x<\log_a(3a)$，此时定义域 $D=(-\infty,\log_a(3a))$，

同理可证 $g(x)$ 在 $D=(-\infty,\log_a(3a))$ 内是增函数。

(2)假设 $g(x)$ 存在"好区间"，由(1)可知，存在 $m,n\in D(m<n)$，

使得 $\begin{cases}g(m)=m,\\ g(n)=n,\end{cases}$

即关于 $x$ 的方程 $g(x)=x$ 在定义域 $D$ 内有两个不等的实数根。

即 $(a^x-2a)(a^x-3a)=a^x$ 在定义域 $D$ 内有两个不等的实数根。(*)

设 $t=a^x$，则(*)$\Leftrightarrow(t-2a)(t-3a)=t$，

即 $t^2-(5a+1)t+6a^2=0$ 在 $(3a,+\infty)$ 内有两个不等的实数根。

设 $p(t)=t^2-(5a+1)t+6a^2$，

则 $\begin{cases}a>0, a\neq1,\\ \Delta=(5a+1)^2-24a^2>0,\\ \frac{5a+1}{2}>3a,\\ p(3a)=9a^2-(5a+1)3a+6a^2>0\end{cases}$ 无解。

所以函数 $g(x)$ 不存在"好区间"。

## 3.3 幂函数

### 变式题型

变式 B 【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$，将点 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 代入得 $\alpha=-2$，则 $f(x)=x^{-2}$，$f(6)=\frac{1}{36}$。

### 题组A 学考通关测试

正文 P159

1 C 【解析】①不正确，$n=0$ 时，$y=x^n$ 的图像是一条不包含点 $(0,1)$ 的直线；②③正确。

2 A 【解析】$y=2^x$ 是指数函数，不是幂函数。

3 C 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，故选 C。

4 C 【解析】$y=x^{-1}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，值域为 $\{y|y\neq0\}$，符合题意；

$y=x^0$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，值域为 $\{y|y=1\}$，不符合题意；

$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant0\}$，值域为 $\{y|y\geqslant0\}$，符合题意；

$y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$，符合题意；

$y=x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{y|y\geqslant0\}$，不符合题意；

$y=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$，符合题意；

从而 $C=\left\{-1,\frac{1}{2},1,3\right\}$，故选 C。

5 $f(x)=x^{\log_2 3}$ 【解析】由 $3f(2)=f(4)$ 得 $3\cdot2^{\alpha}=4^{\alpha}$，那么 $\alpha=\log_2 3$，即 $f(x)=x^{\log_2 3}$。

6 解：因为函数 $f(x)=x^{-2m^2+m+3}(m\in\mathbf{Z})$ 为偶函数，

则 $-2m^2+m+3$ 为偶数。

又 $f(3)<f(5)$，即 $3^{-2m^2+m+3}<5^{-2m^2+m+3}$，

所以 $-2m^2+m+3>0$，即 $-1<m<\frac{3}{2}$。

又 $m\in\mathbf{Z}$，则 $m=0$ 或 $m=1$。

当 $m=0$ 时，$-2m^2+m+3=3$ 是奇数，不合题意；

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^2$，符合题意。

所以 $m=1$，$f(x)=x^2$。

### 题组B 高考通关测试

正文 P160

1 A 【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$，则 $f(2)=2^{\alpha}=8$，则 $\alpha=3$，由 $f(x)=x^3=27$，得 $x=3$，故选 A。

2 A 【解析】$y=x^m$ 是偶函数，则由选项知 $m$ 的值可能为 2 或 $-2$，又 $x\in(0,+\infty)$ 时为减函数，则 $m=-2$。

3 A 【解析】根据幂函数的定义得 $m^2+3m+3=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=-2$，所以 $y=\frac{1}{x^4}$ 或 $y=\frac{1}{x^3}$。又因为函数图像关于原点对称，所以 $y=\frac{1}{x^3}$，即 $m=-2$。

4 D 【解析】由题意得 $2^{\alpha}=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=-1$，则 $y=f(x)=x^{-1}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。故选 D。

5 B 【解析】由 $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b<1$ 得：$0<b<a<1$，由指数函数 $y=a^x$ 单调性可知：$a^a<a^b$，由幂函数 $y=x^a$ 单调性可知：$b^a<a^a$，综上所述：$b^a<a^a<a^b$。故选 B。

6 $(2,4)$ 【解析】令 $x-1=1$，得 $x=2$，所以 $f(2)=1^{\alpha}+3=4$，所以 $f(x)=(x-1)^{\alpha}+3$ 的图像恒过定点 $(2,4)$，即点 $P$ 的坐标为 $(2,4)$。

7 1 【解析】因为幂函数 $y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-1}$ 的图像不过原点，所以 $\begin{cases}m^2-m-1\leqslant0,\\ m^2-3m+3=1,\end{cases}$ 解得 $m=1$，故答案为 1。

8 3 【解析】因为幂函数 $y=(m^2-2m-2)x^{m^2-3m-2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上

