答案与解析

专题一　计数原理

第一节　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

学业测评

1. C 【解析】按横坐标 a 的值分三种情况讨论:①当 $a=1$ 时,$b=5,6,7$,有三个点;②当 $a=-2$ 时,$b=5,6,7$,有三个点;③当 $a=3$ 时,$b=5,6,7$,有三个点. 由分类加法计数原理,得 $N=3+3+3=9$(个).

2. A 【解析】取 2 个数作和为 $1+2=3,1+3=4,1+4=5,2+3=5,2+4=6,3+4=7$,其和的结果为 3,4,5,6,7;取 3 个数作和为 $1+2+3=6,1+2+4=7,1+3+4=8,2+3+4=9$,其和的结果为 6,7,8,9;取 4 个数作和为 $1+2+3+4=10$,其和的结果为 10. 以上得到的和可以为 3,4,5,6,7,8,9,10,共 8 种.

3. C 【解析】此问题分两类:

(1)以集合 M 中的元素作为横坐标,集合 N 中的元素作为纵坐标,集合 M 中任取一个元素的方法有 3 种,要使点在第一、第二象限内,则集合 N 中只能取 5、6 两个元素中的一个,有 2 种方法,根据分步乘法计数原理有 $3\times2=6$(个);

(2)以集合 N 中的元素作为横坐标,集合 M 中的元素作为纵坐标,集合 N 中任取一个元素的方法有 4 种,要使点在第一、第二象限内,则集合 M 中只能取 1、3 两个元素中的一个,有 2 种方法,根据分步乘法计数原理,有 $4\times2=8$(个).

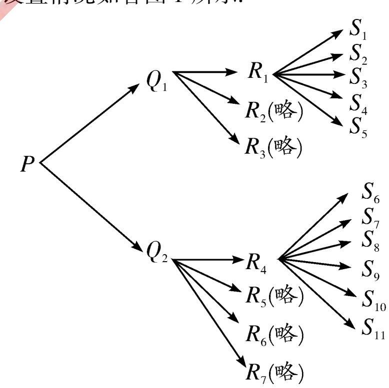
综合(1)、(2)得,共有 $6+8=14$(个).

4. 5 【解析】按跳动的顺序分类枚举. 设 $A(1,0)$,$B(2,0)$,$C(3,0)$,$D(4,0)$,$A'(-1,0)$,$O(0,0)$,则质点经过的路线可以为 $O\to A\to O\to A\to B\to C$,$O\to A\to B\to A\to B\to C$,$O\to A\to B\to C\to B\to C$,$O\to A\to B\to C\to D\to C$,$O\to A'\to O\to A\to B\to C$,所以共有 5 种.

5. 20 【解析】按既会钢琴又会小号的人当选的情况分类,每类中分步计数. 由题意知,在艺术小组 9 人中,有且仅有 1 人既会钢琴又会小号(称为“多面手”),只会钢琴的有 6 人,只会小号的有 2 人. 按“多面手”的选法分为两类:①若“多面手”入选,则有 $6+2=8$ 种选法;②若“多面手”不入选,则有 $6\times2=12$ 种选法. 因此选法共有 $8+12=20$(种).

6. (1)13　(2)36 【解析】(1)分三类,即个位上的数字是 0,2,4;每类分两步,即选个位上的数字,选十位上的数字. 可组成两位偶数 $1\times5+1\times4+1\times4=13$ 个. (2)分两类,即个位上的数字是 0 或 5;每类分三步,即选个位上的数字,选百位上的数字,选十位上的数字. 第一类,个位上的数字是 0,只有 1 种方法,百位上的数字从 1～5 中选 1 个,有 5 种方法,从剩下的 4 个数字中选 1 个作为十位上的数字,有 4 种方法. 此种情况小计方法数为 $1\times5\times4=20$. 第二类,个位数是 5,百位上的数字从 1～4 中产生,十位上的数字从剩下的 4 个数字中产生. 此种情况小计方法数为 $1\times4\times4=16$. 共计 36 个.

7. (1)用 P 表示该公司的所有岗位,用 Q_i $(i=1,2)$ 表示系列,用 R_j $(j=1,2,\cdots,7)$ 表示部门,用 S_k $(k=1,2,\cdots,11)$ 表示岗位. 这家公司的岗位设置情况如答图 1 所示.



答图 1

(2)在系列 1 中选岗位,有选择方案 $3\times5=15$(种);系列 2 中选岗位,有选择方案 $4\times6=24$(种).

共有不同的选择方案 $15+24=39$(种).

8. 共分 5 步,其中第 2 步分为 3 类,第 4 步分为 2 类. 步与步之间使用“×”号,类与类之间使用“+”号.

“过五关”共有不同的方案 $2\times(1+3+4)\times2\times(7+8)\times5=2\ 400$(种).

9. 操场可从 6 种颜色中任选 1 种着色;餐厅

可从剩下的5种颜色中任选1种着色;宿舍区和操场、餐厅颜色都不能相同,故可从其余的4种颜色中任选1种着色;教学区和宿舍区、餐厅的颜色都不能相同,故可从其余的4种颜色中任选1种着色. 根据分步乘法计数原理,共有 $6\times5\times4\times4=480$ 种着色方案.

高考测评

1. A 【解析】利用分步乘法计数原理,6名学生逐一选择,故选择的方法数为 5^6.

2. B 【解析】0个对应位置上的数相同有1种方法,只有1个对应位置上的数相同有4种,只有2个对应位置上的数相同有6种方法,由分类加法计数原理知共有11个.

3. B 【解析】因为 $|x|<11$,所以共分10类. 当 $m=1$ 时,n 可等于 $2,3,\cdots,8$,共对应7个不同的椭圆;同理可得:当 $m=2,3,4,5,6,7,8$ 时各分别对应7个不同的椭圆;当 $m=9$ 或10时,各分别对应8个不同的椭圆. 综上,共 $7\times8+8\times2=72$(个).

4. B 【解析】第一步,从3个信封中挑选1个信封放置标号为1,2的卡片,有3种不同的选法;第二步,将标号为3,4,5,6的4张卡片放入另外2个信封中,每个信封放2个,有6种不同的放法. 由分步计数原理得,所求的不同的放法数为 $N=3\times6=18$.

5. 42 【解析】分别用 a,b,c 代表3种作物,先安排第一块试验田,有3种方法,不妨设放入 a;再安排第二块试验田,有 b 或 c 共2种方法,不妨设放入 b;第三块试验田也有2种方法,即 a 或 c.

(1)若第三块试验田放 c:$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{\ }\boxed{\ }$,则第四、五块试验田分别有2种方法,共 $2\times2=4$(种)方法.

(2)若第三块试验田放 a:$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\boxed{\ }\boxed{\ }$,则第四块试验田仍有 b 或 c 共2种放法:①若第四块试验田放 c:$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\boxed{c}\boxed{\ }$,则第五块试验田仍有2种方法. ②若第四块试验田放 b:$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{\ }$,则第五块试验田只能放 c,共1种方法.

综上,共有 $3\times2\times(2\times2+3)=42$(种)方法.

6. 14 【解析】因为四位数的每个数位上都有两种可能性,其中四个数字全是2或全是3的情况不合题意,所以适合题意的四位数有 $2^4-2=14$ 个.

7. 24 【解析】将三个球逐一放置,即“分步”,故方法数为 $4\times3\times2=24$.

8. 涂色属于分步问题. 不妨从 A 开始涂起,A 有三种颜色可涂,则 B,C 各有两种颜色可涂. D 的涂法根据 A,C 涂色是否相同分类. 若 A,C 涂色不相同,则 A,B,C,D 可涂颜色的种数分别是3,2,1,1,共有 $3\times2\times1\times1=6$(种). 若 A,C 涂色相同,则 A,B,C,D 可涂颜色的种数分别是3,2,1,2,共有 $3\times2\times1\times2=12$(种). 所以共有 $12+6=18$(种)不同的涂法.

第二节 排列与组合

排列

学业测评

1. D 【解析】由于最大数为 $m+20$,最小数为 m,因此 $(m+20)-m+1=21$,即有21个自然数(连续)相乘,故 $m(m+1)(m+2)\cdots(m+20)=A_{m+20}^{21}$.

2. 9 【解析】由已知可得 $n(n-1)=6(n-5)(n-6)$,即 $n^2-13n+36=0$,$\therefore n=4$ 或9. 又 $\because \begin{cases} n\geqslant2, \\ n-5\geqslant2, \end{cases}$ $\therefore n\geqslant7$,$\therefore n=4$ 应舍去,$\therefore n=9$.

3. 120 【解析】方法1:先排前排有 A_5^2 种方法,再排后排有 A_3^3 种方法,共有 $A_5^2A_3^3=5\times4\times3\times2\times1=120$(种)排法.

方法2:所求排列种数就是5个元素的全排列数,即 $A_5^5=120$(种). 因为分排与不分排排法种数相等,这种方法也称为:“分数问题直排法”.

4. 1 【解析】任取两数相乘其结果与顺序无关,所以(1)不是排列;而任取两数相除,有被除数和除数之分,与顺序有关,所以(2)是排列问题;对于(3),圆上任意两点就可确定一条弦,与顺序无关,也不是排列问题,故只有(2)是排列问题.

5. 264 【解析】由题意知,每天只能测8人次,上午不测“握力”,只能从其余四项中任由四人选择,共 $A_4^4=24$ 种. 下午只测“身高与体重”“立定跳远”“肺活量”“握力”四项,此时按步完成,可先让上午测了“台阶”的人选一项,若选到“握力”,则另外三人只能从“身高与体重”“立定跳远”“肺活量”中选一项,而这三项他们上午又各测过一次,故共有2种选择. 若上午测了“台阶”的人,从“身高与体重”“立定跳远”“肺活量”中任选一项,有3种选法,比如选到“身高与体

重”,此时上午测了“身高与体重”的人可以从“握力”“立定跳远”“肺活量”中任选一项,有 3 种选法,另外两人也就只有 1 种选择. 故有 $A_4^4\times(1\times2+3\times3)=24\times11=264$ 种. 故填 264.

6. B 【解析】首位只需选 2,3,4,5 即可,而个位数字是必须是偶数. 若首位选 2 或 4,则有 $A_2^1A_2^1A_4^3$ 个;若首位选 3 或 5,则有 $A_2^1A_3^1A_4^3$ 个,所以共有 $A_2^1A_2^1A_4^3+A_2^1A_3^1A_4^3=240$(个). 故选 B.

7. B 【解析】此题为插空问题, +, − 两个符号形成 3 个空,正好可将 1,2,3 放入 3 个空中,共有 $A_2^2\cdot A_3^3=12$ 种不同的排列.

8. $\because \dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$,

$\therefore$ 原式 $=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2!}\right)+\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}\right]=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

9. (1)只要从 9 名学生中任选三名排列即可,∴ 共有 $A_9^3=9\times8\times7=504$(种)排法.

(2)将排法分成两类:一类是甲站在排尾,其余的可全排,有 A_8^8 种排法;另一类是甲既不站排尾又不站排头有 A_7^1 种排法,乙不站排尾而站余下的 7 个位置中的一个有 A_7^1 种排法,其余 7 人全排列,于是这一类有 $A_7^1\cdot A_7^1\cdot A_7^7$ 种排法. 由分类加法计数原理知,共有 $A_8^8+A_7^1\cdot A_7^1\cdot A_7^7=287\ 280$(种)排法.

(3)女生必须站在一起,是女生的全排列,有 A_4^4 种排法. 将全体女生视为一个元素与其他男生全排列有 A_6^6 种排法. 由分步乘法计数原理知,共有 $A_4^4\cdot A_6^6=17\ 280$(种)排法.

(4)分两步. 第一步,男生的全排列有 A_5^5 种排法;第二步,男生排好后,男生之间有 4 个空,加上男生排列的两端共 6 个空,女生在这 6 个空中排列,有 A_6^4 种排法. 由分步乘法计数原理知,共有 $A_5^5\cdot A_6^4=43\ 200$(种)排法.

(5) $A_9^9\div A_3^3=60\ 480$(种)排法.

高考测评

1. C 【解析】先确定个位,再排 5 和 1,3,得 $3(A_3^2A_2^2+3A_2^2A_2^2+A_3^2A_2^2)=108$.

2. C 【解析】先排甲、乙,再排丙、丁,最后排余下的人. 若甲、乙值 1 号与 2 号或 6 号与 7 号,则可得 $2\times2(A_5^5-A_4^4)$;若甲、乙值 2 号至 6 号,则 $4\times2(A_4^4+3\times3A_3^3)$. 所以共有 $4\times(A_5^5-A_4^4)+8\times(A_4^4+9A_3^3)=384+624=1\ 008$ 种. 故选 C.

3. C 【解析】由于有 5 个彩灯,并且每个彩灯能闪亮 5 种颜色,因此一共有 $A_5^5=120$(个)不同的闪烁. 由于相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒,因此所有不同的闪烁的时间间隔共为 $119\times5=595$(秒). 又因为每一个闪烁中,每个彩灯持续时间为 1 秒,因此有 $120\times5=600$(秒)闪亮彩灯的时间,故满足题意的时间至少为 $595+600=1\ 195$(秒). 故选 C.

4. 24 【解析】第一步,摆 5 个空位置,○○○○○;第二步,3 个人带上凳子插入 5 个位置之间的四个空,有 $A_4^3=24$(种),故有 24 种不同坐法.

5. 3 600 【解析】利用插空法,先将 4 个音乐节目和 1 个曲艺节目全排列有 A_5^5 种,然后从 6 个空中选出 2 个空将舞蹈节目全排列有 A_6^2 种,共有 $A_5^5A_6^2=3\ 600$ 种.

6. (1)2 名女生站在一起有站法 A_2^2 种,视为一个元素与其余 5 人全排,有 A_6^6 种排法,所以有不同站法 $A_2^2\times A_6^6=1\ 440$(种).

(2)先站老师和女生,有站法 A_3^3 种,再在老师和女生形成的空隔(含两端)处插入男生,每空一人,则插入方法有 A_4^4 种,所以共有不同站法 $A_3^3\times A_4^4=144$(种).

(3)7 人全排列中,4 名男生不考虑身高顺序的站法有 A_4^4 种,而由高到低有从左到右和从右到左的不同,所以共有不同站法 $2\times\dfrac{A_7^7}{A_4^4}=420$(种).

(4)可分类求解如下:①老师站两端,有 $A_2^1\times A_4^1\times A_5^5$ 种站法;②老师不站两端(也不站中间),有 $A_4^1\times A_4^2\times A_4^4$ 种站法. 所以共有 $A_2^1A_4^1A_5^5+A_4^1A_4^2A_4^4=2\ 112$(种).

组合

学业测评

1. C 【解析】此题为平均分组问题,要在分组后除以三组的排列数 A_3^3.

2. D 【解析】此题可化归为:圆上 9 个点可组成多少个四边形,每个四边形的对角线的交点即为所求,所以,交点有 $C_9^4=126$(个).

3. B 【解析】先将 1,2 捆绑后放入信封中,有 C_3^1 种方法,再将剩余的 4 张卡片放入另外两个信封中,有 $C_4^2C_2^2$ 种方法,所以共有 $C_3^1C_4^2C_2^2=18$ 种方法.

4. C 【解析】满足要求的点的取法可分为 3 类:第 1 类,在四棱锥的每个侧面上除点 P 外任

取3点,有$4C_5^3$种取法;第2类,在两个对角面上除点P外任取3点,有$2C_4^3$种取法;第3类,过点P的四条棱中,每一条棱上的两点和与这条棱异面的两条棱的中点也共面,有$4C_2^1$种取法.所以,满足题意的不同取法共有$4C_5^3+2C_4^3+4C_2^1=56$(种).

5. C 【解析】本题主要考查排列组合的知识,解题的突破口为找出甲或乙赢的情况进行分析计算.依甲赢计算:打三局结束甲全胜只有1种;打四局结束甲前三局赢两局,第四局必胜有$C_3^2\times1=3$种;打五局结束甲前四局赢两局,第五局必胜有$C_4^2\times1=6$种;故甲胜共有10种,同样乙胜也有10种,所以共有20种,故选C.

6. 165 【解析】$\because C_2^2=C_3^3$, $\therefore$ 原式 $=C_3^3+C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2=C_4^3+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{10}^2=\cdots=C_{10}^3+C_{10}^2=C_{11}^3=165$.

7. 90 【解析】分配方案有$\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=\frac{10\times3\times6}{2}=90$(种).

8. 由C_{13+n}^{3n}知n满足$3n\leq13+n$, $\therefore n\leq\frac{13}{2}$;由$C_{2n}^{17-n}$知$n$必须满足$2n\geq17-n$, $\therefore n\geq\frac{17}{3}$. $\therefore \frac{17}{3}\leq n\leq\frac{13}{2}$.又$x\in\mathbf{N}^*$, $\therefore n=6$. $\therefore$ 原式 $=C_{19}^{18}+C_{18}^{17}+C_{17}^{16}+\cdots+C_{12}^{11}=C_{19}^1+C_{18}^1+C_{17}^1+\cdots+C_{12}^1=19+18+17+\cdots+12=124$.

