答案与解析

专题1 集合与集合的运算

5年高考真题演练

1 B **2** B **3** C **4** C **5** B

6 C 【解析】逐个列举可得. $x=0,y=0,1,2$ 时,$x-y=0,-1,-2$;$x=1,y=0,1,2$ 时,$x-y=1,0,-1$;$x=2,y=0,1,2$ 时,$x-y=2,1,0$. 根据集合中元素的互异性可知集合 B 的元素为 $-2,-1,0,1,2$,共5个.

7 D

8 $\left[\frac{1}{2},2+\sqrt{2}\right]$ 【解析】①若 $m<0$,则符合题意的条件是:直线 $x+y=2m+1$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=m^2$ 有交点,从而 $\frac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$,解得 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{2}$,与 $m<0$ 矛盾;

②若 $m=0$,代入验证,可知不符合题意;

③若 $m>0$,则当 $\frac{m}{2}\leqslant m^2$,即 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时,集合 A 表示一个环形区域,集合 B 表示一个带形区域,从而当直线 $x+y=2m+1$ 与 $x+y=2m$ 中至少有一条与圆 $(x-2)^2+y^2=m^2$ 有交点,即符合题意,从而有 $\frac{|2-2m|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$ 或 $\frac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$,解得 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$,因为 $\frac{1}{2}>\frac{2-\sqrt{2}}{2}$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$.

综上所述,m 的取值范围是 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$.

9 201 【解析】可分下列三种情形:(1)若只有①正确,则 $a\neq 2,b\neq 2,c=0$,所以 $a=b=1$ 与集合元素的互异性相矛盾,所以只有①正确是不可能的;(2)若只有②正确,则 $b=2,a=2,c=0$,这与集合元素的互异性相矛盾,所以只有②正确是不可能的;(3)若只有③正确,则 $c\neq 0,a=2,b\neq 2$,所以 $b=0,c=1$,所以 $100a+10b+c=100\times 2+10\times 0+1=201$.

10 【解析】此题是一个创新试题,定义了一个新的概念.

(1)根据 k 的定义,可知 $k=2^{1-1}+2^{3-1}=5$.

(2)此时 $k=211$,是个奇数,所以可以判断所求子集中必含元素 a_1,又 $2^8,2^9$ 均大于211,故所求子集不含 a_9,a_{10}. 然后根据 $2^j(j=1,2,\cdots,7)$ 的值易推导所求子集为 $\{a_1,a_2,a_5,a_7,a_8\}$.

11 【解析】(1)对于集合 $\left\{\frac{m}{\sqrt{k}}\middle| m\in I_7\right\}$,当 $k=1$ 时与当 $k=4$ 时该集合中都含有元素1,2,3,因此集合 P_7 中元素的个数为 $7\times 7-3=46$.

(2)先证当 $n\geqslant 15$ 时,P_n 不能分成两个不相交的稀疏集的并. 若不然,设 A,B 为不相交的稀疏集,使 $A\cup B=P_n\supseteq I_n$,不妨设 $1\in A$,则因 $1+3=2^2$,故 $3\notin A$,即 $3\in B$. 同理 $6\in A,10\in B$,又由假设可得 $15\in A$,但 $1+15=4^2$,这与 A 为稀疏集矛盾.

再证 P_{14} 符合要求. 当 $k=1$ 时,$\left\{\frac{m}{\sqrt{k}}\middle| m\in I_{14}\right\}=I_{14}$ 可分成两个稀疏集之并,事实上,只要取 $A_1=\{1,2,4,6,9,11,13\}$,$B_1=\{3,5,7,8,10,12,14\}$,则 A_1,B_1 为稀疏集,且 $A_1\cup B_1=I_{14}$.

当 $k=4$ 时,集合 $\left\{\frac{m}{\sqrt{k}}\middle| m\in I_{14}\right\}$ 中除整数外剩下的数组成集合 $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots,\frac{13}{2}\right\}$,可分解为下面两稀疏集的并:$A_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right\}$,$B_2=\left\{\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right\}$.

当 $k=9$ 时,集合 $\left\{\frac{m}{\sqrt{k}}\middle| m\in I_{14}\right\}$ 中除整数外剩下的数组成集合 $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\cdots,\frac{13}{3},\frac{14}{3}\right\}$,可分解为下面两稀疏集的并:$A_3=\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3}\right\}$,$B_3=\left\{\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right\}$.

最后,集合 $C=\left\{\frac{m}{\sqrt{k}}\middle| m\in I_{14},k\in I_{14},\text{且 }k\neq 1,4,9\right\}$ 中的数的分母均为无理数,它与 P_{14} 中的任何其他数之和都不是整数. 因此,令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup C$,$B=B_1\cup B_2\cup B_3$,则 A 和 B 是不相交的稀疏集,且 $A\cup B=P_{14}$.