是减函数,所以$\begin{cases} m^2-2m-2=1, \\ m^2-3m-2<0, \end{cases}$解得$m=3$。故答案为3。

**9** ①④⑤【解析】由$1\leqslant x\leqslant 2$得$2\leqslant 2^x\leqslant 4$,因此$f(x)$的定义域为$[2,4]$,从而$2\leqslant \frac{x}{2}\leqslant 4$,即$4\leqslant x\leqslant 8$,故$f\left(\frac{x}{2}\right)$的定义域为$[4,8]$,因此①正确;当$x=1$时,$f(x)=-1$,因此②错误;当$\alpha=0$时,$y=x^0$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$,且$x\neq 0\}$,其图像是直线$y=1$上去掉一点,因此③错误;$\log_a\frac{1}{2}>1=\log_a a$,因此$\begin{cases} 0<a<1, \\ \frac{1}{2}<a \end{cases}$或$\begin{cases} a>1, \\ \frac{1}{2}>a, \end{cases}$解得$\frac{1}{2}<a<1$,④正确;设$g(x)=x^2-2ax+1+a^2$,由$f(x)$的单调性知$g(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数,所以$a\geqslant 1$,⑤正确。因此所有正确命题的序号是①④⑤。

**10** 解:(1)由已知,$f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$为幂函数,则$(m-1)^2=1$,即$m=0$或$m=2$。

当$m=0$时,$f(x)=x^2$,在$(0,+\infty)$上是增函数;

当$m=2$时,$f(x)=x^{-2}$,在$(0,+\infty)$上是减函数。

因此实数$m$的值为0,且$f(x)=x^2$。

(2)由(1)知当$x\in[1,2]$时,$f(x)$的值域为$A=[1,4]$,$g(x)=2^x-k$的值域为$B=[2-k,4-k]$,

$A\cup B=A$等价于$B\subseteq A$,因而$\begin{cases} 2-k\geqslant 1, \\ 4-k\leqslant 4, \end{cases}$即$0\leqslant k\leqslant 1$。所以实数$k$的取值范围为$[0,1]$。

**11** 解:(1)幂函数$f(x)=x^{-m^2+2m+3}(m\in\mathbf{Z})$为偶函数,且在$(0,+\infty)$上是增函数,则$-m^2+2m+3$为偶数,且$-m^2+2m+3>0$,得$-1<m<3$,则$m=0$或$m=1$或$m=2$。

当$m=0$与$m=2$时,$-m^2+2m+3=3$是奇数,不合题意,当$m=1$时,$f(x)=x^4$。

(2)由(1)知$g(x)=x^2+2x+c=(x+1)^2+c-1$,若$g(x)>2$恒成立,则$c-1>2$,即$c>3$。故实数$c$的取值范围为$(3,+\infty)$。

## 3.4 函数的应用(Ⅱ)

**变式题型**

**变式** 解:本金100万元,年利率10%,按单利计算,5年后的本利和是$100\times(1+10\%\times 5)=150$(万元)。

本金100万元,年利率9%,按每年复利一次计算,5年后的本利和是$100\times(1+9\%)^5\approx 153.86$(万元)。

由此可见按年利率9%每年复利一次投资要比按年利率10%单利投资更有利,5年后多得利息约3.86万元。

**题组A 学考通关测试** 正文 P167

**1** D【解析】函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的单调性相同,由此可排除C;直线$y=x+a$在$y$轴上的截距为$a$,则选项A中$0<a<1$,选项B中$a>1$,显然与$y=a^x$的图像不符,排除A,B,故选D。

**2** A【解析】由已知得$100=a\log_2(1+1)$,即$a=100$,所以$y=100\log_2(x+1)$,当$x=7$时,这种动物的数量为$100\log_2(7+1)=300$,故选A。

**3** C【解析】由已知得$6=e^b$,所以$b=\ln 6$,$24=e^{-10k+\ln 6}$,

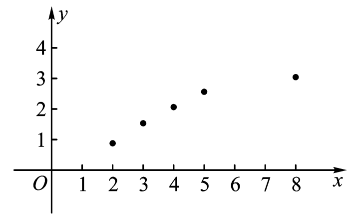
则$k=-\frac{1}{5}\ln 2$,所以$y=e^{\left(-\frac{1}{5}\ln 2\right)x+\ln 6}$。

当$x=-15$时,$y=e^{\left(-\frac{1}{5}\ln 2\right)(-15)+\ln 6}=48$。

**4** D【解析】设1月份产值为$a$,月平均增长率为$x$,则有$a(1+x)^{11}=ma$,所以$x=\sqrt[11]{m}-1$。

**5** $y=x^2$【解析】$y=x^2=x\cdot x$,而$u=x$比$u=\ln x$增长得快,所以在$(0,+\infty)$上$y=x^2$比$y=x\ln x$增长得快。

**6** ④【解析】画出散点图如图。




第6题图

由图可知上述点大体在函数$y=\log_2 x$的图像上,故选择$y=\log_2 x$可以近似地反映这些数据的规律。故填④。

**7** 解:(1)依题意得$(1-x)^n=a$,则$1-x=\sqrt[n]{a}$。$x=1-\sqrt[n]{a}$。

(2)设$n$年后年产能不超过2018年的年产能的25%,则$(1-10\%)^n\leqslant 25\%$,$\left(\frac{9}{10}\right)^n\leqslant\frac{1}{4}$,$n\lg\frac{9}{10}\leqslant\lg\frac{1}{4}$,$n(2\lg 3-1)\leqslant-2\lg 2$,$n\geqslant\frac{2\lg 2}{1-2\lg 3}$,$n\geqslant\frac{301}{23}$,$13<\frac{301}{23}<14$,且$n\in\mathbf{N}_+$,故$n$的最小值为14。