9. 从2本同样的画册,3本同样的集邮册中取出4本有两种取法.第一种:从2本画册中取出1本,将3本集邮册全部取出;第二种:将2本画册全部取出,从3本集邮册中取出2本.由于画册是相同的,集邮册也是相同的,因此第一种取法只需从4位朋友中选出1人赠送画册,其余的赠送集邮册,有$C_4^1=4$(种)赠送方法;第二种取法中只需从4位朋友中选取2人赠送画册,其余的赠送集邮册,有$C_4^2=6$(种)赠送方法.因此共有$4+6=10$(种)赠送方法.

10. (1)可分三种情况处理:①C_1、C_2、$\cdots$、C_6这六个点任取三点可构成一个三角形;②C_1、C_2、$\cdots$、C_6中任取一点,D_1、D_2、D_3、D_4中任取两点可构成一个三角形;③C_1、C_2、$\cdots$、C_6中任取两点,D_1、D_2、D_3、D_4中任取一点可构成一个三角形.$\therefore$ 共有$C_6^3+C_6^1C_4^2+C_6^2C_4^1=116$(个).其中含$C_1$点的三角形有$C_2^5+C_5^1\cdot C_4^1+C_4^2=36$(个).

(2)构成一个四边形,需要四个点,且无三点共线,$\therefore$ 共有$C_6^4+C_6^3C_6^1+C_6^2C_6^2=360$(个).

高考测评

1. A 【解析】分两类,A类选修课1门,B类选修课2门,或者A类选修课2门,B类选修课1门,因此,共有$C_3^2\cdot C_4^1+C_3^1\cdot C_4^2=30$种选法.

2. B 【解析】依题意得,这四项工作中必有一项工作有2人参与,就司机这项工作的实际参与人数进行分类:第一类,司机这项工作的实际参与人数恰有1人,满足题意的方法有$C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_4^2\cdot C_2^1=108$种(注:$C_3^1$表示从除甲、乙外的3人中任选1人从事司机工作的方法数;$C_3^1\cdot C_4^2$表示从除司机工作外的其余3项工作中任选定1项,让该项工作有2人从事的方法数;C_2^1表示从余下的2人中选1人从事余下的两项工作之一的方法数);第二类,司机这项工作的实际参与人数恰有2人,满足题意的方法有$C_3^2\cdot A_3^3=18$种(注:C_3^2表示从除甲、乙外的3人中任选2人从事司机工作的方法数;A_3^3表示余下的3人分别从事另外3项不同工作的方法数).因此,满足题意的方法有$108+18=126$种.

3. 36 【解析】若其中一个集合为一元集(如$\{a\}$),则另一个集合必为含有该元素的二元或三元集,这样的集合对共有$(2^3-2)\times C_4^1=24$个;若其中一个集合为二元集(如$\{a,b\}$),则另一个集合必为含有这两个元素的三元集,这样的集合对共有$(2^2-2)\times C_4^2=12$个,综上可得共有$24+12=36$种不同的选法.

4. 300 【解析】能被5整除,个位数字只能是0或5,共分三种情况.(1)只含有数字5,则5一定位于个位上,有$C_3^1C_4^2A_3^3$个数.(2)同理只含有数字0,有$C_3^2C_4^1A_3^3$个数.(3)既有5又有0,则有两种情况:0位于个位共有$C_3^1C_4^1A_3^3$个数;5位于个位共有$C_3^1C_4^1C_2^1A_2^2$个数.所以符合题意的共有$C_3^1C_4^2A_3^3+C_3^2C_4^1A_3^3+C_3^1C_4^1A_3^3+C_3^1C_4^1C_2^1A_2^2=300$(个).

5. 我们把从共线的4个点中取点的多少作为分类的标准.第1类:共线的4个点中有2个点作为三角形的顶点,共有$C_4^2\cdot C_8^1=48$个不同的三角形;第2类:共线的4个点中有1个点作为三角形的顶点,共有$C_4^1\cdot C_8^2=112$个不同的三角形;第3类:共线的4个点中没有点作为三角形的顶点,共有$C_8^3=56$个不同的三角形.由分类加法计数原理,得不同的三角形共有$48+112+56=216$(个).

6. (1)至少有3名女生的不同小组数可划分为如下四类:有3名女生的不同小组数为$C_6^3\cdot C_{10}^5$;有4名女生的不同小组数为$C_6^4\cdot C_{10}^4$;有5名女生的不同小组数为$C_6^5\cdot C_{10}^3$;有6名女生的不同小组数为$C_6^6\cdot C_{10}^2$. $\therefore$ 至少有3名女生的不同小组数为$C_6^3\cdot C_{10}^5+C_6^4\cdot C_{10}^4+C_6^5\cdot C_{10}^3+C_6^6\cdot C_{10}^2=20\times252+15\times210+6\times120+1\times45=8\,955$.

(2)至少有5名男生的不同小组数可划分为如下四类:有5名男生的不同小组数为$C_{10}^5\cdot C_6^3$;有6名男生的不同小组数为$C_{10}^6\cdot C_6^2$;有7名男生的不同小组数为$C_{10}^7\cdot C_6^1$;有8名男生的不同小组数为$C_{10}^8\cdot C_6^0$.$\therefore$至少有5名男生的不同小组数为$C_{10}^5\cdot C_6^3+C_{10}^6\cdot C_6^2+C_{10}^7\cdot C_6^1+C_{10}^8\cdot C_5^0=252\times20+210\times15+120\times6+45\times1=8\ 955$.

(3)至多有3名女生的不同小组数可划分为如下四类:不含女生的不同小组数为C_{10}^8;只含1名女生的不同小组数为$C_6^1\cdot C_{10}^7$;只含2名女生的不同小组数为$C_6^2\cdot C_{10}^6$;只含3名女生的不同小组数为$C_6^3\cdot C_{10}^5$.$\therefore$至多有3名女生的不同小组数为$C_{10}^8+C_6^1\cdot C_{10}^7+C_6^2\cdot C_{10}^6+C_6^3\cdot C_{10}^5=45+6\times120+15\times210+20\times252=8\ 955$.

第三节　二项式定理

学业测评

1. D 【解析】设含x^3的项为第$r+1$项,则$T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\cdot2^r$,令$6-r=3$,得$r=3$,故展开式中$x^3$的系数为$C_6^3\times2^3=160$.

2. B 【解析】由题知$\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$的通项为$T_{r+1}=(-1)^rC_6^r(2x)^{6-2r}$,令$6-2r=0$,得$r=3$,故常数项为$(-1)^3C_6^3=-20$.

3. D 【解析】$1.05^6=(1+0.05)^6=C_6^0+C_6^1\times0.05+C_6^2\times0.05^2+C_6^3\times0.05^3+\cdots=1+0.3+0.0375+0.0025+\cdots\approx1.34$.

4. C 【解析】$(1+x)^{2n+1}$的展开式有$2n+2$项.系数最大的项是中间两项,是第$n+1$项与第$n+2$项,它们的二项式系数为C_{2n+1}^n与C_{2n+1}^{n+1}.

5. C 【解析】令$x=1$,得各项系数和为4^n,而二项式系数和为2^n,故有$\dfrac{4^n}{2^n}=64$,$\therefore n=6$.

6. -160 【解析】$\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{3-r}$,由题意知$3-r=0$,$r=3$,即常数项为$T_4=C_6^32^3(-1)^3=-160$.

7. 2 【解析】$A=C_6^2(-a)^2$,$B=C_6^4(-a)^4$,由$B=4A$,知$4C_6^2(-a)^2=C_6^4(-a)^4$,解得$a=\pm2$.又$\because a>0$,$\therefore a=2$.

8. 第5项或第7项 【解析】$(1-x)^{10}$中系数的绝对值即是二项式系数,第6项的二项式系数绝对值C_{10}^5最大,其次就是第5项和第7项,二项式系数为C_{10}^4和C_{10}^6,但第6项的系数为负数,故第5项或第7项系数最大.

9. $\because 11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$

$=(10^{10}+C_{10}^1\times10^9+\cdots+C_{10}^9\times10+1)-1$

$=10^{10}+C_{10}^1\times10^9+C_{10}^2\times10^8+\cdots+10^2$

$=100\times(10^8+C_{10}^1\times10^7+C_{10}^2\times10^6+\cdots+1)$,

$\therefore 11^{10}-1$能被100整除.

10. 方法一:由二项式定理得$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5=\left[\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt{2}\right]^5=C_5^0\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^5+C_5^1\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^4\cdot\sqrt{2}+C_5^2\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^3\cdot(\sqrt{2})^2+C_5^3\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot(\sqrt{2})^3+C_5^4\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\cdot(\sqrt{2})^4+C_5^5\cdot(\sqrt{2})^5$.其中为常数的有:$C_5^1\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^4\cdot\sqrt{2}$中第3项:$C_5^1C_4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{2}$;$C_5^3\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot(\sqrt{2})^3$中第2项:$C_5^3C_2^1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^3$;$C_5^5\cdot(\sqrt{2})^5$.综上可知,常数项为$C_5^1C_4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{2}+C_5^3C_2^1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^3+C_5^5\cdot(\sqrt{2})^5=\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$.

方法二:$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{2x}\right)^5$

$=\dfrac{[(x+\sqrt{2})^2]^5}{(2x)^5}=\dfrac{(x+\sqrt{2})^{10}}{(2x)^5}$.

因此本题可以转化为二项式问题,即将求原来式子的常数项,转化为求分子$(x+\sqrt{2})^{10}$中含x^5的项的系数.而分子中含x^5的项为$T_6=C_{10}^5\cdot x^5\cdot(\sqrt{2})^5$,所以所求常数项为$\dfrac{C_{10}^5\cdot(\sqrt{2})^5}{2^5}=\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$.

高考测评

1. B 【解析】先求含x^4项的系数,设第$r+1$项为含x^4的项,则由$T_{r+1}=C_8^r2^{8-r}(-\sqrt{x})^r=C_8^r2^{8-r}\cdot(-1)^rx^{\frac{r}{2}}$,得$\dfrac{r}{2}=4$,$r=8$.从而含$x^4$项的系数为1,不含$x^4$项的系数的和为$(2-1)^8-1=0$.

2. C 【解析】$(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5=(1+6\sqrt{x}+12x+8x\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})^5$,故$(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$的展开式中含$x$的项为$1\cdot C_5^3(-\sqrt[3]{x})^3+12x\cdot C_5^0=-10x+12x=2x$,所以$x$的系数为2.

答案与解析

3. D 【解析】由二项式定理，得 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^r=C_5^r\cdot x^{5-2r}\cdot a^r$，令 $5-2r=3$，$\therefore r=1$，$\therefore C_5^1\cdot a=10$，$\therefore a=2$. 故选 D.

4. 0 【解析】$\because T_{r+1}=C_{20}^r(-x^{\frac{1}{2}})^r=(-1)^r\cdot C_{20}^r\cdot x^{\frac{r}{2}}$，$\therefore x$ 与 x^9 的系数分别为 C_{20}^2 与 C_{20}^{18}，又 $\because C_{20}^2=C_{20}^{18}$，$\therefore C_{20}^2-C_{20}^{18}=0$.

5. B 【解析】$(1+3x)^n$ 的展开式中含 x^5 的项为 $C_n^5(3x)^5=C_n^5 3^5 x^5$，展开式中含 x^6 的项为 $C_n^6 3^6 x^6$，由两项的系数相等得 $C_n^5\cdot 3^5=C_n^6\cdot 3^6$，解得 $n=7$. 故选 B.

6. (1) 设第 $r+1$ 项系数最大，则有

$$\begin{cases}C_7^r\cdot 2^r\geqslant C_7^{r-1}\cdot 2^{r-1},①\\ C_7^r\cdot 2^r\geqslant C_7^{r+1}\cdot 2^{r+1},②\end{cases}$$即

$$\begin{cases}\dfrac{7!}{r!\cdot(7-r)!}\cdot 2^r\geqslant\dfrac{7!}{(r-1)!\cdot(7-r+1)!}\cdot 2^{r-1},\\ \dfrac{7!}{r!\cdot(7-r)!}\cdot 2^r\geqslant\dfrac{7!}{(r+1)!\cdot(7-r-1)!}\cdot 2^{r+1},\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{r}\geqslant\dfrac{1}{8-r},\\ \dfrac{1}{7-r}\geqslant\dfrac{2}{r+1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r\leqslant\dfrac{16}{3},\\ r\geqslant\dfrac{13}{3}.\end{cases}$ 又 $\because 0\leqslant r\leqslant 7$，$\therefore r=5$，$\therefore$ 系数最大项为 $T_6=C_7^5\cdot(2x)^5=672x^5$.

(2) 展开式共有 8 项，系数最大项必为正项，即在第一、三、五、七这四项中取得，又因 $(1-2x)^7$ 括号内的两项中后项系数绝对值大于前项系数绝对值，故系数最大项必在中间或偏右，故只需比较 T_5 和 T_7 两项系数大小即可. 又 $\dfrac{T_5\text{的系数}}{T_7\text{的系数}}=\dfrac{C_7^4(-2)^4}{C_7^6(-2)^6}>1$，所以系数最大的项是第五项，即 $T_5=C_7^4(-2x)^4=560x^4$.

7. (1) 令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{13}+a_{14}=2^7=128$.

(2) 令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{13}+a_{14}=6^7$，两式相减得 $2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})=2^7-6^7=-279\ 808$. $\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13}=-139\ 904$.

8. (1) 原式 $=C_n^0-2C_n^1+2^2C_n^2-2^3C_n^3+\cdots+(-2)^nC_n^n=(1-2)^n=(-1)^n$.

(2) 原式 $=C_5^0(x-1)^5+C_5^1(x-1)^4+C_5^2(x-1)^3+C_5^3(x-1)^2+C_5^4(x-1)+C_5^5-1=[(x-1)+1]^5-1=x^5-1$.

9. 由题意知 $a_0+a_n=a_1+a_{n-1}=a_2+a_{n-2}=\cdots=a_k+a_{n-k}$，$\because C_n^0=C_n^n$，$C_n^1=C_n^{n-1}$，$\cdots$，$C_n^k=C_n^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，$\therefore$ 令 $S=a_0+a_1C_n^1+a_2C_n^2+\cdots+a_nC_n^n$，则 $S=a_nC_n^n+a_{n-1}C_n^{n-1}+a_{n-2}C_n^{n-2}+\cdots+a_0C_n^0$. 两式相加得：$2S=(a_0C_n^0+a_nC_n^n)+(a_1C_n^1+a_{n-1}C_n^{n-1})+\cdots+(a_nC_n^n+a_0C_0^0)=(a_0+a_n)C_n^0+(a_1+a_{n-1})C_n^1+\cdots+(a_n+a_0)C_n^n=(a_0+a_n)\cdot(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=(a_0+a_n)\cdot 2^n$. $\therefore S=(a_0+a_n)\cdot 2^{n-1}$. $\therefore$ 原等式成立.

专题二 概率

第一节 随机事件的概率

学业测评

1. C

2. D

3. B 【解析】①正确，②中应为 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，③中事件 A 为随机事件中的小概率事件.

4. B 【解析】$A_1\cup A_2\cup A_3$ 所表示的含义是 A_1、A_2、A_3 这三个事件中至少有一个发生，即可能击中 1 发、2 发或 3 发，故选 B.

5. C 【解析】D 为对立事件，A、B 不互斥.

6. (1)

女婴出生频率 $\frac{m}{n}$	0.49	0.54	0.50	0.50

(2) 0.50

7. 0.37 【解析】小明是 A 型血，不能输给小明的是 B 型和 AB 型血，因 B 型和 AB 型血所占的比例为 $29\%+8\%=37\%$，所以其血不能输给小明的概率为 0.37.

8. 设水库中鱼的尾数是 n，现在要估计 n 的值，假定每尾鱼被捕的可能性是相等的，从水库中任捕一尾鱼，设事件 $A=\{$带记号的鱼$\}$，则 $P(A)=\dfrac{2\ 000}{n}$. 第二次从水库中捕出 500 尾鱼，其中带记号的有 40 尾，即事件 A 发生的频数为 40，由概率的统计定义知 $P(A)\approx\dfrac{40}{500}$，即 $\dfrac{2\ 000}{n}\approx\dfrac{40}{500}$，解得 $n\approx 25\ 000$，所以估计水库中的鱼有 25 000 尾.

9. (1) 指针落在获奖区域的可能性为 $\dfrac{50+100+200}{1\ 000}=0.35$，从而指针落在不获奖区域的可能性为 $1-0.35=0.65$，这种可能性大些.

(2) 转转盘的平均收益为 $(100\times 50+50\times$

$100+20\times200)\div1\ 000=14>10$,所以顾客选择转转盘的方式更合算.

10.(1)记没有人排队为事件 A,1 人排队为事件 B,2 人排队为事件 C,则 A,B,C 彼此互斥.$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.1+0.16+0.3=0.56$.

(2)记至少 2 人排队为事件 D,少于 2 人排队为事件 $A+B$,那么事件 D 与 $A+B$ 是对立事件,则 $P(D)=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)]=1-(0.1+0.16)=0.74$.

高考测评

1. B 【解析】A 中,两个事件都包含事件"恰好有一个红球和一个绿球",因此可能同时发生,不是互斥事件;B 中,两个事件不会同时发生,但任取 2 个球的所有可能情况为(红球,红球),(红球,绿球),(绿球,红球),(绿球,绿球),故 B 中两个事件可能都不发生,因此两个事件互斥不对立;C 中,两个事件不互斥;D 中,两个事件互斥且对立.