综上,所求 n 的最大值为14.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	D	B	C
题号	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	C	B
题号	11	12			
答案	D	A			

1 C **2** C **3** D **4** B **5** C **6** B **7** D

8 A **9** C

10 B 【解析】对于①:取 $k=\frac{1}{2}$,点$(1,1)\in\{(x,y)|x^2\geqslant y\}$,但$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\notin\{(x,y)|x^2\geqslant y\}$,故①是不具有性质 P 的点集;对于②:$\forall(x,y)\in\{(x,y)|2x^2+y^2<1\}$,则点$(x,y)$在椭圆 $2x^2+y^2=1$ 的内部,所以当 $0<k<1$ 时,(kx,ky)也在椭圆 $2x^2+y^2=1$ 的内部,即$(kx,ky)\in\{(x,y)|2x^2+y^2<1\}$,故②是具有性质 P 的点集;对于③:$x^2+y^2+x+2y=0$ 变形得 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$,点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$在此圆上,但当 $k=\frac{1}{2}$ 时,$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$不在此圆上,故③是不具有性质 P 的点集;对于④:$\forall(x,y)\in\{(x,y)|x^3+y^3-x^2y=0\}$,因为$(kx)^3+(ky)^3-(kx)^2\cdot(ky)=0\Rightarrow x^3+y^3-x^2y=0$,所以$(kx,ky)\in\{(x,y)|x^3+y^3-x^2y=0\}$,故④是具有性质 P 的点集.

综上,具有性质 P 的点集的个数是 2.

11 D 【解析】平面区域 $M=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$ 的面积为 4π,设平面区域 $N=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y\geqslant mx+2m\\x^2+y^2\leqslant 4\end{cases}\right.\right\}$的面积为 S. 因为 $\frac{1}{2}\leqslant P(N)\leqslant\frac{3\pi+2}{4\pi}$,所以$\frac{1}{2}\leqslant\frac{S}{4\pi}\leqslant\frac{3\pi+2}{4\pi}$,所以 $2\pi\leqslant S\leqslant 3\pi+2$. 直线 $y=mx+2m$ 过定点$(-2,0)$,斜率为 m,数形结合可知,当 $m=0$ 时,平面区域 N 的面积为2π;当 $m=-1$ 时,平面区域 N 的面积为$3\pi+2$. 所以实数 m 的取值范围为$[-1,0]$. 应选 D.

12 A 【解析】考察 A,若$(a*b)*a=a$,因为 $a=b*(a*b)$,$\therefore(a*b)*a=(a*b)*[b*(a*b)]=b$,$\therefore a=b$. 由此,当 $a\neq b$ 时,$(a*b)*a\neq a$,所以选 A.

13 $\{2\}$ **14** $\frac{3}{2}$

15 $(-8,1]$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x(x-2)+y=0$,即 $y=-x^2+2x$,故 $P=\{x|y=-x^2+2x\}=\mathbf{R}$. 由$|\boldsymbol{b}|<\sqrt{5}$得$|\boldsymbol{b}|^2<5$,即$(x-2)^2+1^2<5$,解得 $0<x<4$,故 $Q=\{x|0<x<4\}$,$P\cap Q=Q$. 所以当 $x\in P\cap Q$ 时,y 的取值范围即为函数 $y=-x^2+2x$ 在$(0,4)$上的值域. 因为函数 $y=-x^2+2x$ 图象的对称轴为 $x=1$,所以函数在$(0,1]$上单调递增,在$(1,4)$上单调递减,故 y 的最大值为 $-1^2+2\times 1=1$,而 $x=0$ 时,$y=-0^2+2\times 0=0$;$x=4$ 时,$y=-4^2+2\times 4=-8$. 所以 y 的取值范围为$(-8,1]$.

16 3 【解析】$2\,011=5\times 402+1$,$\therefore 2\,011\in[1]$,为真命题;

$-3=-5+2$,$\therefore -3\in[2]$,$\therefore -3\in[3]$为假命题;

显然③为真命题.

若 $a,b\in[k]$,则 $a=5n_1+k$,$b=5n_2+k$,$\therefore a-b=5(n_1-n_2)\in[0]$.

若 $a-b\in[0]$,则 $a-b=5n$. 若 $a\in[k]$,则 $a=5n_1+k$.

$\therefore b=5n_1+k-5n=5(n_1-n)+k$,$\therefore b\in[k]$.

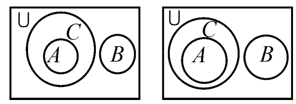
知④为真命题.

专题 2 命题与充要条件

5 年高考真题演练

1 C **2** A **3** A **4** C **5** B **6** A **7** D

8 C 【解析】由图(1)可知,若“存在集合 C 使得$A\subseteq C$,$B\subseteq\complement_U C$”,则 $A\cap B=\varnothing$;反过来,若 $A\cap B=\varnothing$,由图(2)可知,也可以存在一个集合 C,使得 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq\complement_U C$. 故选 C.



(1) (2)

第 8 题图

9 C 【解析】实数可以比较大小,而虚数不能比较大小,设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z^2=a^2-b^2+2abi$,由 $z^2\geqslant 0$,得$\begin{cases}ab=0\\a^2-b^2\geqslant 0\end{cases}$,则 $b=0$,故选项 A 为真,同理选项 B 为真;选项 C 为假,选项 D 为真.