所以至少要到2032年才能使年产能不超过2018年的年产能的25%。

**题组B 高考通关测试** 正文 P167

**1** A【解析】从题图中看出,在时间段$[0,t_1]$,$[t_1,t_2]$内水面高度是匀速上升的,在$[0,t_1]$上升慢,在$[t_1,t_2]$上升快,故选A。

**2** A【解析】由题意得$\frac{4}{9}a=ae^{-50k}$,解得$e^{-25k}=\frac{2}{3}$,

设新丸的体积变为$\frac{8}{27}a$需经过$t$天。

令$ae^{-kt}=\frac{8}{27}a$,即$e^{-kt}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=(e^{-25k})^3=e^{-75k}$,则$t=75$,即需经过75天。

**3** C【解析】欲求税率,只需求出去年的需纳税部分,而去年需纳税部分包括去年的利润,广告费超支。

根据税率公式计算可得。由题意得,去年的利润为$1\,000-500-200=300$(万元),广告费超支:$200-(1\,000\times 2\%)=180$(万元),税率为$\frac{120}{300+180}=25\%$。故选C。

**4** C【解析】由题意得$a(1-8\%)^t=\frac{a}{2}$,所以$t=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.92}$,故C选项是正确的。

**5** B【解析】由$[m]$是大于或等于$m$的最小整数可得$[5.5]=6$,所以$f(5.5)=1.06\times(0.5\times[5.5]+1)=1.06\times 4=4.24$。故选B。

**6** ①②④【解析】由题可设野生水葫芦的面积$y$与时间$t$的关系式为$y=a^t$,由图知$a^1=2$,所以$a=2$,①正确;当$x=5$时,$y=32>30$,②正确;当$y=4$时,$t=2$,当$y=12$时,$t=\log_2 12>3.5$,从而可知野生水葫芦从4 $m^2$蔓延到12 $m^2$用时超过1.5个月,③错误;把$y_1=2$,$y_2=3$,$y_3=6$分别代入$y=2^t$,可得,$t_1=\log_2 2=1$,$t_2=\log_2 3$,$t_3=\log_2 6$。故$t_1+t_2=t_3$,④正确。

**7** 8【解析】依题意,得$\frac{2}{100}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{1\,000}$,即$\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{20}$。

则$n(\lg 2-\lg 3)\leqslant-(1+\lg 2)$,故$n\geqslant\frac{1+\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx 7.4$,

考虑到$n\in\mathbf{N}$,即至少要过滤8次才能达到市场要求。

**8** ④ ① ③ ②【解析】A容器下粗上细,水高度的变化先慢后快,故与④对应;

B容器为球形,水高度变化为快—慢—快,应与①对应;

C,D容器都是柱形的,水高度的变化速度都应是直线形,但C容器细,D容器粗,故水高度的变化为:C容器快,与③对应,D容器慢,与②对应。

9 解：(1)将 $x=8\ 100$ 代入函数关系式，得

$y=\frac{1}{2}\log_3 81=\frac{1}{2}\times 4=2$，所以一条鲑鱼的耗氧量是8 100个单位时，它的游速是2m /s。

(2)令 $y=0$，得$\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{100}=0$，即$\frac{x}{100}=1$，则 $x=100$，所以一条鲑鱼静止时的耗氧量为 100 个单位。

(3)由 $y_A>y_B$，得$\frac{1}{2}\log_3\frac{x_A}{100}>\frac{1}{2}\log_3\frac{x_B}{100}$，即 $\log_3 x_A>\log_3 x_B$，则 $x_A>x_B$，所以鲑鱼 $A$ 的耗氧量较大。

10 解：(1)设投资债券类稳健型产品的收益 $y$ 与投资额 $x$ 的函数关系式为 $y>k_1x(x\geqslant 0)$，结合已知得$f(1)=\frac{1}{8}=k_1$，即$f(x)=\frac{1}{8}x$ $(x\geqslant 0)$；

设投资股票类风险型产品的收益 $y$ 与投资额 $x$ 的函数关系式为 $y=g(x)=k_2\sqrt{x}(x\geqslant 0)$，结合已知得 $g(1)=\frac{1}{2}=k_2$，即 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}(x\geqslant 0)$。

(2)设投资稳健型产品 $x$ 万元，则投资风险型产品$(20-x)$万元，依题意得获得收益为 $y=f(x)+g(20-x)=\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{20-x}$ $(0\leqslant x\leqslant 20)$，令 $t=\sqrt{20-x}(0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{5})$，则 $y=\frac{20-t^2}{8}+\frac{t}{2}=-\frac{1}{8}(t-2)^2+3$，所以当 $t=2$，即 $x=16$ 时，$y$ 取得最大值，最大值为 3。