2. B 【解析】事件 A 与事件 B 互斥,所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.8$. 又因为 $P(A)=3P(B)$,所以 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.2$.

3. C 【解析】A 与 B 互斥且对立;B 与 C 有可能同时发生,即出现 6,从而不互斥;A 与 D 不会同时发生,从而 A 与 D 互斥,又因为还可能出现 2,故 A 与 D 不对应;C 与 D 有可能同时发生,从而不互斥.

4. A 【解析】一枚硬币连掷三次,出现 8 种结果(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(正,反,反),(反,正,正),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反),而"至少出现一次正面朝上"的对立事件是"三次都反面朝上",由对立事件的性质可以得知,所求的概率为 $\frac{7}{8}$.

5. 0.7 【解析】这是互斥事件,将取一个产品为一等品记为事件 A,取一个产品为二等品记为事件 B,又 A,B 为互斥事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=60\%+10\%=0.6+0.1=0.7$.

6. (1)$\frac{1}{6}$ (2)$\frac{3}{4}$ 【解析】试验结果有 36 个:(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).(1)"朝上的一面数相同"的结果有 6 个:(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),则概率为 $\frac{1}{6}$.(2)"朝上一面数之积不为偶数"的结果有 9 个:(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5).故"朝上一面数之积为偶数"的概率为 $1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$.

7. 3 件产品中至少有 1 件二级品 【解析】试验结果可分为三类:①3 件一级品;②2 件一级品 1 件二级品;③1 件一级品 2 件二级品. 则"3 件都是一级品"与"3 件中至少有 1 件二级品"对立.

8. (1)贫困地区

参加测试的人数	30	50	100	200	500	800
得 60 分以上的人数	16	27	52	104	256	402
得 60 分以上的频率	0.533	0.540	0.520	0.520	0.512	0.503

发达地区

参加测试的人数	30	50	100	200	500	800
得 60 分以上的人数	17	29	56	111	276	440
得 60 分以上的频率	0.567	0.580	0.560	0.555	0.552	0.550

(2)估计贫困地区和发达地区参加测试的儿童得 60 分以上的概率分别为 0.503 和 0.550.

9. 方法一:由题设知,3 个课外兴趣小组的总人数为 60. 用 A 表示事件"选取的成员只参加 1 个小组",则 $\overline{A}$ 表示"选取的成员至少参加 2 个小组". 于是 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{6+8+10}{60}=\frac{3}{5}=0.6$.

方法二:用 A 表示事件"选取的成员只参加 2 个小组",用 B 表示事件"选取的成员只参加 3 个小组",用 C 表示事件"选取的成员至少参加 2 个小组",则 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{7+11+10}{60}+\frac{8}{60}=\frac{7+11+10+8}{60}=0.6$.

10. 方法一:(1)从 12 只球中任取 1 球得到红球有 5 种取法,得到黑球有 4 种取法,得到红球或黑球共有 $5+4=9$ 种不同取法,任取一球有 12 种取法. ∴ 任取 1 球得到红球或黑球的概率为 $P_1=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

(2)从 12 只球中任取 1 球得到红球有 5 种

取法,得到黑球有 4 种取法,得到白球有 2 种取法,从而得到红球或黑球或白球的概率为 $P_2=\frac{5+4+2}{12}=\frac{11}{12}$.

方法二:利用互斥事件求概率.记事件 A_1:从中任取 1 球得到红球;A_2:从中任取 1 球得到黑球;A_3:从中任取 1 球得到白球;A_4:从中任取 1 球得到绿球,则 $P(A_1)=\frac{5}{12}$,$P(A_2)=\frac{4}{12}$,$P(A_3)=\frac{2}{12}$,$P(A_4)=\frac{1}{12}$.根据题意,A_1,A_2,A_3,A_4 彼此互斥,由互斥事件概率的加法公式,得:

(1)取出红球或黑球的概率为 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{3}{4}$.

(2)取出红球或黑球或白球的概率为$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$.

方法三:利用对立事件求概率.

(1)由方法二,取出红球或黑球的对立事件为取出白球或绿球,即 $A_1\cup A_2$ 的对立事件为$A_3\cup A_4$,$\therefore$ 取出红球或黑球的概率为 $P(A_1\cup A_2)=1-P(A_3\cup A_4)=1-P(A_3)-P(A_4)=1-\frac{2}{12}-\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

(2)$A_1\cup A_2\cup A_3$ 的对立事件为 A_4,则取出红球或黑球或白球的概率为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(A_4)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

第二节　古典概型

学业测评

1. B 【解析】7 的倍数的卡片号共有 14 个,即事件"卡片号是 7 的倍数"所含的基本事件数为 14,而基本事件总数为 100.$\therefore$ 所求概率 $P=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$.

2. C 【解析】由题意得概率为$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,故选 C.

3. A 【解析】任抽一张牌的结果有 5 个,而红心有 3 张.$\therefore$ 所求概率 $P=\frac{3}{5}$.

4. C 【解析】孩子出生有先后之分.

5. D

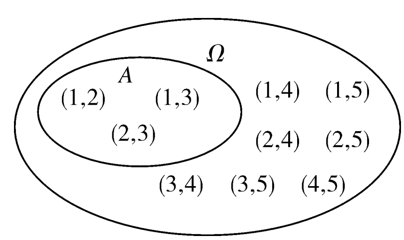
6. $\frac{3}{10}$ 【解析】从 5 条线段中任意取出 3 条,可能出现的结果共有 10 个.可构成三角形的只有(3,5,7),(3,7,9),(5,7,9)3 个,从而所求概率 $P=\frac{3}{10}$.

7. $\frac{3}{8}$ 【解析】集合 $A=\{x\mid x(x^2-1)=0\}=\{0,1,-1\}$,$B\subseteq A$,则集合 B 有8 种结果:$\varnothing$,$\{0\}$,$\{-1\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{0,-1\}$,$\{1,-1\}$,$\{0,1,-1\}$,其中含有2 个元素的结果有3 个,故所求的概率为$\frac{3}{8}$.

8. $\frac{1}{3}$ 【解析】要使 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为偶函数,需使 $b=0$.不同的系数结果有$(-1,0,1)$,$(-1,0,2)$,$(-1,1,0)$,$(-1,1,2)$,$(-1,2,0)$,$(-1,2,1)$,$(1,0,-1)$,$(1,0,2)$,$(1,-1,0)$,$(1,-1,2)$,$(1,2,0)$,$(1,2,-1)$,$(2,0,1)$,$(2,0,-1)$,$(2,1,-1)$,$(2,1,0)$,$(2,-1,0)$,$(2,-1,1)$共 18 个,符合偶函数的情形有$(-1,0,1)$,$(-1,0,2)$,$(1,0,-1)$,$(1,0,2)$,$(2,0,1)$,$(2,0,-1)$共 6 个,故所求的概率为$\frac{1}{3}$.

9. 10　$\frac{3}{10}$ 【解析】(1)为保证各基本事件是等可能出现的,可采用标记号或规定顺序等方法列出各基本事件.分别记白球为 1,2,3 号,黑球为 4,5 号,记(1,2)为从中摸出 1,2 号球.则 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$,因此共有 10 个基本事件.

(2)如答图 2 所示,上述 10 个基本事件发生的可能性相同,故符合古典概型的特征."摸出 2 个白球"记为事件 A,它包括 3 个基本事件(1,2),(1,3),(2,3),故 $n=10$,$m=3$,$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.



答图 2

10. 因为对于 A 中数的每一种取法,对应于

B 中的数都有 4 种取法,故基本事件的总数为$4\times 4=16$,并且所有这些取法都是等可能的.

(1)若和为偶数,则所取两数必须都是奇数或都是偶数,又所有满足和为偶数的取法有{1,5},{1,7},{3,5},{3,7},{2,6},{2,8},{4,6},{4,8}8 种,故所求概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

(2)若积为偶数,则只要其中有一个数是偶数即可,此时有{1,6},{1,8},{2,5},{2,6},{2,7},{2,8},{3,6},{3,8},{4,5},{4,6},{4,7},{4,8}12 种,故所求概率为$\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

◆ 11. (1)设两个工厂分别为甲厂、乙厂,由于每个工厂都可以在 7 天中任选一天,对于甲工厂的每一种选法,乙工厂都有 7 种选法,所以两个工厂停电的方式共有 $7\times 7=49$ 种.

2 个工厂均选择星期日停电的选法只有 1 种,所以事件“2 个工厂均选择星期日停电”的概率为$\frac{1}{49}$.

(2)同上,3 个工厂选择停电的方式共有 $7\times 7\times 7=343$ 种,其中 3 个工厂在同一天停电的选择共有 7 种,故事件“3 个工厂选择同一天停电”的概率为$\frac{7}{343}=\frac{1}{49}$.

◆ 12. (1)若图案有 4 个,则盒子中的黑色积木有 $1+2+3+4=10$(块),白色积木有$6+(6\times 2-2)+(6\times 3-2\times 2)+(6\times 4-2\times 3)=48$(块).

故从盒子中摸出一个积木,摸出的积木为黑色的概率为 $P_1=\frac{10}{10+48}=\frac{5}{29}$.

(2)若图案有 6 个,则盒子中的黑色积木有 $1+2+3+4+5+6=21$(块),白色积木有 $6+(6\times 2-2)+(6\times 3-2\times 2)+(6\times 4-2\times 3)+(6\times 5-2\times 4)+(6\times 6-2\times 5)=96$(块).

故从盒子中摸出一个积木,摸出的积木为白色的概率为 $P_2=\frac{96}{21+96}=\frac{32}{39}$.

高考测评

◆ 1. D 【解析】分别从两个集合中各取一个数,共有 15 种取法,其中满足 $b>a$ 的有 3 种取法,故所求事件的概率为 $P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$. 故选 D.

◆ 2. $\frac{7}{10}$ 【解析】从 5 个自然数中任取 2 个数共有 10 种取法,列举如下:(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),若两个数的积是偶数,则这两个数中至少有一个是偶数,满足条件的有(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(4,5)共 7 种情况,故所求概率为$\frac{7}{10}$.

◆ 3. $\frac{1}{2}$ 【解析】设 3 只白球分别为 a_1,a_2,a_3,1 只黑球为 b,则从中随机摸出两只球的情形有$\{a_1,a_2\}$,$\{a_1,a_3\}$,$\{a_2,a_3\}$,$\{a_1,b\}$,$\{a_2,b\}$,$\{a_3,b\}$,即试验共包括 6 个等可能发生的基本事件,其中两只球颜色不同包括 3 个基本事件,故所求概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

◆ 4. (1)由所给数据可知,一等品零件共有 6 个,设“从 10 个零件中,随机抽取一个,这个零件为一等品”为事件 A,则 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

(2)①一等品零件的编号为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,从这 6 个一等品零件中随机抽取 2 个,所有可能的结果有:$\{A_1,A_2\}$,$\{A_1,A_3\}$,$\{A_1,A_4\}$,$\{A_1,A_5\}$,$\{A_1,A_6\}$,$\{A_2,A_3\}$,$\{A_2,A_4\}$,$\{A_2,A_5\}$,$\{A_2,A_6\}$,$\{A_3,A_4\}$,$\{A_3,A_5\}$,$\{A_3,A_6\}$,$\{A_4,A_5\}$,$\{A_4,A_6\}$,$\{A_5,A_6\}$,共有 15 种.

②将“从一等品零件中,随机抽取 2 个,这 2 个零件直径相等”记为事件 B,则其所有可能结果有:$\{A_1,A_4\}$,$\{A_1,A_6\}$,$\{A_4,A_6\}$,$\{A_2,A_3\}$,$\{A_2,A_5\}$,$\{A_3,A_5\}$,共有 6 种,所以 $P(B)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

◆ 5. (1)当 $x=8$ 时,由茎叶图可知,乙组同学的植树棵数是:8,8,9,10,所以平均数为:$\bar{x}=\frac{8+8+9+10}{4}=\frac{35}{4}$;方差为:$s^2=\frac{1}{4}\times\left[\left(8-\frac{35}{4}\right)^2+\left(8-\frac{35}{4}\right)^2+\left(9-\frac{35}{4}\right)^2+\left(10-\frac{35}{4}\right)^2\right]=\frac{11}{16}$.

(2)记甲组四名同学为 A_1,A_2,A_3,A_4,他们植树的棵数依次为 9,9,11,11;乙组四名同学为 B_1,B_2,B_3,B_4,他们植树的棵数依次为 9,8,9,10. 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学,所有可能的结果有以下 16 个:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,B_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,B_4),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_3,B_3),(A_3,B_4),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(A_4,B_3),(A_4,B_4).

用 C 表示“选出的两名同学的植树总棵数为 19”这一事件,则 C 中的结果有 4 个,它们是:(A_1,B_4),(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_2). 故所求概率为 $P(C)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

◆ 6. (1)甲校两男教师分别用 A、B 表示,女教师用 C 表示;乙校男教师用 D 表示,两女教师分别用 E、F 表示. 从甲校和乙校报名的教师中各任选 1 名的所有可能的结果为:(A,D),(A,E),$(A,

F),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F)共9种,从中选出的两名教师性别相同的结果有:(A,D),(B,D),(C,E),(C,F)共4种,故选出的两名教师性别相同的概率为$P_1=\frac{4}{9}$.

(2)从甲校和乙校报名的教师中任选2名的所有可能的结果为:(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(B,C),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F)共15种,从中选出的两名教师来自同一学校的结果有:(A,B),(A,C),(B,C),(D,E),(D,F),(E,F)共6种,故选出的两名教师来自同一学校的概率为$P_2=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

◆ 7. (1)由题意可得,$\frac{x}{18}=\frac{2}{36}=\frac{y}{54}$,所以$x=1$,$y=3$.

(2)记从高校B抽取的2人为b_1,b_2,从高校C抽取的3人为c_1,c_2,c_3,则从高校B,C抽取的5人中选2人作专题发言的基本事件有(b_1,b_2),(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_2,c_1),(b_2,c_2),(b_2,c_3),(c_1,c_2),(c_1,c_3),(c_2,c_3)共10种. 设选中的2人都来自高校C的事件为X,则X包含的基本事件有(c_1,c_2),(c_1,c_3),(c_2,c_3)共3种. 因此$P(X)=\frac{3}{10}$. 即选中的2人都来自高校C的概率为$\frac{3}{10}$.

◆ 8. (1)∵ 这6位同学的平均成绩为75分,
∴ $\frac{1}{6}\times(70+76+72+70+72+x_6)=75$,解得$x_6=90$,这6位同学成绩的方差$s^2=\frac{1}{6}\times[(70-75)^2+(76-75)^2+(72-75)^2+(70-75)^2+(72-75)^2+(90-75)^2]=49$,∴ 标准差$s=7$.

(2)从前5位同学中,随机地选出2位同学的成绩有:(70,76),(70,72),(70,70),(70,72),(76,72),(76,70),(76,72),(72,70),(72,72),(70,72),共10种,恰有1位同学成绩在区间(68,75)中的有:(70,76),(76,72),(76,70),(76,72),共4种,所求的概率为$\frac{4}{10}=0.4$,即恰有1位同学成绩在区间(68,75)中的概率为0.4.

◆ 9. (1)4,6,6.

(2)①得分在区间[20,30)内的运动员编号为A_3,A_4,A_5,A_{10},A_{11},A_{13}. 从中随机抽取2人,所有可能的抽取结果有:$\{A_3,A_4\}$,$\{A_3,A_5\}$,$\{A_3,A_{10}\}$,$\{A_3,A_{11}\}$,$\{A_3,A_{13}\}$,$\{A_4,A_5\}$,$\{A_4,A_{10}\}$,$\{A_4,A_{11}\}$,$\{A_4,A_{13}\}$,$\{A_5,A_{10}\}$,$\{A_5,A_{11}\}$,$\{A_5,A_{13}\}$,$\{A_{10},A_{11}\}$,$\{A_{10},A_{13}\}$,$\{A_{11},A_{13}\}$,共15种.

②"从得分在区间[20,30)内的运动员中随机抽取2人,这2人得分之和大于50"(记为事件B)的所有可能结果有:$\{A_4,A_5\}$,$\{A_4,A_{10}\}$,$\{A_4,A_{11}\}$,$\{A_5,A_{10}\}$,$\{A_{10},A_{11}\}$,共5种. 所以$P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

◆ 10. (1)从小学、中学、大学中分别抽取的学校数目为3,2,1.

(2)①在抽取到的6所学校中,将3所小学分别记为A_1,A_2,A_3,2所中学分别记为A_4,A_5,大学记为A_6,则抽取2所学校的所有可能结果为:$\{A_1,A_2\}$,$\{A_1,A_3\}$,$\{A_1,A_4\}$,$\{A_1,A_5\}$,$\{A_1,A_6\}$,$\{A_2,A_3\}$,$\{A_2,A_4\}$,$\{A_2,A_5\}$,$\{A_2,A_6\}$,$\{A_3,A_4\}$,$\{A_3,A_5\}$,$\{A_3,A_6\}$,$\{A_4,A_5\}$,$\{A_4,A_6\}$,$\{A_5,A_6\}$,共15种.