故当投资债券类稳健型产品 16 万元，股票类风险型产品 4 万元时，可使投资获得最大收益，最大收益是 3 万元。

# 第三章 单元复习方案

## 测评 · 高考模拟卷

正文 P171

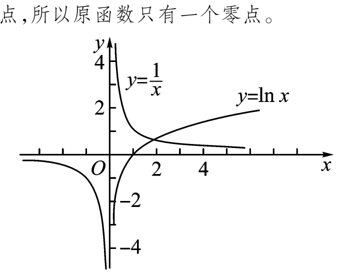
1 C 【解析】由 $\begin{cases}x-2>0,\\x-3\neq 0,\end{cases}$ 得 $x>2$ 且 $x\neq 3$。∴ 函数 $f(x)=\frac{\log_2(x-2)}{x-3}$的定义域是$(2,3)\cup(3,+\infty)$。故选 C。

2 C 【解析】原式 $=1+4-4+\lg 25+\lg 4=1+2=3$。故选 C。

3 B 【解析】$1<a=\left(\frac{2}{e}\right)^{-0.3}=\left(\frac{e}{2}\right)^{0.3}<\left(\frac{e}{2}\right)^{0.4}=b$，$c=\log_{\frac{2}{e}} e=\frac{1}{\ln 2-1}<0$，则 $c<a<b$，故选 B。

4 D 【解析】易知$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称。因为$f(-x)=\frac{4^{-x}+1}{2^{-x}}=\frac{1+4^x}{2^x}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，故其图像关于 $y$ 轴对称。

5 C 【解析】令 $f(x)=0$，得 $\ln x=\frac{1}{x}$，在同一直角坐标系中作出函数$y=\ln x$与 $y=\frac{1}{x}$的图像，如图，由图可知两个函数的图像只有一个交点，所以原函数只有一个零点。




第 5 题图

6 C 【解析】因为$f(x)$是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，又 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x$，所以 $f[f\left(\frac{1}{e^2}\right)]=f(-2)=-f(2)=-\ln 2$。

7 A 【解析】因为 $-1<x<0$，所以 $0<x+1<1$，又因为 $f(x)>0$，所以 $0<3a<1$，所以 $0<a<\frac{1}{3}$。

8 D 【解析】因为函数$f(x)$与函数 $f(-x)$关于 $y$ 轴对称，所以由 $f(x)$的图像可得 $y=f(-x)$的图像，再向右平移一个单位长度可得 $y=f(1-x)$的图像。

9 A 【解析】设该商品的原价为 $x$，这三次价格的平均增长率为 $y$，则由题意得 $x(1-10\%)(1+y)^3=x$，$(1+y)^3=\frac{10}{9}$。所以 $y=\sqrt[3]{\frac{10}{9}}-1$。

10 D 【解析】因为函数$f(x)$为奇函数，且定义域为 $\mathbf{R}$，则在 $x=0$ 处有 $f(0)=0$，即$\frac{2^0-a}{2^0+1}=0$，解得 $a=1$，所以$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$。令 $f(x)>\frac{1}{3}$，则$\frac{2}{2^x+1}<\frac{2}{3}$，所以 $2^x>2$，则 $x>1$。所以使得 $f(x)>\frac{1}{3}$成立的 $x$ 的取值范围为$(1,+\infty)$，故选 D。

11 D 【解析】$\log_a b>\log_a a=1$，当 $a>1$ 时，$b>a>1$，所以 $a-1>0$，$b-1>0$，$b-a>0$，所以$(a-1)(b-1)>0$，$(a-1)(a-b)<0$，$(b-1)\cdot(b-a)>0$；当 $0<a<1$ 时，所以 $0<b<a<1$，所以 $a-1<0$，$b-1<0$，$b-a<0$，所以$(a-1)(b-1)>0$，$(a-1)(a-b)<0$，$(b-1)(b-a)>0$。故选 D。

12 C 【解析】设指数函数为 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$，显然其图像不过点 $M$，$P$；设对数函数为 $y=\log_b x(b>0$，且 $b\neq 1)$，显然其图像不过点 $N$。故选 C。

13 $(-\infty,1)$ 【解析】由题可得，$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}>\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$，则 $x-3<-2$，所以 $x<1$。

14 $(-8,-6]$ 【解析】令 $g(x)=3x^2-ax+5$，其图像的对称轴为直线 $x=\frac{a}{6}$。依题意，有$\begin{cases}\frac{a}{6}\leqslant -1,\\g(-1)>0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}a\leqslant -6\\a>-8。\end{cases}$ 故 $a\in(-8,-6]$。

15 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 【解析】由图像可知，点 $A(x_A,2)$在函数 $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$ 的图像上，所以 $2=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_A$，$x_A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$。

点 $B(x_B,2)$在函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像上，所以 $2=x_B^{\frac{1}{2}}$，$x_B=4$。

点 $C(4,y_C)$在函数 $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ 的图像上，所以$y_C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$。

因为 $x_D=x_A=\frac{1}{2}$，$y_D=y_C=\frac{1}{4}$，所以点 $D$ 的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$。

16 ③ 【解析】本题主要考查命题的真假判断及函数的性质。对于①，幂函数$f(x)=\frac{1}{x}$有两个单调递减区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$，但函数$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不具有单调性，故①不正确；对于②，因为函数$f(x)=\sqrt{2^{mx^2+4mx+3}-1}$的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $2^{mx^2+4mx+3}\geqslant 1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $mx^2+4mx+3\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立。

当 $m=0$ 时，$3>0$，满足题意；

当 $m\neq 0$ 时，有$\begin{cases}m>0,\\\Delta=16m^2-4\times 3m\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $0<m\leqslant\frac{3}{4}$。

综上，实数 $m$ 的取值范围是$\left[0,\frac{3}{4}\right]$，故②不正确；

对于③，若函数$f(x)=\log_a|x|(a>0$，且 $a\neq 1)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则 $a>1$，$a+1>2$，则$f(-2)=f(2)<f(a+1)$，故③正

确;对于④,若$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,x<1,\\ \log_a x,x\geqslant 1\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的减函数,则$\begin{cases}3a-1<0,\\0<a<1,\\3a-1+4a\geqslant 0,\end{cases}$解得$\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$,则$a$的取值范围是$\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$,故④不正确。故填③。

17 解:(1)原式$=\frac{5}{2}-1+16^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-1+8+\frac{1}{2}=10$。

(2)原式$=(3^3)^{\frac{2}{3}}-3\times\log_2 2^{-3}+\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2=9+9+\lg 10=19$。

18 (1)证明:$f(a)=f(b)\Rightarrow|\lg a|=|\lg b|$。
又因为$0<a<b$,所以$0<a<1<b$,
所以$-\lg a=\lg b$,所以$ab=1$。

(2)解:存在。证明如下:由(1)得$a=\frac{1}{b}$,所以$\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{1}{b}+b}{2}\geqslant\frac{2}{2}=1$。

由$f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,得$\lg b=2\lg\frac{a+b}{2}$,

即$b=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,所以$a^2+b^2+2ab-4b=0$,

所以$\left(\frac{1}{b}\right)^2+b^2+2-4b=0$,即$b^4-4b^3+2b^2+1=0$。
令$g(b)=b^4-4b^3+2b^2+1$。
因为$g(3)=3^4-4\times3^3+2\times3^2+1=-8<0$,
$g(4)=4^4-4\times4^3+2\times4^2+1=33>0$,
所以$g(3)\times g(4)<0$,又$g(b)$是连续函数,
所以在区间(3,4)内,$g(b)=0$有实数解。
故存在$b$满足$3<b<4$。

19 解:(1)由题意得$\begin{cases}a^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},\\\left(\frac{1}{4}\right)^b=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{16},\\b=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$F(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{16}\right)^x,x\leqslant\frac{1}{4},\\x^{\frac{1}{2}},x>\frac{1}{4}。\end{cases}$

(2)因为$a^b=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$,$b^a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}}$,

所以$a^b=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$,

因为$\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}}$,所以$a^b<b^a$。

(3)由题意得$(m+4)^{-\frac{1}{2}}<(3-2m)^{-\frac{1}{2}}$,

所以$\begin{cases}m+4>0,\\3-2m>0,\\m+4>3-2m,\end{cases}$解得$-\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$,

所以$m$的取值范围是$\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$。

20 解:(1)任取$x_1,x_2\in[1,+\infty)$且$x_1<x_2$,则$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\frac{a}{x_2}+2-x_1-\frac{a}{x_1}-2=(x_2-x_1)\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right)$。

当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{2x_1x_2}\right)$。

因为$x_1<x_2$,所以$x_2-x_1>0$。

因为$x_1\geqslant1,x_2\geqslant1$,所以$\frac{1}{2x_1x_2}\leqslant\frac{1}{2}$,所以$1-\frac{1}{2x_1x_2}>0$,

所以$f(x_2)-f(x_1)>0$,所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数。

当$x=1$时,$f(x)$取得最小值,为$f(1)=1+\frac{1}{2}+2=\frac{7}{2}$,

所以$f(x)$的值域为$\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$。

(2)$f(x)=x+\frac{a}{x}+2$可变形为$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$。

因为对任意$x\in[1,+\infty)$,$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$恒成立,所以只需对任意$x\in[1,+\infty)$,$x^2+2x+a>0$恒成立。
设$g(x)=x^2+2x+a,x\in[1,+\infty)$。
因为$g(x)$图像的对称轴为直线$x=-1$。
所以只需$g(1)>0$即可,则$g(1)=3+a>0$,所以$a>-3$。
所以实数$a$的取值范围是$(-3,+\infty)$。

21 解:(1)令$\log_a x=t$,则$x=a^t$,所以$f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$。

所以$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})(x\in\mathbf{R})$。

因为$f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})=-f(x)$,
所以$y=f(x)$为奇函数。

当$a>1$时,$y=a^x$为增函数,$y=-a^{-x}$为增函数,且$\frac{a}{a^2-1}>0$,所以$y=f(x)$为增函数。

当$0<a<1$时,$y=a^x$为减函数,$y=-a^{-x}$为减函数,且$\frac{a}{a^2-1}<0$,
所以$y=f(x)$为增函数,所以$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数。
(2)因为$y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,所以$y=f(x)-4$也是$\mathbf{R}$上的增函数。
由$x<2$,得$f(x)<f(2)$,要使$f(x)-4$在$(-\infty,2)$上恒为负数,
只需$f(2)-4\leqslant0$,即$\frac{a}{a^2-1}(a^2-a^{-2})\leqslant4$。

所以$\frac{a}{a^2-1}\left(\frac{a^4-1}{a^2}\right)\leqslant4$,所以$a^2+1\leqslant4a$,所以$a^2-4a+1\leqslant0$,所以$2-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2+\sqrt{3}$。
又因为$a\neq1$,所以$a$的取值范围为$[2-\sqrt{3},1)\cup(1,2+\sqrt{3}]$。