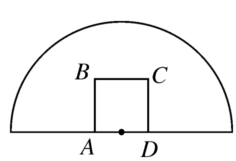
②从6所学校中抽取的2所学校均为小学(记为事件B)的所有可能结果为:$\{A_1,A_2\}$,$\{A_1,A_3\}$,$\{A_2,A_3\}$,共3种. 所以$P(B)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

第三节 几何概型

学业测评

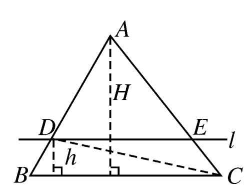
◆ 1. D 【解析】该问题的几何模型是线段长度的比值.

◆ 2. D 【解析】如答图3所示,半圆的面积为$\frac{\pi}{2}$,正方形$ABCD$的面积为$\frac{1}{4}$,所以概率$P=\frac{S_{正方形}}{S_{半圆}}=\frac{1}{2\pi}$.



答图3

◆ 3. C 【解析】如答图4所示,在△ABC中,在AB上取点D使$BD=\frac{1}{4}AB$,则$\frac{h}{H}=\frac{1}{4}$,此时$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{4}S$. 在$AB$上取点$P$,则所有的随机结果为$AB$上的点,而使△$PBC$的面积大于$\frac{S}{4}$的点落在$AD$上,∴ $P=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$.



答图4

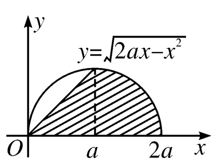
4. C 【解析】在答图 4 中,过点 D 作 $l\parallel BC$ 交 AC 于点 E. 由上题可知 $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$. 而 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,则使 $S_{\triangle PBC}>\frac{S}{4}$ 的点落在 $\triangle ADE$ 中,

$\therefore P=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{9}{16}$.

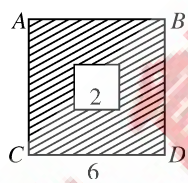
5. C 【解析】将 $[0,1]$ 内的随机数转化为 $[a,b]$ 内的随机数需进行的变换为 $a=a_1*(b-a)+a$.

6. 0.3 【解析】因为 $1\in\{x\mid 2x^2+ax-a^2>0\}$,所以 $2+a-a^2>0$,解得 $a\in[-1,2]$,所以概率为 0.3.

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$ 【解析】由答图 5 可知,设基本事件表示半圆的面积,所求事件为图中阴影部分的面积,则所求概率等于阴影部分面积与半圆面积之比,即 $P=\dfrac{\frac{a^2}{2}+\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.



答图 5



答图 6

8. $\frac{8}{9}$ 【解析】由答图 6 可知,当硬币的圆心落在图中阴影区域时,硬币与网格中的一个小正方形 $ABCD$ 的边相切或相交,且基本事件总数可用区域面积 36 表示,则事件“硬币落下后与格线有公共点”包含的基本事件数可用区域面积 32 表示,由几何概型公式可得所求概率为 $\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$.

9. 记“三条线段 a,b,c 能构成三角形”为事件 A. 随机产生 0~1 间两个数 x,y,设 $a=\min\{x,y\}$,$b=x-y$,$c=1-\max\{x,y\}$. 构成三角形需要满足以下三个条件:$a+b>c$,$b+c>a$,$a+c>b$.

S1 用计数器 n 记录做了多少次试验,用计数器 m 记录其中有多少次满足 $a+b>c$,$b+c>a$,$a+c>b$,首先置 $n=0$,$m=0$;S2 用函数(rand)产生 0~1 之间的随机数 x,y;S3:计算 a,b,c;S4,验证 $a+b>c$,$b+c>a$,$a+c>b$ 三个不等式是否满足. 若满足三个不等式,则 $n=n+1$,$m=m+1$. 否则 $n=n+1$,m 的值保持不变. 如果还要继续试验,则返回步骤 S2 继续执行,否则,程序结束. 程序结束后事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 可作为事件 A 的概率的近似值.

10. 投中线上或没投中木板不算,因而投中正方形内各部分的任一点都是等可能的,且结果有无穷多个,符合几何概型条件.

方法一:记 $A=\{$投镖击中大圆内$\}$,$B=\{$投镖击中小圆与中圆形成的圆环内$\}$,$C=\{$投镖击中大圆之外$\}$. $S_{\text{正方形}}=16^2=256$,$S_{\text{大圆}}=\pi\times6^2=36\pi$,$S_{\text{中圆}}=\pi\times4^2=16\pi$,$S_{\text{小圆}}=\pi\times2^2=4\pi$. 所以 $P(A)=\frac{S_{\text{大圆}}}{S_{\text{正方形}}}=\frac{9}{64}\pi$,$P(B)=\frac{S_{\text{中圆}}-S_{\text{小圆}}}{S_{\text{正方形}}}=\frac{3}{64}\pi$,$P(C)=\frac{S_{\text{正方形}}-S_{\text{大圆}}}{S_{\text{正方形}}}=1-\frac{9}{64}\pi$.

方法二:记事件 $A=\{$投中大圆内$\}$,事件 $B=\{$投中小圆与中圆形成的圆环内$\}$,事件 $C=\{$投中大圆之外$\}$. ①用计算机产生两组 $[0,1]$ 上的均匀随机数,$a_1=\text{RAND}$,$b_1=\text{RAND}$. ②经过伸缩平移交换,$a=a_1*16-8$,$b=b_1*16-8$,得到两组 $[-8,8]$ 的均匀随机数. ③统计投在大圆内的次数 N_1[即满足 $a^2+b^2<36$ 的点 (a,b) 数],投中小圆与中圆形成的圆环次数 N_2[即满足 $4<a^2+b^2<16$ 的点 (a,b) 数],投中木板的总次数 N[即满足 $-8<a<8$,$-8<b<8$ 的点 (a,b) 数]. ④计算频率 $f_n(A)=\frac{N_1}{N}$,$f_n(B)=\frac{N_2}{N}$,$f_n(C)=\frac{N-N_1}{N}$,即分别为概率 $P(A)$,$P(B)$,$P(C)$ 的近似值.

11. 方法一:设事件 $A=\{$按错了键而使含有犯罪信息的谈话被部分或全部擦掉$\}$,事件 A 的发生就是在 0 min 到 $\frac{2}{3}$ min 时间段内按错键,

$\therefore \mu_A=\frac{2}{3}$ min,$\mu_\Omega=30$ min. $\therefore P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\dfrac{\frac{2}{3}}{30}=\frac{1}{45}$.

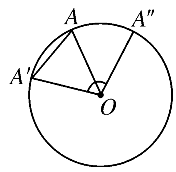
方法二:设事件 $A=\{$按错了键而使含有犯罪信息的谈话被部分或全部擦掉$\}$. 第一步,用计数器 n 记录做了多少次试验,用计数器 m 记录其中有多少次 x 出现在 $0\sim\frac{2}{3}$ 之间(即由于按错了键使含有犯罪信息的谈话被部分或全部擦掉). 首先置 $n=0$,$m=0$. 第二步,用变换 RAND*30 产生 0~30 之间的均匀随机数,x 表示按错了键的时间. 第三步,判断是否由于按错了键使含有犯罪信息的谈话被部分或全部擦掉,即是否满足 $x<\frac{2}{3}$. 若是,则计数器 m 的值增加 1,即 $m=m+1$. 若不是,m 的值保持不变. 第四步,表示随机试验次数的计数器 n 的值增加 1,即 $n=n+1$. 如果还要继续试验,那么返回第二步继续执行,否则,程序结束. 程序结束后事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 可作为

事件 A 的概率的近似值.

高考测评

◆ 1. B 【解析】因为正方形内部有无数个点，且豆子落在任一点的概率是相等的，符合几何概型的条件，故豆子落在阴影区域内的概率 $\frac{2}{3}=\frac{\text{阴影区域的面积}}{\text{正方形的面积}}$.

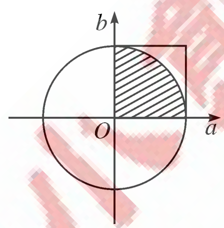
◆ 2. C 【解析】连接 OA，OA'，则 $OA=OA'=r$. 又因为 $AA'\leqslant r$，所以 $\angle AOA'\leqslant 60°$，因而点 A'在答图 7 中对应的圆心角为 $120°$ 的圆弧上，故所求概率为 $\frac{120°}{360°}=\frac{1}{3}$.



答图 7

◆ 3. A 【解析】玻璃球丢落在该圆盘内，玻璃球落在各个区域内是随机的，也是等可能的，并且落在该圆盘内的任何位置是等可能的，因此该问题是几何概型. 由于 A 区域占整个圆盘区域面积的 $\frac{4}{8}$，所以玻璃球落入 A 区域的概率为 $\frac{1}{2}$.

◆ 4. C 【解析】$0\leqslant a\leqslant 1$，$0\leqslant b\leqslant 1$ 表示的是边长为 1 的正方形及其内部，$a^2+b^2<1$ 表示的是半径为 1 的圆的内部，如答图 8 所示，阴影部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi$，故所求的概率为 $\frac{\pi}{4}$.



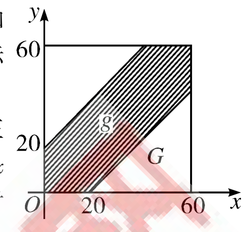
答图 8

◆ 5. 3. 104 【解析】根据几何概型及用频率估计概率的思想，$\frac{\pi R^2}{4R^2}\approx\frac{776}{1\ 000}$（$R$ 为正方形内切圆半径），解得 $\pi\approx 3.104$.

◆ 6. $\frac{8}{15}$ 【解析】三灯各亮一次的时间总和为 $30+5+40=75$（s），故出现绿灯的概率为 $\frac{40}{75}=\frac{8}{15}$.

◆ 7. 0. 25 【解析】在 20 组随机数中满足条件的只有 5 组：191，271，932，812，393. 故该运动员三次投篮恰有两次命中的概率估计为 $\frac{5}{20}=0.25$.

◆ 8. 在平面上建立如答图 9 所示的直角坐标系，直线 $x=60$，直线 $y=60$，x 轴、y 轴围成一个正方形区域 G. 设甲 12 时 x 分到达会面地点，乙 12 时 y 分到达会面地点，这个结果与平面上的点 (x,y) 对应. 于是试验的所有可能结果就与 G 中的所有点一一对应，由题意知，每一个试验结果出现的可能性是相等的，因此，试验属于几何概型. 甲、乙两人能会面，当且仅当他们到达会面地点的时间差不超过 20 min，即 $|y-x|\leqslant 20$，$x-20\leqslant y\leqslant x+20$，因此，图中的阴影区域 g 就表示“甲、乙能会面”，容易求得 g 的面积为 $60^2-40^2=2\ 000$，G 的面积为 3 600，由几何概型的概率计算公式，得“甲、乙能会面”的概率 $P=\frac{g\text{的面积}}{G\text{的的面积}}=\frac{5}{9}$.



答图 9

◆ 9. 在平面直角坐标系中画出正方形，用随机模拟的方法求出阴影部分与正方形面积之比，从而求得阴影部分面积的近似值.

（1）利用计算机产生两组[0，1]上的均匀随机数，$a_1=\text{RAND}$，$b_1=\text{RAND}$；（2）进行平移和伸缩变换：$a=(a_1-0.5)*2$，$b=b_1*2$，得到一组[-1，1]上的均匀随机数和一组[0，2]上的均匀随机数；（3）统计试验总次数 N 和落在阴影内的次数 N（满足条件 $b<2^a$ 的点 (a,b) 的个数）；（4）计算频率 $\frac{N_1}{N}$，即为点落在阴影部分的概率的近似值；（5）用几何概型概率公式求得点落在阴影部分的概率为 $P=\frac{S}{4}$. ∴ $\frac{N_1}{N}\approx\frac{S}{4}$，∴ $S\approx\frac{4N_1}{N}$即为阴影部分面积的近似值.

第四节　条件概率与相互独立事件同时发生的概率

学业测评

◆ 1. C 【解析】由 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 可得 $P(A)=\frac{3}{4}$.

◆ 2. D 【解析】设事件 A 为“第一次取白球”，事件 B 为“第二次取红球”，则 $P(A)=\frac{C_5^1C_7^1}{8\times 7}=\frac{5}{8}$，$P(AB)=\frac{C_5^1C_3^1}{8\times 7}=\frac{15}{56}$，故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{7}$.

◆ 3. A 【解析】设 A 表示：“第一个圆盘的指针落在奇数所在的区域”，则 $P(A)=\frac{2}{3}$，B 表示：“第二个圆盘的指针落在奇数所在的区域”，则 $P(B)=\frac{2}{3}$. 故 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

◆ 4. D 【解析】由 $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$，得 $P(A)P(\bar{B})=P(B)P(\bar{A})$，即 $P(A)[1-P(B)]=P(B)[1-P(A)]$，$\therefore P(A)=P(B)$. 又 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，则 $P(\bar{A})=P(\bar{B})=\frac{1}{3}$. $\therefore P(A)=\frac{2}{3}$.

◆ 5. D 【解析】“一小时内至多有2台印刷机需要工人照看”的事件有0、1、2台需要照看三种可能. 因此，所求概率为 $C_4^0\cdot0.2^0\cdot0.8^4+C_4^1\cdot0.2^1\cdot0.8^3+C_4^2\cdot0.2^2\cdot0.8^2=0.9728$.

◆ 6. 0.72 【解析】设 A=“这粒水稻种子发芽”，B=“这粒水稻种子成长为幼苗”，则 AB=“这粒水稻种子发芽且成长为幼苗”$=B$. 由已知，$P(A)=0.8$，$P(B|A)=0.9$，则 $P(B)=P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.8\times0.9=0.72$.

◆ 7. $\frac{4}{11}$ 【解析】设 $A=\{$任取一个球是蓝球$\}$，$B=\{$任取一个球是玻璃球$\}$，则 $P(A)=\frac{6}{16}\times\frac{4}{6}+\frac{10}{16}\times\frac{7}{10}=\frac{11}{16}$，$P(AB)=\frac{6}{16}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{11}$.

◆ 8. 0.8 【解析】“有人患感冒”这一事件包括甲、乙中有一人感冒和全都感冒，设事件 A：甲患感冒，事件 B：乙患感冒，则有人患感冒这一事件的概率为 $P(\bar{A}B+A\bar{B}+AB)=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})+P(A)P(B)=P(\bar{A})P(B)+P(A)=0.4\times0.5+0.6=0.8$.

◆ 9. 6 【解析】设需要 n 门高射炮才可达到目的，用 A 表示“命中飞机”这一事件，用 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示“第 i 门高射炮命中飞机”，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，且有 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$. $P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A_1})\cdot P(\bar{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\bar{A_n})=1-(1-0.6)^n$，依题意 $P(A)\geqslant0.99$，$\therefore 1-0.4^n\geqslant0.99$. $\therefore n\geqslant5.03$. 应取6.

◆ 10. (1)两人都投中2球的概率是 $C_3^2\times0.7^2\times(1-0.7)\times C_3^2\times0.6^2\times(1-0.6)\approx0.191$.

(2)记甲投中 i 次球为事件 A_i，乙投入 i 次球为事件 B_j，$(i=0,1,2,3,j=0,1,2,3)$，甲、乙两人得分相同的概率即为甲、乙两人投中球数相同的概率. $P(A_0\cdot B_0)+P(A_1\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_2)+P(A_3\cdot B_3)=(1-0.6)^3\times(1-0.7)^3+C_3^1\times0.6\times(1-0.6)^2\times C_3^1\times0.7\times(1-0.7)^2+C_3^2\times0.6^2\times(1-0.6)\times C_3^2\times0.7^2\times(1-0.7)+C_3^3\times0.6^3\times C_3^3\times0.7^3\approx0.321$.

◆ 11. 设事件 A 为“能活到20岁”，事件 B 为“能活到25岁”，则 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，而所求概率为 $P(B|A)$，由于 $B\subseteq A$，故 $AB=B$，于是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$.

◆ 12. 设事件 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示“该选手能正确回答第 i 轮问题”，由已知 $P(A_1)=\frac{5}{6}$，$P(A_2)=\frac{4}{5}$，$P(A_3)=\frac{3}{4}$，$P(A_4)=\frac{1}{3}$.

(1)设事件 B 表示“该选手进入第三轮才被淘汰”，则 $P(B)=P(A_1A_2\bar{A_3})=P(A_1)P(A_2)\cdot P(\bar{A_3})=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{6}$.

(2)设事件 C 表示“该选手至多进入第三轮考核”，则 $P(C)=P(\bar{A_1}+A_1\bar{A_2}+A_1A_2A_3)=P(\bar{A_1})+P(A_1\bar{A_2})+P(A_1A_2\bar{A_3})=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

高考测评

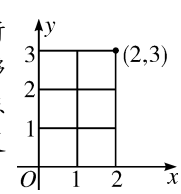
◆ 1. B 【解析】$P(A)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$.

◆ 2. D 【解析】甲队若要获得冠军，有两种情况，可以直接胜一局，获得冠军，概率为 $\frac{1}{2}$，也可以乙队先胜一局，甲队再胜一局，概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故甲队获得冠军的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

◆ 3. A 【解析】设“至少有一枚出现6点”为事件 A，“两枚骰子的点数不同”为事件 B. 则 $n(B)=6\times5=30$，$n(AB)=10$，所以 $P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{1}{3}$.

◆ 4. C 【解析】分别记从甲、乙袋中摸出一个红球为事件 A、B，则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，由于 A、B 相互独立，所以 $1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$. 可知C正确.

◆ 5. B 【解析】如答图10所示，由题可知，质点 P 必须向右移动2次，向上移动3次才能位于点(2,3)，问题相当于5次独立重复试验某事件恰好发生2次的概率. 故所求概率为 $P=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$. 故选B.



答图 10

6. $\frac{4}{7}$ 【解析】设 A 表示"取到的球是白球"，B 表示"取到的球是木球"．则 $n(A)=7$，$n(AB)=4$，所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{4}{7}$.

7. 0.09 【解析】乙连胜四局，即乙先胜甲，然后胜丙，接着再胜甲，最后再胜丙，$\therefore$ 概率 $P=(1-0.4)\times0.5\times(1-0.4)\times0.5=0.09$.

8. 因为 A,B 断开且 C,D 至少有一个断开时，线路才断开，导致灯不亮，所以灯不亮的概率为 $P(\bar{A}\bar{B})[1-P(CD)]=P(\bar{A})P(\bar{B})[1-P(C)\cdot P(D)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$. 所以灯亮的概率为 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$.

9. 这里4个问题，都是在同一条件下研究事件的发生情况，所以均属独立重复试验.

(1)命中一次的概率为 $P_1=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{12}{5}\times\frac{8}{125}=\frac{96}{625}$.

(2)恰在第三次击中目标的概率为 $P_2=\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3}{5}\times\frac{8}{125}=\frac{24}{625}$.

(3)刚好命中两次的概率为 $P_3=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=6\times\frac{9}{25}\times\frac{4}{25}=\frac{216}{625}$.

(4)刚好在第二、第三两次击中目标的概率为 $P_4=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{36}{625}$.

10. 每台机床正常工作的概率为 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$，而且每台机床分"工作"和"不工作"两种情况，所以工作机床台数 ξ 服从二项分布 $B\left(10,\frac{1}{5}\right)$，$P(\xi=k)=C_{10}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$ $(k=0,1,2,3,\cdots,10)$，因为 48 kW 可供6台机床同时工作，如果用电量超过 48 kW，那么有7台或7台以上的机床同时工作，这一事件的概率为：

$P(\xi=7)=C_{10}^7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3$，

$P(\xi=8)=C_{10}^8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$，

$P(\xi=9)=C_{10}^9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^9\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1$，

$P(\xi=10)=C_{10}^{10}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^0$，

$P(\xi\geqslant7)=P(\xi=7)+P(\xi=8)+P(\xi=9)+P(\xi=10)\approx0.000\ 86$.

专题三　随机变量及其分布

第一节　离散型随机变量及其分布列

学业测评

1. D 【解析】只有④中的 η 不是.

2. D 【解析】抛掷两枚骰子，设其中一枚是 x 点，另一枚是 y 点，$x,y=1,2,\cdots,6$，而 $\xi=x+y$. $\xi=4\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

3. B 【解析】设6人中"三好生"的人数为 k，则其选法数为 $C_5^k\cdot C_7^{6-k}$，当 $k=3$ 时，选法数为 $C_5^3C_7^3$.

4. B 【解析】设随机变量 ξ 取 x_1,x_2,x_3 的概率分别为 $a-d,a,a+d$，则由分布列的性质得 $(a-d)+a+(a+d)=1$，故 $a=\frac{1}{3}$，由 $\begin{cases}\frac{1}{3}-d\geqslant0,\\\frac{1}{3}+d\geqslant0\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}$.

5. 0.8 【解析】由 $Y=-2$，且 $Y=3X-2$，得 $X=0$，$\therefore P(Y=-2)=0.8$.

6. $\frac{8}{9}$ 【解析】$1=C\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)$，$\therefore C=\frac{4}{3}$. $\therefore P(0.5<X<2.5)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

7. 因为只有5发子弹，所以离散型随机变量 ξ 的取值只能是1,2,3,4,5. 当 $\xi=1$ 时，$P(\xi=1)=0.9$；当 $\xi=2$ 时，要求第一次没射中，第二次射中，故 $P(\xi=2)=0.1\times0.9=0.09$；同理，$\xi=3$ 时，要求前两次没有射中，第三次射中，$P(\xi=3)=0.1^2\times0.9=0.009$；类似地，$P(\xi=4)=0.1^3\times0.9=0.000\ 9$；$P(\xi=5)=0.1^4=0.000\ 1$. 所以耗用子弹数 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.9	0.09	0.009	0.000 9	0.000 1

8. 设 A_k 表示第 k 辆车在一年内发生此种事故，$k=1,2,3$. 由题意知 A_1,A_2,A_3 相互独立，且 $P(A_1)=\frac{1}{9}$，$P(A_2)=\frac{1}{10}$，$P(A_3)=\frac{1}{11}$.

（1）该单位一年内获赔的概率为 $1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{10}{11}=\frac{3}{11}$.

（2）X 的所有可能值为 0，9 000，18 000，27 000.

$P(X=0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{10}{11}=\frac{8}{11}$，

$P(X=9\,000)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{10}{11}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{11}+\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{11}=\frac{242}{990}=\frac{11}{45}$，

$P(X=18\,000)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{11}+\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{11}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}=\frac{27}{990}=\frac{3}{110}$，

$P(X=27\,000)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{990}$.

综上知，X 的分布列为：

X	0	9 000	18 000	27 000
P	$\frac{8}{11}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{990}$

9.（1）记 A_0 表示事件"取出的 2 件产品中无二等品"，A_1 表示事件"取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品"，则 A_0、A_1 互斥，且 $A=A_0+A_1$，故 $P(A)=P(A_0+A_1)=P(A_0)+P(A_1)=(1-p)^2+C_2^1p(1-p)=1-p^2$，于是 $0.96=1-p^2$，解得 $p_1=0.2$，$p_2=-0.2$（舍去）.

（2）ξ 的可能取值为 0，1，2，若该批产品共 100 件，由（1）知其二等品有 $100\times0.2=20$ 件，故 $P(\xi=0)=\frac{C_{80}^2}{C_{100}^2}=\frac{316}{495}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{80}^1C_{20}^1}{C_{100}^2}=\frac{32}{99}$，$P(\xi=2)=\frac{C_{20}^2}{C_{100}^2}=\frac{19}{495}$. 所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{32}{99}$	$\frac{19}{495}$

高考测评

1. B 【解析】基本事件总数为 $6\times6=36$，$\xi\leq4$ 含：①$\xi=2$，对应事件 (1,1)；②$\xi=3$，对应事件 (1,2)，(2,1)；③$\xi=4$，对应事件 (1,3)，(2,2)，(3,1)，$\therefore P(\xi\leq4)=P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{6}$.

2. B 【解析】由题意知，$P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=1$，即 $\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]c=1$，$\therefore c\cdot\frac{38}{27}=1$，$\therefore c=\frac{27}{38}$.

3. C 【解析】甲、丁都入选，$\xi=0$，甲、丁之一入选，$\xi=1$，甲、丁都不入选，$\xi=2$.

4. A 【解析】$\xi=2$ 时，$\eta=-1$，$\xi=3$ 时，$\eta=0$，$\xi=4$ 时，$\eta=1$.

5. 2，3 【解析】数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 是等差数列，$\{d_n\}$ 是等比数列. $\{d_n\}$ 入选，$\xi=2$，$\{d_n\}$ 不入选，$\xi=3$.

6.

ξ^2	1	4	9	16
P	0.1	0.2	0.1	0.6

【解析】由 $0.1+0.2+x+0.6=1$，得 $x=0.1$，$\xi=1,2,3,4$ 时，ξ^2 对应的值为 1，4，9，16，ξ^2 的取值与对应的 ξ 的取值的概率不变.

7. 0，1，2，3，4 【解析】优秀生入选 1 人，$\xi=4$；优秀生入选 2 人，$\xi=3$；……；优秀生入选 5 人，$\xi=0$.

8. $\frac{4}{15}$ 【解析】从 6 个乒乓球中随机抽取 4 个，共有 $C_6^4=15$ 种不同的结果，$\xi=2$ 表示被抽取的 4 个球的情况是 2，3，4，5；2，3，4，6；2，3，5，6；2，4，5，6，共 4 种. $P(\xi=2)=\frac{4}{15}$.

9.（1）由题意，得甲、乙在三小时以上且不超过四小时还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，记甲、乙两人所付的租车费用相同为事件 A，则 $P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$. 即甲、乙两人所付的租车费用相同的概率为 $\frac{5}{16}$.

（2）ξ 可能取的值有 0，2，4，6，8.

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$;

$P(\xi=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$;

$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$;

$P(\xi=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$;

$P(\xi=8)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

$\therefore$ 甲、乙两人所付的租车费用之和 ξ 的分布列为：

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{5}{16}+4\times\frac{5}{16}+6\times\frac{3}{16}+8\times\frac{1}{16}=\frac{7}{2}$.

◆ 10. (1)①设“在 1 次游戏中摸出 i 个白球”为事件 $A_i(i=0,1,2,3)$，则 $P(A_3)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{5}$.

②设“在 1 次游戏中获奖”为事件 B，则 $B=A_2\cup A_3$，又 $P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_3^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{2}$，且 A_2,A_3 互斥. 所以 $P(B)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$.

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\left(1-\frac{7}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$,

$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{7}{10}\cdot\left(1-\frac{7}{10}\right)=\frac{21}{50}$,

$P(X=2)=\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$.

所以 X 的分布列是：

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{9}{100}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{49}{100}=\frac{7}{5}$.

◆ 11. (1)$\because E(X_1)=6$，$\therefore 5\times0.4+6a+7b+8\times0.1=6$，即 $6a+7b=3.2$. 又由 X_1 的概率分布列得 $0.4+a+b+0.1=1$，即 $a+b=0.5$. 由 $\begin{cases}6a+7b=3.2,\\a+b=0.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.3,\\b=0.2.\end{cases}$

(2)由已知得，X_2 的分布列如下：

X_2	3	4	5	6	7	8
P	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

所以 $E(X_2)=3\times0.3+4\times0.2+5\times0.2+6\times0.1+7\times0.1+8\times0.1=4.8$，即乙厂产品的等级系数的数学期望等于 4.8.

(3)乙厂的产品更具可购买性，理由如下：

因为甲厂产品的等级系数的数学期望等于 6，价格为 6 元/件，所以其性价比为 $\frac{6}{6}=1$. 因为乙厂产品的等级系数的数学期望等于 4.8，价格为 4 元/件，所以其性价比为 $\frac{4.8}{4}=1.2$. 即乙厂的产品的性价比更高，因而更具可购买性.

第二节　二项分布及其应用

学业测评

◆ 1. D 【解析】利用二项分布公式有 $P(X=2)=C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

◆ 2. B 【解析】利用二项分布的定义判断.

◆ 3. D 【解析】$P(X\leqslant2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=C_5^0 0.1^0\cdot0.9^5+C_5^1 0.1^1 0.9^4+C_5^2 0.1^2\cdot0.9^3=0.99144$.

◆ 4. $\frac{65}{81}$ 【解析】$\because X\sim B(2,p)$，$\therefore P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-C_2^0(1-p)^2=\frac{5}{9}$,

$\therefore (1-p)^2=\frac{4}{9}$，$p=\frac{1}{3}\left(p=\frac{5}{3}\text{舍去}\right)$.

$\therefore Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，$\therefore P(Y\geqslant1)=1-P(Y=0)=1-C_4^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81}$.

◆ 5. $\frac{81}{125}$ 【解析】两次击中的概率 $P(X=2)=C_3^2\cdot0.6^2\cdot(1-0.6)=\frac{54}{125}$；三次击中的概率 $P(X=3)=0.6^3=\frac{27}{125}$. $\therefore P(X\geqslant2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{54}{125}+\frac{27}{125}=\frac{81}{125}$.

6. $\frac{1}{8}$　$-\frac{1}{72}$　【解析】依题有

$$\begin{cases} a+(a+b)+(a+2b)+\frac{1}{6}+(3a-b)+(a+b)=1, \\ \frac{1}{6}+(3a-b)+(a+b)=2(a+a+b+a+2b), \end{cases}$$

可解得$\begin{cases} a=\frac{1}{8}, \\ b=-\frac{1}{72}. \end{cases}$

7. (1)记“射手射击 1 次,击中目标”为事件 A.

该射手在 3 次射击中至少有两次连续击中目标的概率为 $P_1=P(A\cdot A\cdot\overline{A})+P(\overline{A}\cdot A\cdot A)+P(A\cdot A\cdot A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{63}{125}$.

(2)该射手第 3 次击中目标时,恰好射击了 4 次的概率为 $P_2=C_3^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{162}{625}$.

(3)“$\xi=k$”的概率为

$P(\xi=k)=C_{k-1}^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^{k-3}\times\frac{3}{5}=C_{k-1}^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^{k-3}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant3)$.

ξ 的分布列为:

ξ	3	4	…	k	…
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{162}{625}$	…	$C_{k-1}^2\left(\frac{2}{5}\right)^{k-3}\left(\frac{3}{5}\right)^3$	…

8. ξ 的取值是 0,10,20,30. 单个坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为 $(1-0.5)^3=\frac{1}{8}$,单个坑不需补种的概率为 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. 3 个坑都不需要补种的概率为 $P(\xi=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{8}\right)^0\times\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx0.670$. 恰有 1 个坑需要补种的概率为 $P(\xi=10)=C_3^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^2\approx0.287$. 恰有 2 个坑需要补种的概率为 $P(\xi=20)=C_3^2\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{7}{8}\approx0.041$. 3 个坑都需要补种的概率为 $P(\xi=30)=C_3^3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3\times\left(\frac{7}{8}\right)^0\approx0.002$.

补种费用 ξ 的分布列为:

ξ	0	10	20	30
P	0.670	0.287	0.041	0.002

9. ξ 的取值为 1,2,3,4.

$\xi=1$,表示第一次就投中了,其概率为 $P(\xi=1)=0.7$.

$\xi=2$,表示第一次没投中,第二次投中了,其概率为 $P(\xi=2)=(1-0.7)\times0.7=0.21$.

$\xi=3$,表示第一、二次都没投中,第三次投中了,其概率为 $P(\xi=3)=(1-0.7)^2\times0.7=0.063$.

$\xi=4$,表示第一、二、三次都没投中,第四次投中了或没有投中,其概率为 $P(\xi=4)=(1-0.7)^3=0.027$. ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	0.7	0.21	0.063	0.027

高考测评

1. C　【解析】由 $\xi\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$可知,$P(\xi\geqslant2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-C_{10}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-C_{10}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1\,013}{1\,024}$.

2. D　【解析】依题意有

$$\begin{cases} C_{15}^k\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{15-k}\geqslant C_{15}^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{14-k}, \\ C_{15}^k\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{15-k}\geqslant C_{15}^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{16-k}, \end{cases}$$

解得$3\leqslant k\leqslant4$.

3. B　【解析】由题可知质点 P 在 5 次运动中向右移动 2 次,向上移动 3 次,且每次移动是相互独立的,故向右移动的次数 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore P(\xi=2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

4. $\frac{7}{8}$　【解析】$\frac{3}{4}=P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)=1-(1-p)^2$,$\therefore p=\frac{1}{2}\left(p=\frac{3}{2}\text{舍去}\right)$,$\therefore P(\eta\geqslant1)=1-P(\eta=0)=1-(1-p)^3=\frac{7}{8}$.

5. 设在取出的 20 件产品中,合格产品有 X 件,则 X 服从二项分布 $B(20,0.95)$,于是恰好有 k 件产品合格的概率为$P(X=k)=C_{20}^k\times0.95^k\times0.05^{20-k}(0\leqslant k\leqslant20)$.

$\therefore\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_{20}^k\times0.95^k\times0.05^{20-k}}{C_{20}^{k-1}\times0.95^{k-1}\times0.05^{21-k}}=\frac{(20-k+1)\times0.95}{k\times0.05}=1+\frac{21\times0.95-k}{k\times0.05}(1\leqslant k\leqslant20)$.

于是当 $k<19.95$ 时,$P(X=k-1)<P(X=$

k)；当$k>19.95$时，$P(X=k-1)>P(X=k)$.

故由此可知，在取出的 20 件产品中，最有可能有 19 件合格品.

6.（1）根据比赛规定使用"七局四胜制"，即先赢四局者胜，则：①记事件 A_1 为"甲连胜四局"，所以甲打完四局就获胜的概率为$P(A_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$；②记事件$A_2$ 为"在前四局比赛中甲胜三局且第五局也胜"，所以甲打完五局才获胜的概率为 $P(A_2)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；③记事件 A_3 为"在前五局比赛中甲胜三局且第六局也胜"，所以甲打完六局才获胜的概率为$P(A_3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$；④记事件 A_4 为"在前六局比赛中甲胜三局且第七局也胜"，所以甲打完七局才获胜的概率为$P(A_4)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$.