22 (1)证明:当$x\geqslant7$时,$f(x+1)-f(x)=\frac{0.4}{(x-3)(x-4)}$,设$g(x)=\frac{0.4}{(x-3)(x-4)}$,$h(x)=(x-3)(x-4)$,易知函数$h(x)$的图像是抛物线,在$[7,+\infty)$上单调递增,故函数$g(x)$在$[7,+\infty)$上单调递减,所以当$x\geqslant7$时,掌握程度的增长量$f(x+1)-f(x)$总是下降的。

(2)解:由$f(6)=0.85$可知$0.1+15\ln\frac{a}{a-6}=0.85$,整理得$\frac{a}{a-6}=e^{0.05}$,解得$a=\frac{6e^{0.05}}{e^{0.05}-1}\approx123$,又$123\in(121,127]$,所以该学科是乙学科。

# 必修1 模块备考方略

## 测评·高考模拟卷

正文 P186

1 A【解析】$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x>1\}$,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|1<x<2\}$。故选A。

2 C【解析】因为$f(x)$为偶函数,且在$(-\infty,0)$上是减函数,$f(-1)=0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,$f(1)=0$,因为$xf(x)>0$,所以$\begin{cases}x>0,\\f(x)>0=f(1)\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\f(x)<0=f(-1),\end{cases}$解得$x>1$或$-1<x<0$。

3 A【解析】由题意得,函数$y=x+\frac{1}{x}$和$y=2^x+\frac{1}{2^x}$,满足

$f(-x)=-f(x)$，所以都是奇函数，函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 满足 $f(-x)=f(x)$，所以是偶函数，故选 A。

4 B【解析】因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，所以函数 $f(x)$ 为减函数，所以 $\begin{cases}a-2<0,\\ 2(a-2)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2-1,\end{cases}$ 所以 $a\leqslant\frac{13}{8}$。

5 B【解析】由题可知 $A=[1,+\infty)$，$B=[0,2]$，所以 $A\cap B=[1,2]$。故选 B。

6 C【解析】由 $f(x)$ 是偶函数，它在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，$f(\lg x)>f(1)$，得 $|\lg x|<1$，所以 $-1<\lg x<1$，解得实数 $x$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{10},10\right)$。

7 B【解析】和的函数值等于函数值的积的特征，某典型代表函数为指数函数，又所求函数为单调递增函数，故选 B。

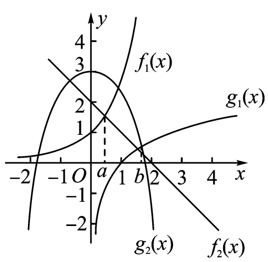
8 A【解析】由题意得：$f(x)=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+n^2-\frac{m^2}{4}$，$g(x)=\left(x+\frac{m}{2}+1\right)^2+n^2-\frac{m^2}{4}$，可知 $f(x)$ 对称轴为 $x=-\frac{m}{2}$，$g(x)$ 对称轴为 $x=-\frac{m}{2}-1$。由 $f(x)=g(x)$ 可得：$x=-\frac{m+1}{2}$，由图像可知，当 $x<-\frac{m+1}{2}$ 时，$f(x)>g(x)$；当 $x>-\frac{m+1}{2}$ 时，$f(x)<g(x)$。若对任意 $t\in\mathbf{R}$，$f(t)$ 和 $g(t)$ 至少有一个非负值，只需 $x=-\frac{m+1}{2}$ 时函数值大于等于 0，此时：$f\left(-\frac{m+1}{2}\right)=g\left(-\frac{m+1}{2}\right)=\frac{1}{4}+n^2-\frac{m^2}{4}\geqslant 0$ 对 $n\in\mathbf{R}$ 恒成立。即：$m^2\leqslant 1+4n^2\Rightarrow m^2\leqslant 1\Rightarrow m_{\max}=1$。故选 A。

9 D【解析】对于 A，$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$，$g(x)=x-1$，解析式不同；对于 B，$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}(x\neq 1)$，$g(x)=x+1$，$x\in\mathbf{R}$，定义域不同；对于 C，$f(x)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$，$x>1$，$g(x)=\lg(x^2-1)$，$x>1$ 或 $x<-1$，定义域不同；对于 D，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且解析式相同。

10 B【解析】$\log_2 x+\log_2(x-1)=1\Rightarrow\log_2[x(x-1)]=\log_2 2\Rightarrow x(x-1)=2$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$。又 $x>1$，所以 $x=2$，即 $M=\{2\}$，由 $2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4=0\Rightarrow 2\cdot(2^x)^2-9\cdot 2^x+4=0$，解得 $2^x=4$ 或 $2^x=\frac{1}{2}$，所以 $x=2$ 或 $x=-1$，即 $N=\{-1,2\}$，所以 $M\subsetneqq N$。

11 B【解析】由题意可知 $f(|\log_2 a|)\leqslant f(x^2-2x+2)$ 恒成立，又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $|\log_2 a|\leqslant x^2-2x+2$ 恒成立，即 $|\log_2 a|\leqslant(x^2-2x+2)_{\min}$。又 $x^2-2x+2\geqslant 1$，所以 $|\log_2 a|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\log_2 a\leqslant 1$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$。