（2）由题意可知，比赛局数 X 的可能取值为 4，5，6，7，并且每种情况下比赛总有一人获胜，故离散型随机变量 X 的分布列为：

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

第三节　离散型随机变量的均值

学业测评

1. C 【解析】由$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+x=1$，得 $x=\frac{1}{8}$，$E(\xi)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

2. B 【解析】由 $0.1+x+y=1$ 及 $1\times0.1+2x+3y=2.3$，得 $x=0.5$，$y=0.4$.

3. A 【解析】由 $0.5+x+0.2=1$，得 $x=0.3$，$E(\xi)=0\times0.5+1\times0.3+2\times0.2=0.7$，$E(\eta)=2E(\xi)+1=2.4$.

4. B 【解析】$E(\xi)=\frac{1}{2}n=15$，$\therefore n=30$，$\therefore \eta\sim B\left(30,\frac{1}{3}\right)$，$\therefore E(\eta)=30\times\frac{1}{3}=10$.

5. C 【解析】得分 $X\sim B(6,0,7)$，$E(X)=6\times0.7=4.2$.

6. 200 【解析】$\because$ 种子发芽率为 0.9，不发芽率为 0.1，每粒种子发芽与否相互独立，故设没有发芽的种子数为 ξ，则 $\xi\sim B(1\,000,0.1)$，$\therefore E(\xi)=1\,000\times0.1=100$，故需补种的种子数 X 的期望为 $E(X)=2E(\xi)=200$.

7. $\frac{2}{3}$ 【解析】ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

8. $\frac{4}{9}$ 【解析】设所得两数之积为 ξ，则 ξ 的可能值为 0，1，2，4，$P(\xi=0)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，$P(\xi=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(\xi=2)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. 所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{36}=\frac{4}{9}$.

9. ξ 的可能取值是 2，3，4，5，6. $\because n_1=n_6=1$，$\therefore P(\xi=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，$P(\xi=3)=C_4^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$，$P(\xi=4)=C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，$P(\xi=5)=C_4^3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$，$P(\xi=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$. $\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	2	3	4	5	6
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$\therefore \xi$ 的数学期望为 $E(\xi)=2\times\frac{16}{81}+3\times\frac{32}{81}+4\times\frac{8}{27}+5\times\frac{8}{81}+6\times\frac{1}{81}=\frac{10}{3}$.

10. (1)$\because$ 随意抽取 4 件产品进行检查是随机事件,而第一天有 9 件正品,$\therefore$ 第一天通过检查的概率为 $P_1=\frac{C_9^4}{C_{10}^4}=\frac{3}{5}$.

(2)同(1),第二天通过检查的概率为 $P_2=\frac{C_8^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{3}$,因第一天,第二天是否通过检查相互独立,所以,前两天全部通过检查的概率为 $P=P_1P_2=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

(3)记得分为 ξ,则 ξ 的值分别为 0,1,2,

$\therefore P(\xi=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$,$P(\xi=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$,$P(\xi=2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$,$\therefore E(\xi)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$.

11. (1)两次抽取的球的分值构成的有序数对共有 36 对,其中分值和为 12 的有 1 对,分值和为 11 的有 2 对,分值和为 10 的有 3 对,所以每位会员获奖的概率为 $P=\frac{1+2+3}{36}=\frac{1}{6}$.

(2)设每位来宾抽奖后,休闲会馆获得的钱数为随机变量 ξ,则 $P(\xi=30-m)=\frac{1}{36}$,$P(\xi=-70)=\frac{2+3}{36}=\frac{5}{36}$,$P(\xi=30)=1-P(\xi=-70)-P(\xi=30-m)=\frac{5}{6}$,则会馆获利的期望为 $E(\xi)=\frac{1}{36}\times(30-m)+\frac{5}{36}\times(-70)+\frac{5}{6}\times30=\frac{580-m}{36}$. 若会馆这次活动打算既不赔钱也不赚钱,则 $E(\xi)=0$. 所以 $m=580$.

高考测评

1. A 【解析】根据题意,由已知表格可求 $E(\xi)=0\times0.3+2\times0.2+4\times0.5=2.4$,故 $E(5\xi+4)=5E(\xi)+4=5\times2.4+4=16$,故答案选 A.

2. D 【解析】由于离散型随机变量 ξ 服从二项分布,即 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{4}\right)$,故 $n=5$,$p=\frac{1}{4}$,$E(\xi)=\frac{5}{4}$,进而得 $E(-\xi)=-E(\xi)=-\frac{5}{4}$,所以答案选 D.

3. A 【解析】节日期间这种鲜花需求量 X 的数学期望 $E(X)=200\times0.20+300\times0.35+400\times0.30+500\times0.15=40+105+120+75=340$(束),则利润 $Y=5X+1.6(500-X)-500\times2.5=3.4X-450$,所以 $E(Y)=3.4E(X)-450=3.4\times340-450=706$(元),即期望利润为 706 元. 应选 A.

4. B 【解析】由题意得次品数 X 服从超几何分布,其中 $N=10$,$M=3$,$n=2$,$\therefore E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{2\times3}{10}=\frac{3}{5}$.

5. 5.25 【解析】X 的可能取值为 3,4,5,6.

$P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}$;$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}$;

$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$;$P(X=6)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$.

所以 X 的分布列为:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{3}{20}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{2}=5.25$.

6. $\frac{7}{3}$ 【解析】先利用分布列的性质求出 a 的值,然后再利用数学期望的定义求出 $E(\xi)$,最后利用期望的性质求出 $E(\eta)$. 由分布列的性质知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1$,即 $a=\frac{1}{6}$. $E(\xi)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$,$\therefore E(\eta)=E(2\xi+3)=2E(\xi)+3=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$.

7. $\frac{4}{7}$ 【解析】解法 1:ξ 的可能取值为 0,1,2. $P(\xi=0)=\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}$,$P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{10}{21}$,$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$,$\therefore E(\xi)=\frac{10}{21}\times0+\frac{10}{21}\times1+\frac{1}{21}\times2=\frac{4}{7}$.

解法 2:由题意知,女生入数 ξ 服从超几何分布,其中 $N=7$,$M=2$,$n=2$,$\therefore E(\xi)=\frac{2\times2}{7}=\frac{4}{7}$.

8. (1) 记 A 表示事件：稿件能通过两位初审专家的评审；B 表示事件：稿件恰能通过一位初审专家的评审；C 表示事件：稿悠扬能通过复审专家的评审；D 表示事件：稿件被录用. 则 $D=A+B\cdot C$，$\because P(A)=0.5\times0.5=0.25$，$P(B)=2\times0.5\times0.5=0.5$，$P(C)=0.3$，$\therefore P(D)=P(A+B\cdot C)=P(A)+P(B\cdot C)=P(A)+P(B)P(C)=0.25+0.5\times0.3=0.40$.

(2) $X-B(4,0.4)$，X 的可能取值为 0，1，2，3，4.

$P(X=0)=(1-0.4)^4=0.1296$，

$P(X=1)=C_4^1\times0.4\times(1-0.4)^3=0.3456$，

$P(X=2)=C_4^2\times0.4^2\times(1-0.4)^2=0.3456$，

$P(X=3)=C_4^3\times\times0.4^3\times(1-0.4)=0.1536$，

$P(X=4)=0.4^4=0.0256$，$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	0.129 6	0.345 6	0.345 6	0.153 6	0.025 6

期望 $E(X)=4\times0.4=1.6$.

9. 设来领奖的人数 $\xi=k(k=0,1,2,\cdots,3000)$，所以 $P(\xi=k)=C_{3000}^{k}\cdot0.04^k\cdot(1-0.04)^{3000-k}$，可见 $\xi\sim B(3000,0.04)$，所以 $E(\xi)=3000\times0.04=120$（人）$>100$（人）. 所以不能向每一位顾客都发出领奖邀请，寻呼台至少应准备 120 份礼品，才能使每一位领奖人都得到礼品.

10. (1) 设 5 发子弹命中 $\xi(\xi=0,1,2,3,4,5)$ 发，则由题意有 $P(\xi=5)=C_5^5 0.5^5=\frac{1}{32}$.

(2) ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

设游客在一次游戏中获得的奖金为 X 元，于是 X 的分布列为：

X	-2	0	40
P	$\frac{26}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

故该游客在一次游戏中获得奖金的均值 $E(X)=(-2)\times\frac{26}{32}+0\times\frac{5}{32}+40\times\frac{1}{32}=-0.375$（元）.

11. (1) $X=n+2$ 表示两次调题均为 A 类型试题，概率为 $\frac{n}{m+n}\times\frac{n+1}{m+n+2}$.

(2) $m=n$ 时，每次调用的是 A 类型试题的概率为 $p=\frac{1}{2}$，随机变量 X 可取 n，$n+1$，$n+2$，

$P(X=n)=(1-p)^2=\frac{1}{4}$，$P(X=n+1)=2p(1-p)=\frac{1}{2}$，$P(X=n+2)=p^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore X$ 的分布列为：

X	n	$n+1$	$n+2$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=n\times\frac{1}{4}+(n+1)\times\frac{1}{2}+(n+2)\times\frac{1}{4}=n+1$.

第四节　离散型随机变量的方差

学业测评

1. B 【解析】$\because D(X_{甲})>D(X_{乙})$，$\therefore$ 乙种水稻比甲种水稻分蘖整齐.

2. D 【解析】$0.2+p+0.3=1$，$\therefore p=0.5$. 又 $E(\xi)=0\times0.2+1\times0.5+0.3x=1.1$，$\therefore x=2$，$\therefore D(\xi)=0^2\times0.2+1^2\times0.5+2^2\times0.3-1.1^2=0.49$.

3. B 【解析】由 $\xi\sim B(100,0.2)$ 知随机变量 ξ 服从二项分布，且 $n=100$，$p=0.2$，由公式得 $D(\xi)=np(1-p)=100\times0.2\times0.8=16$，因此 $D(4\xi+3)=4^2D(\xi)=16\times16=256$. 故选 B.

4. C 【解析】由题意可得 $\begin{cases}np=2,\\np(1-p)=1.6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=0.2,\\n=10.\end{cases}$

5. A 【解析】两枚硬币同时出现反面的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故 $\xi\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$，因此 $D(\xi)=10\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}$.

6. 16 【解析】由 $D(a\xi+b)=a^2D(\xi)$，得 $D(\eta)=D(2\xi+5)=2^2D(\xi)=16$.

7. 3×2^{-10} 【解析】$\because X\sim B(n,p)$，$\therefore E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$. $\therefore \begin{cases}np=6,\\np(1-p)=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=12,\\p=\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore P(X=1)=C_{12}^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=3\times2^{-10}$.

8. $\sqrt{1.2}$ 【解析】∵ $E(X)=2$，∴ $D(X)=(0-2)^2\times0.1+(1-2)^2\times0.2+(2-2)^2\times0.4+(3-2)^2\times0.2+(4-2)^2\times0.1=1.2$. ∴ $\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.2}$.

9. $\frac{3}{2}$　1 【解析】由 ξ 的分布列可得

$$\begin{cases}0\leqslant\frac{1}{2}-p\leqslant\frac{1}{2},\\0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}.$$

∵ $E(\xi)=p+1$，∴ $E(\xi)_{\max}=\frac{3}{2}$. 又 $D(\xi)=(p+1)^2\left(\frac{1}{2}-p\right)+p^3+\frac{1}{2}(p-1)^2=-p^2-p+1=-\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，∴当 $p=0$ 时，$D(\xi)_{\max}=1$.

10. (1) ∵ $E(\eta)=0\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{15}+50\times\frac{2}{15}+60\times\frac{1}{15}=16$，$D(\eta)=(0-16)^2\times\frac{1}{3}+(10-16)^2\times\frac{2}{5}+(20-16)^2\times\frac{1}{15}+(50-16)^2\times\frac{2}{15}+(60-16)^2\times\frac{1}{15}=384$，∴ $\sqrt{D(\eta)}=8\sqrt{6}$.

(2) ∵ $Y=2\eta-E(\eta)$，∴ $D(Y)=D(2\eta-E(\eta))=2^2D(\eta)=4\times384=1\,536$.

11. $E(X)=80\times0.2+90\times0.6+100\times0.2=90$，$D(X)=(80-90)^2\times0.2+(90-90)^2\times0.6+(100-90)^2\times0.2=40$，$E(Y)=80\times0.4+90\times0.2+100\times0.4=90$，$D(Y)=(80-90)^2\times0.4+(90-90)^2\times0.2+(100-90)^2\times0.4=80$，∴ $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$，∴甲生与乙生的成绩均值一样，甲生的方差较小，因此甲生的学习成绩较稳定.

高考测评

1. C 【解析】$E(\xi)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$E(\xi^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，$D(\xi)=E(\xi^2)-(E(\xi))^2=\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$.

2. D 【解析】由分布列的性质可知 $0.5+x+y=1$，即 $x+y=0.5$①. 又 $E(X)=1\times0.5+2x+3y=\frac{15}{8}$②，由①②可知 $\begin{cases}x=\frac{1}{8},\\y=\frac{3}{8},\end{cases}$ ∴ $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1\times0.5+4\times\frac{1}{8}+9\times\frac{3}{8}-\frac{225}{64}=\frac{55}{64}$.

3. A 【解析】∵ $E(\xi)=0\times0.7+1\times0.1+2\times0.1+3\times0.1=0.6$，$E(\eta)=0\times0.5+1\times0.3+2\times0.2=0.7$. 由于 $E(\xi)<E(\eta)$，即甲生产的次品数平均比乙生产的次品数少，故甲比乙的质量好.

4. C 【解析】ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

∴ $E(\xi)=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$，

$D(\xi)=E(\xi^2)-(E(\xi))^2=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+25\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$.

5. C 【解析】∵ $X_1\sim B(n,0.2)$，∴ $E(X_1)=0.2n=2$，∴ $n=10$. 又 $X_2\sim B(6,p)$，∴ $D(X_2)=6p(1-p)=\frac{3}{2}$，∴ $p=\frac{1}{2}$. 又∵ $X_3\sim B(n,p)$，∴ $X_3\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$，∴ $\sigma(X_3)=\sqrt{D(X_3)}=\sqrt{10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2.5}$.

6. $\frac{5}{9}$ 【解析】由题意，得 $\begin{cases}a+b+c=1,\\-a+c=\frac{1}{3},\\2b=a+c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{6},\\b=\frac{1}{3},\\c=\frac{1}{2},\end{cases}$ ∴ $D(\xi)=\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$.

7. 2.75 【解析】若第一次取到编号为 1 的小球，则取球停止，此时 $P(X=1)=\frac{1}{2}$；若第一次取到编号为 2 的小球，将小球编号加 1 并放回，第二次取球编号为 1 或 3，取球停止，此时 X 的取值可能为 $2+1=3$ 或 $2+3=5$，且 $P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 综上所述，随机变量 X 的分布列为：

X	1	3	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$,

$D(X)=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(5-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2.75$，即 X 的方差为 2.75.

8. 0.21 【解析】$D(\xi)=p(1-p)=0.7\times(1-0.7)=0.21$.

9. 2　2.4 【解析】$\because \xi\sim B(10,0.6)$，$\therefore E(\xi)=10\times0.6=6$，$D(\xi)=10\times0.6\times(1-0.6)=2.4$. 又 $\xi+\eta=8$，$\therefore \eta=8-\xi$，$\therefore E(\eta)=E(8-\xi)=8-E(\xi)=8-6=2$，$D(\eta)=D(8-\xi)=D(\xi)=2.4$.

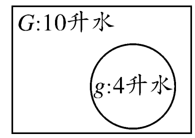
10. (1) ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{20}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{1}{5}=1.5$. $D(\xi)=(0-1.5)^2\times\frac{1}{2}+(1-1.5)^2\times\frac{1}{20}+(2-1.5)^2\times\frac{1}{10}+(3-1.5)^2\times\frac{3}{20}+(4-1.5)^2\times\frac{1}{5}=2.75$.

(2) 由 $D(\eta)=a^2D(\xi)$，得 $a^2\times2.75=11$，即 $a=\pm2$. 又 $E(\eta)=aE(\xi)+b$，所以当 $a=2$ 时，由 $1=2\times1.5+b$，得 $b=-2$；当 $a=-2$ 时，由 $1=-2\times1.5+b$，得 $b=4$. 所以 $\begin{cases}a=2,\\ b=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=4\end{cases}$ 即为所求.

11. 如答图 11 所示，设 10 升水所占区域为 G，其中的 4 升水所占区域为 g，一个细菌进入区域 g 中的概率 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，3 个细菌中有 X 个进入区域 g 是一个独立重复试验概型. $X=0,1,2,3$.



答图 11

(1) $P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}=0.432$.

(2) $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=0.216$，$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=0.288$，$P(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=0.064$. 故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

(3) $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=1.2$，$D(X)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=0.72$.

12. (1) 由概率分布列的性质，得 $0.12+0.18+0.20+0.20+100a^2+3a+4a=1$，$\therefore 100a^2+7a=0.3$，$\therefore 1\ 000a^2+70a-3=0$，$a=\frac{3}{100}$ 或 $a=-\frac{1}{10}$（舍去），即 $a=0.03$，$\therefore 100a^2+3a=0.18$，$4a=0.12$，$\therefore X$ 的分布列为：

X	200	220	240	260	280	300
P	0.12	0.18	0.20	0.20	0.18	0.12

$\therefore E(X)=200\times0.12+220\times0.18+240\times0.20+260\times0.20+280\times0.18+300\times0.12=250$(km)，$D(X)=50^2\times0.12+30^2\times0.18+10^2\times0.20+10^2\times0.20+30^2\times0.18+50^2\times0.12=964$.

(2) 由已知 $\eta=3X-3$ ($X>3$, $X\in\mathbf{Z}$)，$\therefore E(\eta)=E(3X-3)=3E(X)-3=3\times250-3=747$(元)，$D(\eta)=D(3X-3)=3^2D(X)=9\times964=8\ 676$.

第五节　正态分布

学业测评

1. C 【解析】仔细对照正态分布密度函数：$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x\in\mathbf{R}$)，注意指数的分母上的 σ 和系数的分母上的 σ 要一致，以及指数部分是一个负数.

2. B 【解析】根据正态曲线的性质：当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，正态曲线在 x 轴上方，只有当 $\mu=0$ 时，正态曲线才关于 y 轴对称，所以(2)不正确. 准确掌握正态曲线性质是解决本题的关键.

3. B 【解析】$\because \mu=10$，$\therefore E(\xi)=10$，$\sigma=2$.

4. D

5. A 【解析】$\because X\sim N(0,\sigma^2)$，$\therefore \mu=0$. 又 $\because P(-2\leqslant X\leqslant 0)=0.4$，$\therefore P(0\leqslant X\leqslant 2)=0.4$，$\therefore P(X>2)=\frac{1}{2}(1-0.4\times 2)=0.1$.

6. $2a$ 【解析】$\mu=0$，正态曲线关于 $x=0$ 对称.

7. $(-8,10)$ 【解析】$\mu=1$，$\sigma=3$，$\mu-3\sigma=-8$，$\mu+3\sigma=10$，区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$就是$(-8,10)$.

8. 0.682 6 【解析】$P(-1<\xi\leqslant 3)=P(1-2<\xi\leqslant 1+2)=P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)=0.682\ 6$.

9. (1)设学生的得分情况为随机变量 X，$X\sim N(70,10^2)$，则 $\mu=70$，$\sigma=10$. 在 60～80 分之间的学生所占的比例为 $P(70-10<X\leqslant 70+10)=0.682\ 6$，所以不及格的学生所占的比例为$\frac{1}{2}(1-0.682\ 6)=0.158\ 7$，即成绩不及格的学生占15.87%.

(2)成绩在 80～90 分内的学生所占的比例为$\frac{1}{2}[P(70-2\times 10<X\leqslant 70+2\times 10)-P(70-10<X\leqslant 70+10)]=\frac{1}{2}(0.954\ 4-0.682\ 6)=0.135\ 9$，即成绩在 80～90 分内的学生占 13.59%.

10. 根据正态分布的 3σ 原则，我们认为尺寸落在区间$(27.45-3\times 0.05,27.45+3\times 0.05)$之外的零件是在非正常状态下生产的，有两个尺寸分别为 27.23 和 27.68 的零件不符合落在区间$(27.45-3\times 0.05,27.45+3\times 0.05)$内这一条件，所以判定它们是在非正常状态下生产的.

高考测评

1. C 【解析】$\because P(\xi<4)=0.8$，$\therefore P(\xi>4)=1-0.8=0.2$. 由题意知图象的对称轴为直线 $x=2$，$\therefore P(\xi<0)=P(\xi>4)=0.2$. $\therefore P(0<\xi<4)=1-P(\xi<0)-P(\xi>4)=0.6$. $\therefore P(0<\xi<2)=\frac{1}{2}P(0<\xi<4)=0.3$.

2. C 【解析】由 $\Phi(-1.96)=1-\Phi(1.96)=0.025$，得 $\Phi(1.96)=0.975$. $P(|\xi|<1.96)=\Phi(1.96)-\Phi(-1.96)=0.975-0.025=0.950$.

3. B 【解析】$P(|\xi-\mu|<\sigma)=P(-\sigma<\xi-\mu<\sigma)=P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=P(\xi<\mu+\sigma)-P(\xi\leqslant\mu-\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)$，故选 B.

4. C 【解析】设一本的录取分数线可能划在 m 分，则有 $P(\xi\geqslant m)=1-P(\xi<m)=1-\Phi\left(\frac{m-480}{100}\right)=0.4$，$\Phi\left(\frac{m-480}{100}\right)=0.6$，所以$\frac{m-480}{100}=0.25$，$m=505$，选 C.

5. 0.2 【解析】由于正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称且其落在区间$(0.2,+\infty)$上的概率为0.5，得 $\mu=0.2$.

6. 1 【解析】$\because \xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(\xi>3)=P(\xi<-1)$，$\therefore \mu=\frac{3+(-1)}{2}=1$，$\therefore E(\xi)=\mu=1$.

7. 4.56% 【解析】属于区间$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$即区间$(1,5)$的取值概率约为 95.44%，故不属于区间$(1,5)$这个尺寸范围的零件数约占总数的 $1-95.44\%=4.56\%$.

8. $\mu=60.5$，$\sigma=2$. $P(58.8<X<62.5)=\Phi\left(\frac{62.5-60.5}{2}\right)-\Phi\left(\frac{58.5-60.5}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.682\ 6$. $0.682\ 6\times 1\ 000=682.6\approx 683$(人). 即这 1 000 名男生中体重属于正常情况的约有 683 人.

9. (1)设参赛学生的分数为 ξ. $\xi\sim N(70,100)$. $P(\xi\geqslant 90)=1-P(\xi<90)=1-F(90)=1-\Phi\left(\frac{90-70}{10}\right)=1-\Phi(2)=1-0.977\ 2=0.022\ 8$. 即90分以上(含 90 分)的学生占全体参赛学生的 2.28%. 故参赛总人数为$\frac{12}{0.022\ 8}\approx 526$(人).

(2)假定设奖的分数线为 x 分. $P(\xi\geqslant x)=1-P(\xi<x)=1-F(x)=1-\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=\frac{50}{526}\approx 0.095\ 1$，即 $\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)\approx 0.904\ 9$. 查表得$\frac{x-70}{10}\approx 1.31$，解得 $x\approx 83.1$. 即设奖的分数线约为 83.1 分.

10. 设每人的评分 $X\sim N(95,5^2)$，评分在85～95 分的概率为 $P(85<X<95)=P(\mu-2\sigma<X<\mu)=\frac{1}{2}\times 0.954\ 4=0.477\ 2$. 故 85～95 分的人数为 $0.477\ 2\times 1\ 200\approx 573$. 故应准备 573 人的问卷.

专题四　统计

第一节　随机抽样

学业测评

1. C 【解析】三种抽样的共同特征是抽样过程中,每个个体被抽取的可能性相等,故选 C.

2. A 【解析】70 人的会考成绩是统计中的总体,每个人的会考成绩是个体,被选出的 30 人的会考成绩是一个样本,样本容量为 30.

3. C

4. C

5. D 【解析】这四点是简单随机抽样的四个特点.

6. 6 【解析】$S+15\times8=126$,得 $S=6$.

7. 5,16,27,38,49,50,61,72,83,94

【解析】$k=1$ 时,$5+k=6$,故在第二组抽取 16 号;$k=2$ 时,$5+2=7$,故在第三组抽取 27 号;$k=3$ 时,$5+k=8$,故在第四组抽取 38;$k=4$ 时,$5+k=9$,故在第五组抽取 49;当 $k=5$ 时,$5+k=10$,故在第六组抽取 50;…;当 $k=9$ 时,$5+k=14$,故在第十组抽取 94.

8. 50 【解析】两个年龄段教师的比例为 $350:140=5:2$,故应抽取不到 40 岁的教师人数是 $70\times\frac{5}{7}=50$.

9. 采用抽签法的抽样过程:将这 50 名学生的学号写在形状、大小相同的纸条上,然后将这些纸条放在同一不透明的盒子里,进行均匀搅拌. 抽签时,每次抽一个,连抽 6 次,则所抽得的 6 个纸条上学生的学号所对应的学生即为应选出的 6 名学生.

采用随机数表法的抽样过程:先将 50 名同学编号为 00,01,02,…,49,再在随机数表中任选一数作为开始数,例如选第 10 行第 3 列(两数一组)数开始,取开头的两位数向右读数得 32,44,09,47,27,49,则样本号码所对应的学生即为应选出的 6 名学生.

10. 第一步,将 503 名学生用随机方式编号为 001,002,003,…,503. 第二步,用随机数表法剔除 3 个个体,这样剩下 500 名学生,对剩下的 500 名学生重新编号. 第三步,确定分段间隔 k,$k=\frac{500}{50}=10$,将总体分为 50 个部分,每一部分包括 10 个个体,这时,第 1 部分的个体编号为 1,2,…,10;第 2 部分的个体编号为 11,12,…,20;以此类推,第 50 部分的个体编号为 491,492,…,500. 第四步,在第 1 部分用简单随机抽样方法确定起始的个体编号,例如 5. 第五步,依次在第 2 部分,第 3 部分,…,第 50 部分,取出号码为 15,25,…,495,这样得到一个容量为 50 的样本.

11. (1)设登山组人数为 x,则游泳组人数为 $3x$,设游泳组中青年人、中年人、老年人各占比例分别为 a,b,c,则有 $\frac{x\cdot40\%+3xb}{4x}=47.5\%$,$\frac{x\cdot10\%+3xc}{4x}=10\%$,解得 $b=50\%$,$c=10\%$,故 $a=1-50\%-10\%=40\%$. 即游泳组中青年人、中年人、老年人各占比例分别为 40%,50%,10%.

(2)游泳组中,抽取的青年人人数为 $200\times\frac{3}{4}\times40\%=60$(人),抽取的中年人人数为 $200\times\frac{3}{4}\times50\%=75$(人),抽取的老年人人数为 $200\times\frac{3}{4}\times10\%=15$(人).

高考测评

1. D 【解析】抽样比为 $\frac{40}{800}=\frac{1}{20}$,因此,从各层依次抽取的人数为 $160\times\frac{1}{20}=8$,$320\times\frac{1}{20}=16$,$200\times\frac{1}{20}=10$,$120\times\frac{1}{20}=6$,故选 D.

2. B 【解析】设样本容量为 n,则依题意有 $\frac{350}{750}\times n=7$,$n=15$.

3. D 【解析】A 的总体容量较大,用简单随机抽样比较麻烦;B 中无法确定总体容量,无法应用简单随机抽样;C 中各种人员的意见差异较大,不宜采用简单随机抽样,故 D 正确.

4. B 【解析】系统抽样又称等距抽样,需要使编号间隔相同,且按次序分别在每组抽取一个.

◆5. C 【解析】题中的抽样方法是将发票平均分成若干组,每组 50 张,从第一组中抽出了 15 号,以后各组抽取 $15+50n$(n 为自然数)号,符合系统抽样的特点.

◆6. 80 【解析】设在中年人中的抽样人数为 x,则 $\frac{70}{1\ 400}=\frac{x}{1\ 600}$,解得 $x=80$. 故填 80.

◆7. 16 【解析】因是系统抽样,54 不能被 4 整除,需先剔除 2 人,再重新编号分组,最后按系统抽样的步骤抽取,所以抽出的某某号,是编号,并不是学号. 先按学号随机剔除 2 人,再重新给 52 人编号 1 ~ 52,每组 13 人. 因为第一组取到 3 号,$29=2\times13+3$,$42=3\times13+3$,所以还有一个同学的编号为 $1\times13+3=16$.

◆8. 63 【解析】本题的入手点在于题设中的"第 k 组中抽取的号码的个位数字与 $m+k$ 的个位数字相同". 由题设可知:第 7 组的编号为 60,61,62,63,…,69,而第 7 组中抽取的号码的个位数字与 $6+7=13$ 的个位数字相同,故第 7 组抽取的号码是 63.

◆9. 应结合三种抽样方法的使用范围和实际情况,灵活地使用各种抽样方法解决问题.

(1)总体由差异明显的几个层次组成,故选用分层抽样法. 第一步,确定抽取个数. 因为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$,所以甲厂生产的应抽取 $\frac{21}{3}=7$(个),乙厂生产的应抽取 $\frac{9}{3}=3$(个). 第二步,用抽签法分别在甲厂生产的篮球中抽取 7 个,在乙厂生产的篮球中抽取 3 个,这些篮球便组成了我们要抽取的样本.

(2)总体容量较小,样本容量也小,用抽签法. 第一步,将 30 个篮球编号,编号为 00,01,…,29;第二步,将以上 30 个编号分别写在大小、形状相同的小纸条上,揉成小球,制成号签;第三步,把号签放入一个不透明的袋子中,充分搅匀;第四步,在袋子中逐个抽取 3 个号签,并记录上面的号码;第五步,找出和所得号码对应的篮球即为要抽取的样本.

(3)总体容量较大,样本容量较小,宜用随机数表法. 第一步,将 300 个篮球用随机方式编号,编号为:001,002,003,…,300;第二步,在随机数表中随机地确定一个数作为开始,如第 8 行第 29 列的数"7",任选一个方向作为读数方向,比如向右读;第三步,从数"7"开始向右读,每次读取三位,凡不在 001 ~ 300 中的数跳过去不读,遇到已经读过的数也跳过去不读,便可依次得到 286,211,234,297,207,013,027,086,284,281 这 10 个号码,这就是所要抽取的 10 个样本个体的号码.

(4)总体容量较大,样本容量也较大,宜用系统抽样法. 第一步,将 300 个篮球用随机方式编号,编号为 000,001,002,…,299,并均分成 30 段;第二步,在第一段 000,001,002,…,009 这十个编号中用简单随机抽样抽出一个(如 002)作为起始号码;第三步,将编号 002,012,022,…,292 的个体抽出,即可组成所需的样本.

第二节 用样本估计总体

学业测评

◆1. C 【解析】$\frac{5}{n}=0.25$,$n=20$.

◆2. C 【解析】频率之和为 1,频数之和为 n. 故选 C.

◆3. B 【解析】$\frac{3+8+9+11+3+12}{3+8+9+11+3+12+4}=0.92$. 故选 B.

◆4. D 【解析】由直方图的意义便知,故选 D.

◆5. C 【解析】叶相同者要重复记录,不能共用一个叶. 故选 C.

◆6. 40 【解析】总体中[2 500,3 500)的频率为 $(0.000\ 5+0.000\ 3)\times500=0.4$,∴ 样本中[2 500,3 500)的频率也为 0.4,应抽 $100\times0.4=40$(人).

◆7. 0. 19 【解析】$s^2=\frac{1}{21}\times[(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\cdots+(a_{20}-\bar{x})^2+(\bar{x}-\bar{x})^2]=\frac{1}{21}\times20\times0.20=\frac{4}{21}\approx0.19$.

◆8. 4 【解析】由平均数公式,得 $(x+y+10+11+9)\times\frac{1}{5}=10$,则 $x+y=20$;又∵ 方差为 2,则 $[(x-10)^2+(y-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2]\times\frac{1}{5}=2$,得 $x^2+y^2=208$,

$2xy=192$，∴ 有 $|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2xy}=4$.

9. 用茎叶图表示，如答图 12 所示. 容易看出甲组成绩较集中，即甲组成绩更整齐一些.

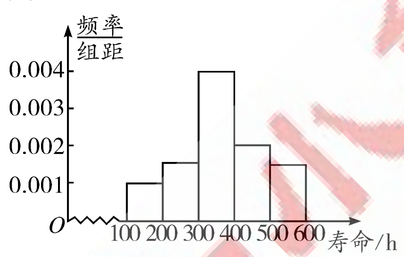
甲		乙
6	7	994
76654321	8	024599
0	9	1

答图 12

10. (1)

分组	频数	频率
100 ~ 200	20	0.10
200 ~ 300	30	0.15
300 ~ 400	80	0.40
400 ~ 500	40	0.20
500 ~ 600	30	0.15
合计	200	1.00

(2) 如答图 13 所示.



答图 13

(3) 由频率分布表或频率分布直方图可看出，电子元件寿命在 100 ~ 400 h 以内的频率为 0.65.

(4) 由频率分布表或频率分布直方图可看出，电子元件寿命在 400 h 以上的频率为 0.35.

高考测评

1. D 【解析】z 的平均值为 M 时，$az+b$ 的平均值为 $aM+b$；$M=4$，$a=13$，$b=6$，所以 $13x_1+6, 13x_2+6, \cdots, 13x_n+6$ 的平均值为 $13\times4+6=58$. z 的方差为 N 时，$az+b$ 的方差为 a^2N；$N=3$，$a=13$，所以 $13x_1+6, 13x_2+6, \cdots, 13x_n+6$ 的方差为 $13^2\times3=507$.

2. D 【解析】$a=\frac{1}{10}(15+17+14+10+15+17+17+16+14+12)=14.7$；对这 10 个数排序，从小到大依次是 10，12，14，14，15，15，16，17，17，17，$b=\frac{15+15}{2}=15$；这 10 个数中出现次数最多的是 17，$c=17$，$c>b>a$.

3. B 【解析】大于 21 的情况可以通过小于等于 21 的情况得到解决，据"(17，19]，1 和 (19，21]，1" 可知，大于 21 的频数为 $100-2=98$，$\frac{98}{100}=98\%$.

4. B 【解析】作物以直为优，方差小的较直一些.

5. B 【解析】由图易知 $\bar{x}_A<10<\bar{x}_B$，A 的取值波动程度显然大于 B，所以 $s_A>s_B$.

6. 600 【解析】由题意知，在该次数学考试中成绩小于 60 分的频率为 $(0.002+0.006+0.012)\times10=0.2$，故这 3 000 名学生在该次数学考试中成绩小于 60 分的学生数是 $3\ 000\times0.2=600$.