12 A【解析】由 $f(x)=e^x+x-2=0$，$g(x)=\ln x+x^2-3=0$ 得 $e^x=-x+2$，$\ln x=-x^2+3$，分别令 $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=-x+2$，$g_1(x)=\ln x$，$g_2(x)=-x^2+3$。在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=-x+2$，$g_1(x)=\ln x$，$g_2(x)=-x^2+3$ 的图像，如图，由图像知 $0<a<1$，$1<b<2$。且 $g_1(a)<g_2(a)$，所以 $g(a)<0$。又 $f_1(b)>f_2(b)$，所以 $f(b)>0$，即 $g(a)<0<f(b)$。故选 A。



第 12 题图

13 $[0,4]$【解析】当 $m=0$ 时，显然函数有意义，当 $m\neq 0$，则 $mx^2+mx+1\geqslant 0$ 对一切实数恒成立，所以 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta\leqslant 0,\end{cases}$ 得 $0<m\leqslant 4$，综上，得 $0\leqslant m\leqslant 4$。

14 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},1\right)$【解析】当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=3^x\in(0,1]$，所以 $y=f[f(x)]=f(3^x)=-2^{-3^x}\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=-2^{-x}\in(-1,0)$，所以 $y=f[f(x)]=f(-2^{-x})=3^{-2^{-x}}\in\left(\frac{1}{3},1\right)$。

综上，$y=f[f(x)]$ 的值域是 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},1\right)$。

15 $-2$【解析】$\because f(2)=1$，$\therefore\log_2(4+a)=1$，$\therefore 4+a=2$，解得 $a=-2$，故答案为 $-2$。

16 ①②【解析】①由 $A=\{x,y\}$，$B=\{0,x^2\}$，$A=B$ 可得 $\begin{cases}y=0,\\ x=x^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=x^2\end{cases}$（舍）。故 $x=1$，$y=0$，正确；

②由函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，则函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $-1<2x+1<1$，解得 $-1<x<0$，即 $x\in(-1,0)$，正确；

③函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，单调区间不能用并集符号，错误；

④由题意 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(1)=1$，则 $\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(4)}{f(3)}+\cdots+\frac{f(2\,016)}{f(2\,015)}+\frac{f(2\,018)}{f(2\,017)}=\frac{f(1)\cdot f(1)}{f(1)}+\frac{f(3)\cdot f(1)}{f(3)}+\cdots+\frac{f(2\,015)\cdot f(1)}{f(2\,015)}+\frac{f(2\,017)\cdot f(1)}{f(2\,017)}=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=1+1+\cdots+1=1\,009$，错误。

17 解：(1) 原式 $=\pi-3+(0.2)^{-1}-0.5\times 4=\pi-3+5-2=\pi$。

(2) 原式 $=\frac{1}{2}\lg\frac{2^5}{7^2}-\frac{4}{3}\lg 2^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\lg(5\times 7^2)+2\times 2^{\log_2 3}=\frac{1}{2}\lg 2^5-\frac{1}{2}\lg 7^2-2\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5+\frac{1}{2}\lg 7^2+2\times 3=\frac{1}{2}\lg(2^5\times 5)-2\lg 2+6=\frac{1}{2}(\lg 2^4+1)-2\lg 2+6=\frac{13}{2}$。

18 解：(1) 因为 $3^x>0$，所以 $3^x+1\neq 0$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$。$f(x)$ 是奇函数。

证明如下：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)=1-\frac{2}{3^x+1}=\frac{3^x+1-2}{3^x+1}=\frac{3^x-1}{3^x+1}$，所以 $f(-x)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=\frac{1-3^x}{1+3^x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数。

(2) 证明：任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{2}{3^{x_1}+1}-\left(1-\frac{2}{3^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{3^{x_2}+1}-\frac{2}{3^{x_1}+1}=\frac{2(3^{x_1}-3^{x_2})}{(3^{x_2}+1)(3^{x_1}+1)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $3^{x_1}<3^{x_2}$，

所以 $3^{x_1}-3^{x_2}<0$，又 $3^{x_1}+1>0$，$3^{x_2}+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在其定义域上是增函数。

(3) 由 $f(3m+1)+f(2m-3)<0$ 得 $f(3m+1)<-f(2m-3)$，

因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $-f(2m-3)=f(3-2m)$，

所以 $f(3m+1)<f(3-2m)$。

由 (2) 知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

所以 $f(3m+1)<f(3-2m)\Leftrightarrow 3m+1<3-2m$，

所以 $m<\frac{2}{5}$，故不等式 $f(3m+1)+f(2m-3)<0$ 的解集为

$\left\{m \,\middle|\, m<\frac{2}{5}\right\}$。

19 解：(1)函数 $y=f(x)$ 有两个零点，即方程 $ax^2-2x+1=0(a\neq0)$ 有两个不等实根，令 $\Delta>0$，即 $4-4a>0$，解得 $a<1$。

又因为 $a\neq0$，所以 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$。

(2)若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 上各有一个零点，由 $y=f(x)$ 的图像可知，只需 $\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1>0,\\a-1<0,\\4a-3>0,\end{cases}$