7. 29 与 27.5 【解析】由茎叶图可知上班时间中间两个数是 28 和 30，得中位数是 $\frac{28+30}{2}=29$，下班时间中间两个数是 27 和 28，故中位数是 $\frac{27+28}{2}=27.5$.

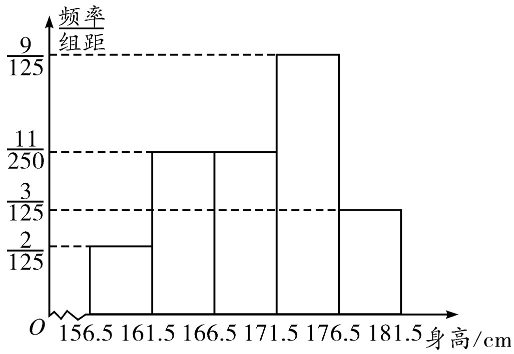
8. (1) 0.32 (2) 36 (3) 0.08 【解析】在频率分布直方图中，用小矩形的面积表示频率，用样本的频率估计总体的概率.

9. 24 23 【解析】$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(19+18+20+21+23+22+20+31+31+35)=24$. $\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(19+17+11+21+24+22+24+30+32+30)=23$.

10. (1) ①由数据最大值、最小值的算法得到：最大值为 181，最小值为 157，极差 $=181-157=24$；②确定组距为 5cm，$\frac{极差}{组距}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$，分成 5 组；③第一组起点为 156.5；④由各组累计频数的算法，得各组的频数. 频率分布表如下：

分组	频数累计	频数	频率
156.5 ~ 161.5	止	4	0.08
161.5 ~ 166.5	正正一	11	0.22
166.5 ~ 171.5	正正一	11	0.22
171.5 ~ 176.5	正正正下	18	0.36
176.5 ~ 181.5	正一	6	0.12
合计		50	1.00

频率分布直方图见答图 14.



答图 14

(2)由计算器计算得到 $\bar{x}=170.1\text{cm}, s=5.5\text{cm}$.

(3)$\because \bar{x}=170.1\text{cm}, s=5.5\text{cm}, \therefore$ 区间$(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$为(164.6,175.6). 由上表可知,落在区间(164.6,175.6)的数据有 36 个,因而估计总体中有 72% 的数据落在区间(164.6,175.6)内.

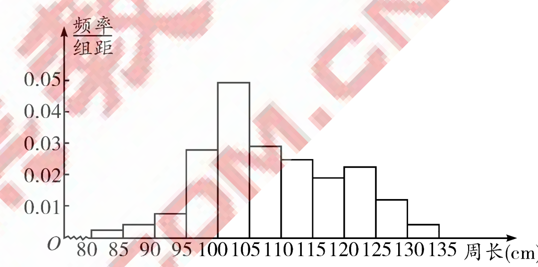
11. (1)从表中可以看出,这组数据的最大值为 135,最小值为 80,故极差为 55,可将其分为 11 组,组距为 5. 从第 1 组[80,85)开始,将各组的频数、频率和$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$填入下表中.

分组	频数	频率	$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$
[80,85)	1	0.01	0.002
[85,90)	2	0.02	0.004
[90,95)	4	0.04	0.008
[95,100)	14	0.14	0.028
[100,105)	24	0.24	0.048

续表

分组	频数	频率	$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$
[105,110)	15	0.15	0.030
[110,115)	12	0.12	0.024
[115,120)	9	0.09	0.018
[125,130)	6	0.06	0.012
[120,125)	11	0.11	0.022
[130,135]	2	0.02	0.004
合计	100	1.00	0.200

(2)这组数据的频率分布直方图如答图 15 所示.



答图 15

(3)从频率分布表可以看出,该样本中小于 100 的频率为 $0.01+0.02+0.04+0.14=0.21$,不小于 120 的频率为 $0.11+0.06+0.02=0.19$,故可估计该片经济林中底部周长小于 100 cm 的树木约占 21%,周长不小于 120 cm 的树木约占 19%.

第三节　变量间的相关关系

学业测评

1. C 【解析】选项 A、B、D 都是函数关系,选项 C 是相关关系.

2. C 【解析】根据相关系数 r 的性质,讨论 $|r|$ 与 0 或 1 的接近程度.

3. A 【解析】回归直线经过样本中心点$(\bar{x}, \bar{y})$,即点(s,t).

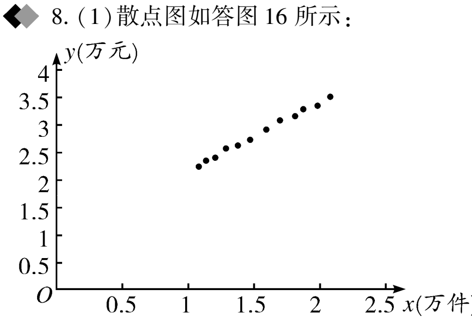
4. C 【解析】当相关性很弱,即 $|r|\to 0$ 时,变量之间不存在相关关系,回归直线不存在.

5. ②③④

6. x 每增加一个单位,y 平均增加 b 个单位

7. (4,10) 【解析】去掉(4,10)后,其余四点大致在一条直线上.

8. (1)散点图如答图 16 所示:



答图 16

(2)经计算可得 $\bar{x}\approx1.542$，$\bar{y}\approx2.848$，$\sum\limits_{i=1}^{12}x_i^2=29.808$，$\sum\limits_{i=1}^{12}x_iy_i=54.244$. $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}x_iy_i-12\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{12}x_i^2-12\bar{x}^2}\approx1.212$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx0.979$. 故所求的回归直线方程为 $\hat{y}=1.212x+0.979$.

(3)当 $\hat{y}=3$ 时，$x\approx1.67$. 因此，当工厂某月产品的总成本为 3 万元时，该月的总产量约为 1.67万件.

高考测评

1. A 【解析】回归直线过样本中心点 $(\bar{x},\bar{y})$.

2. C 【解析】设 y 对 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=bx+a$，因为 $\hat{b}=\dfrac{-2\times(-1)+0\times(-1)+0\times0+0\times1+2\times1}{(-2)^2+2^2}=\dfrac{1}{2}$，$\hat{a}=176-\dfrac{1}{2}\times176=88$，所以 y 对 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{1}{2}x+88$. 选 C.

3. B 【解析】样本中心点是(3.5,42)，则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=42-9.4\times3.5=9.1$，所以回归直线方程是 $\hat{y}=9.4x+9.1$，把 $x=6$ 代入得 $\hat{y}=65.5$.

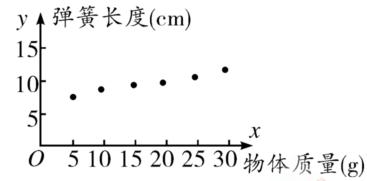
4. C 【解析】对于变量 Y 与 X 而言，Y 随 X 的增大而增大，故 Y 与 X 正相关，即 $r_1>0$；对变量 V 与 U 而言，V 随 U 的增大而减小，故 V 与 U 负相关，即 $r_2<0$，所以有 $r_2<0<r_1$，故选 C.

5. 0.5　0.53 【解析】平均命中率 $\bar{y}=\dfrac{1}{5}\times(0.4+0.5+0.6+0.6+0.4)=0.5$；而 $\bar{x}=3$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-0.1)+(-1)\times0+0\times0.1+1\times0.1+2\times(-0.1)=0.1$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$，于是 $\hat{b}=0.01$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=0.47$，$\therefore\hat{y}=0.01x+0.47$，令 $x=6$，得 $\hat{y}=0.53$.

6. 4.5 【解析】$\bar{x}=2$，$\bar{y}=4.5$，$\hat{b}=0.95$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=2.6$. 当 $x=2$ 时，$\hat{y}=0.95\times2+2.6=4.5$.

7. 14.93 【解析】$\bar{x}=7$，$\bar{y}=41.6$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\,697$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=349$. 所以 $\hat{b}=\dfrac{1\,697-5\times7\times41.6}{349-5\times49}=\dfrac{241}{104}\approx2.32$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx41.6-2.32\times7=25.36$. 所以回归直线方程为 $\hat{y}=2.32x+25.36$. 所以当 $y=6$(万元)$=60(10^3$ 元)时，$60=2.32x+25.36$. 解得 $x\approx14.93$.

8. (1)散点图如答图 17 所示.



答图 17

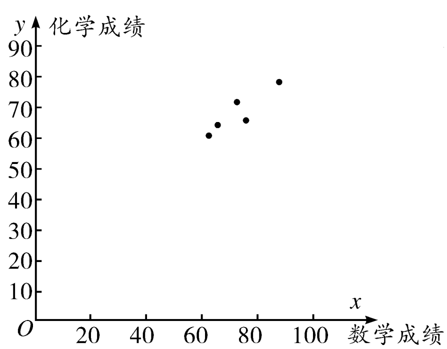
(2)$\bar{x}=\dfrac{1}{6}\times(5+10+15+20+25+30)=17.5$，$\bar{y}=\dfrac{1}{6}\times(7.25+8.12+8.95+9.90+10.96+11.80)\approx9.497$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=2\,275$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=1\,077.7$，$\hat{b}\approx\dfrac{1\,077.7-6\times17.5\times9.497}{2\,275-6\times17.5^2}\approx0.184$，$\hat{a}\approx9.497-0.184\times17.5=6.277$. 故 y 对 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=6.277+0.184x$.

(3)当 $x=27$ 时，有 $\hat{y}=6.277+0.184\times27\approx11.25$，所以当所挂物体的质量为 27 g 时，弹簧的长度大约为 11.25 cm.

9. (1)散点图如答图 18 所示.

(2)把数据列成表如下：

i	1	2	3	4	5
x_i	88	76	73	66	63
y_i	78	65	71	64	61
x_iy_i	6 864	4 940	5 183	4 224	3 843
x_i^2	7 744	5 776	5 329	4 356	3 969
y_i^2	6 084	4 225	5 041	4 096	3 721



答图 18

$\bar{x}=73.2$，$\bar{y}=67.8$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=27\,174$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=23\,167$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=25\,054$，①设 $\hat{y}=a+bx$，则 $\hat{b}=$

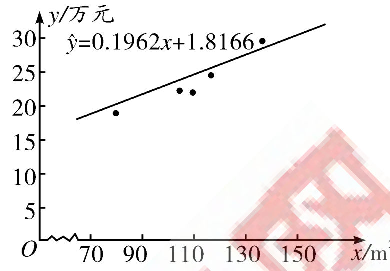
$\dfrac{25\,054-5\times73.2\times67.8}{27\,174-5\times73.2^2}\approx0.625$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx67.8-0.625\times73.2=22.05$，即 y 对 x 的回归方程为 $\hat{y}=22.05+0.625x$.

②设 $\hat{x}=c+dy$，则 $\hat{d}=\dfrac{25\,054-5\times73.2\times67.8}{23\,167-5\times67.8^2}\approx1.309$，$\hat{c}=\bar{x}-\hat{d}\,\bar{y}\approx73.2-1.309\times67.8=-15.550\,2$，即 x 对 y 的回归方程为 $\hat{x}=1.309y-15.550\,2$.

10.（1）数据对应的散点图如答图 19 所示：

（2）设所求回归直线方程为 $\hat{y}=bx+a$，用计算器计算，得所求回归直线方程为 $\hat{y}=0.196\,2x+1.814\,2$.

（3）根据（2），当 $x=150(\text{m}^2)$ 时，销售价格的估计值为 $\hat{y}=0.196\,2\times150+1.814\,2=31.244\,2$（万元）.



答图 19

第四节　统计案例

学业测评

1. D 【解析】由残差的相关知识可知.

2. A 【解析】由于销售量 y 与销售价格 x 成负相关，故排除 B、D. 又当 $x=10$ 时，A 中 $y=100$，而 C 中 $y=-300$，C 不符合题意，故选 A.

3. B 【解析】图①是正相关线性最强，图③是负相关线性最强，②④散点图的点较分散.

4. C 【解析】$\because a+21=73$，$\therefore a=52$，$\therefore b=a+8=52+8=60$.

5. D 【解析】由等高条形图易知，D 选项两个分类变量关系最强.

6. $\hat{y}=5\,317.1942-35.031\,8x$

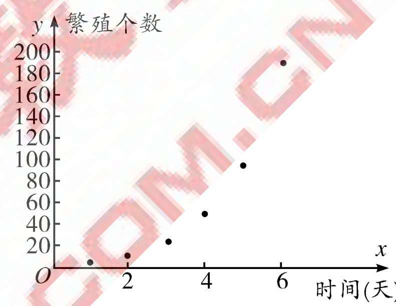
【解析】根据回归方程的参数公式计算可得.

7. 有关 【解析】$K^2>10.828$ 就有 99.9% 的把握认为两个变量是有关系的.

8. 根据题意计算，得 K^2 的观测值 $k=\dfrac{1\,633\times(224\times1\,355-30\times24)^2}{254\times1\,379\times248\times1\,385}\approx1\,244.510$. 因为 $1\,244.510>10.828$，所以我们有 99.9% 的把握说磨牙与肠道中有寄生虫有关.

9. 根据题意，得 K^2 的观测值 $k=\dfrac{392\times(39\times167-157\times29)^2}{196\times196\times68\times324}\approx1.78$. 因为 $1.78<3.841$，所以我们没有理由说具有大学本科及以上学历的人和支持人事改革有关.

10.（1）散点图如答图 20 所示：



答图 20

（2）由散点图看出样本点分布在一条指数曲线 $y=c_1e^{c_2x}$ 的周围，于是令 $z=\ln y$，则

x	1	2	3	4	5	6
z	1.79	2.48	3.22	3.89	4.55	5.25

由计算器算得，相关系数 $r\approx0.999\,9>0.75$，所以 z 与 x 有很强的线性相关关系，因此得 $\hat{z}=0.69x+1.112$，则有 $\hat{y}=e^{0.69x+1.112}$.

（3）

$\hat{y}_i$	6.06	12.09	24.09	48.04	95.77	190.9
y_i	6	12	25	49	95	190

$\sum\limits_{i=1}^{6}\hat{e}_i^2=\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=3.164\,3$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2=\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-6\,\bar{y}^2\approx24\,642.83$，$R^2=1-\dfrac{3.164\,3}{24\,642.83}\approx0.999\,9$. 即解释变量（时间）对预报变量（细菌繁殖的个数）解释了 99.99%.

高考测评

1. C 【解析】当 $x=37$ 时，$\hat{y}=0.577\times37-0.448=20.901\approx20.90$，由此估计：年龄为37岁的人群中的大部分人的体内脂肪含量为20.90%.

2. A 【解析】由题意可知变量 y 与 x 成线性相关关系，且斜率 $k=1$，代入点 $(1,2)$，即可得出线性回归方程为 $\hat{y}=x+1$.

3. A 【解析】当 $x=1,2,3$ 时，代入求 y 的值，选择最接近 y 的值对应的函数.

4. C 【解析】男人患色盲的比例为 $\frac{38}{480}$，要比女人中患色盲的比例 $\frac{6}{520}$ 大，其差值为 $\left|\frac{38}{480}-\frac{6}{520}\right|\approx0.0676$，差值较大，故能说明患色盲与性别是有关的.

5. B 【解析】由公式得 K^2 的观测值 $k=\frac{407\times(32\times213-61\times101)^2}{93\times314\times133\times274}\approx0.164<2.706$，即没有把握认为种子是否经过处理跟是否生病有关.

6. $\hat{y}=-10+6.5x$ 【解析】由题意知 $\bar{x}=2$，$\bar{y}=3$，$b=6.5$，所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3-6.5\times2=-10$，即回归直线的方程为 $\hat{y}=-10+6.5x$.

7. $(0,1)$ 【解析】相关指数 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$. R^2 的取值范围是 $[0,1]$. 当 $R^2=0$ 时，即残差平方和等于总偏差平方和，解释变量效应为0，x 与 y 没有任何关系；当 $R^2=1$ 时，即残差平方和为0，x 与 y 间是确定的函数关系；其他情形，即当 x 与 y 是不确定的相关关系时，$R^2\in(0,1)$.

8. 4.882　5% 【解析】由公式计算得 K^2 的观测值 $k\approx4.882$，$\because k>3.841$，$\therefore$ 我们有95%的把握认为服用此药的效果与患者的性别有关，从而有5%的可能性出错.

9. (1) 由已知表格中的数据，利用科学计算器进行计算，得 $\bar{x}=4\,420.5$，$\bar{y}=\frac{21.58}{6}$，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=176\,598\,625$，$\sum_{i=1}^{6}y_i^2=80.937\,4$，$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=109\,230.58$，

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{6}y_i^2-6\bar{y}^2\right)}}\approx0.986.$$

查表得 $r_{0.05}=0.811$，由 $0.986>0.811$ 知，有95%的把握认为两个变量 x 与 y 之间具有线性相关关系，因而求回归直线方程是有实际意义的.

(2) $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}\approx0.000\,23$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=2.566\,2$，所以回归直线方程为 $\hat{y}=2.566\,2+0.000\,23x$.

10. 由公式得 K^2 的观测值 $k=\frac{71\times(12\times24-25\times10)^2}{37\times34\times22\times49}\approx0.08$. 由于 $K^2<2.706$，因此我们没有充分的证据说明教龄的长短与支持新、旧数学教材有关.