解得 $\frac{3}{4}<a<1$。

所以 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{3}{4},1\right)$。

20 解：(1)当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时，$L(x)=2+0.5x$；

当 $x>30$ 时，$L(x)=2+30\times0.5+(x-30)\times0.6=0.6x-1$，

所以 $L(x)=\begin{cases}2+0.5x,0\leqslant x\leqslant30,\\0.6x-1,x>30。\end{cases}$(注：$x$ 也可不取 0)

(2)当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时，令 $L(x)=2+0.5x=35$ 得 $x=66$，舍去；

当 $x>30$ 时，由 $L(x)=0.6x-1=35$ 得 $x=60$，

所以老王家该月用电 60 kW·h。

(3)设按方案二收费为 $F(x)$ 元，则 $F(x)=0.58x$。

当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时，由 $L(x)<F(x)$，得 $2+0.5x<0.58x$，

所以 $x>25$，所以 $25<x\leqslant30$；

当 $x>30$ 时，由 $L(x)<F(x)$，得 $0.6x-1<0.58x$，

所以 $x<50$，所以 $30<x<50$。

综上，$25<x<50$。

故老王家月用电量在 25 kW·h 到 50 kW·h 范围内(不含 25 kW·h、50 kW·h)时，选择方案一比方案二更好。

21 解：(1)因为 $a\in[-1,1]$，$x^2-2ax\leqslant3$ 恒成立，令 $g(a)=-2ax+x^2$，$a\in[-1,1]$，则 $g(a)_{\max}\leqslant3$，

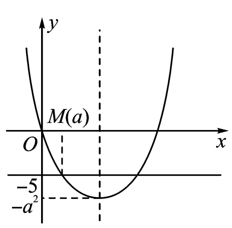
所以 $\begin{cases}g(-1)=x^2+2x\leqslant3,\\g(1)=x^2-2x\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant1$。

(2)证明：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，

$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-[f(x_1)+f(x_2)]=2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-4a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-x_1^2+2ax_1-x_2^2+2ax_2=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{2}-x_1^2-x_2^2=-\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\leqslant0$，

所以 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$。

(3)$f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$，其图像的对称轴 $x=a>0$，$x\in[0,M(a)]$，由不等式 $|f(x)|\leqslant5$ 恒成立得 $f(x)_{\max}\leqslant5$ 且 $f(x)_{\min}\geqslant-5$。




第 21 题图

因为 $a>0$，当 $-a^2<-5$，即 $a>\sqrt{5}$ 时，则 $M(a)<a$，$f(x)$ 在 $[0,M(a)]$ 上为减函数。

由题意知 $f(M(a))=-5$，由 $f(x)=-5$ 且 $x<a$，

解得 $x=a-\sqrt{a^2-5}$，

所以 $a>\sqrt{5}$ 时，$M(a)=a-\sqrt{a^2-5}$。

当 $-5\leqslant-a^2<0$，即 $0<a\leqslant\sqrt{5}$ 时，$f(x)_{\min}\geqslant-5$ 或 $f(x)_{\max}\leqslant5$ 总成立，由题意得，$M(a)>a$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为减函数，$f(x)$ 在 $[0,M(a)]$ 上为增函数，又 $f(0)=0$，则 $f(M(a))=5$，$M(a)>a$，

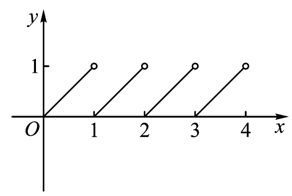
由 $f(x)=5$，$x>a$ 解得 $x=a+\sqrt{a^2+5}$，

所以 $0<a\leqslant\sqrt{5}$ 时，$M(a)=a+\sqrt{a^2+5}$，

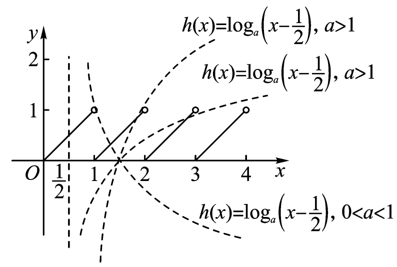
综上，$M(a)=\begin{cases}a-\sqrt{a^2-5},a>\sqrt{5},\\a+\sqrt{a^2+5},0<a\leqslant\sqrt{5}。\end{cases}$

22 解：(1)$f(x)=\begin{cases}0,0\leqslant x<1,\\1,1\leqslant x<2,\\2,2\leqslant x<3,\\3,3\leqslant x<4。\end{cases}$

(2)$g(x)=x-f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x<1,\\x-1,1\leqslant x<2,\\x-2,2\leqslant x<3,\\x-3,3\leqslant x<4,\end{cases}$ 图像如图①所示：




①




②

第 22 题图

(3)方程 $g(x)-\log_a\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ 有且仅有一个实根等价于 $g(x)$ 与 $h(x)=\log_a\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的图像有且仅有一个交点。由图②可知：

当 $0<a<1$ 时，$h(1)=\log_a\frac{1}{2}\geqslant1=\log_a a$，

解得 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$；

当 $a>1$ 时，$h(2)=\log_a\frac{3}{2}>1=\log_a a$ 或 $\begin{cases}h(3)=\log_a\frac{5}{2}<1,\\h(4)=\log_a\frac{7}{2}\geqslant1,\end{cases}$

解得 $1<a<\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{2}<a\leqslant\frac{7}{2}$。

综上，$a$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$。