10 C 【解析】若一个球的半径缩小到原来的$\frac{1}{2}$,则其体积缩小到原来的$\frac{1}{8}$,所以①是真命题;因为标准差除了与平均数有关,还与各数据有关,所以②是假命题;因为圆心$(0,0)$到直线 $x+y+1=0$ 的距离等于$\frac{1}{\sqrt{2}}$,等于圆的半径,所以③是真命题. 故真命题的序号是①③.

11 A **12** D

13 ①③④ 【解析】对于①,当 $a\geqslant 1$ 时,$a^b\geqslant 1$,则 $\ln^+(a^b)=\ln a^b=b\ln a=b\ln^+a$,当 $0<a<1$ 时,$0<a^b<1$,则 $\ln^+(a^b)=0$,$b\ln^+a=0$,即 $\ln^+(a^b)=b\ln^+a$,故①为真命题;同理讨论 a,b 在$(0,+\infty)$内的不同取值,可知③,④为真命题. 对于②,可取特殊值 $a=\mathrm{e}$,$b=\frac{1}{\mathrm{e}}$,则 $\ln^+(ab)=0$,$\ln^+a+\ln^+b=1+0=1$,故②为假命题.

14 A 城市 【解析】由甲、丙的回答易知甲去过 A 城市和 C 城市,乙去过 A 城市或 C 城市,结合乙的回答可得乙去过 A 城市.

15 3 或 4 【解析】已知方程有根,由判别式 $\Delta=16-4n\geqslant 0$,解得 $n\leqslant 4$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,逐个分析,当 $n=1,2$

时，方程没有整数根；而当 $n=3$ 时，方程有整数根 1,3；当 $n=4$ 时，方程有整数根 2.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**C**	**B**	**A**	**A**
题号	6	7	8	9	10
答案	**B**	**D**	**B**	**D**	**A**

1 D **2** C **3** B **4** A **5** A **6** B **7** D **8** B

9 D 【解析】$P=\{x|f(x+t)+1<3\}=\{x|f(x+t)<2\}=\{x|f(x+t)<f(2)\}$，$Q=\{x|f(x)<-4\}=\{x|f(x)<f(-1)\}$，因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $P=\{x|x+t<2\}=\{x|x<2-t\}$，$Q=\{x|x<-1\}$，要使"$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分不必要条件，则有 $2-t<-1$，即 $t>3$，选 D.

10 A 【解析】注意到 $0<a\leqslant b\leqslant c$，则有 $\frac{a}{b}\leqslant 1$，$\frac{b}{c}\leqslant 1$，$\frac{c}{a}\geqslant 1$，$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\frac{c}{a}$. 当倾斜度等于 1 时，$\triangle ABC$ 未必是等边三角形，如取 $a=b=2$，$c=3$，此时 $\frac{a}{b}=1$，$\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$，$\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$，$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}=1$，即 $\triangle ABC$ 的倾斜度等于 1，但显然 $\triangle ABC$ 不是等边三角形. 反过来，当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=1$，$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=1$，即 $\triangle ABC$ 的倾斜度等于 1. 因此选 A.

11 $-1<m<\frac{3}{2}$ 或 $2<m<3$

12 1 **13** ③

14 充分 充要 【解析】由题意可画出图形：

$$\begin{array}{c} p\Rightarrow q\Leftrightarrow s\Rightarrow t \\ \nwarrow\!\!\!\!\nwarrow \; r \; \swarrow\!\!\!\!\swarrow \end{array}$$

. 由图形可看出 p 是 t 的充分条件，r 是 t 的充要条件.

▶ 专题 3 量词与逻辑联结词

5 年高考真题演练

1 C **2** A **3** C **4** B **5** A **6** D **7** C **8** C **9** B

10 ①③④ 【解析】①显然正确；②反例：函数 $y=\frac{1}{2^x+1}$ 的值域为 $(0,1)$，存在 $M=1$ 符合题意，但此函数没有最值；③当 $f(x)$ 趋于 $+\infty$ 时，无论 $g(x)$ 在 $[-M,M]$ 内如何取值，$f(x)+g(x)$ 都趋于 $+\infty$，所以 $f(x)+g(x)$ 不可能有最大值，此命题正确；④由于 $\ln(x+2)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，$\frac{x}{x^2+1}$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，由③知如果 $a\neq 0$，则函数 $f(x)=a\ln(x+2)+\frac{x}{x^2+1}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，无最大值，与已知矛盾，所以 $a=0$，所以此命题正确.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**C**	**D**	**B**	**D**	**A**
题号	6	7	8	9	10
答案	**C**	**B**	**C**	**D**	**B**
题号	11	12			
答案	**C**	**C**			

1 C **2** D **3** B **4** D **5** A **6** C **7** B

8 C 【解析】命题 p：因为 $|x+1|+|x-2|\geqslant|x+1-(x-2)|=3$，所以若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$|x+1|+|x-2|>a$ 恒成立，则 $a<3$. 所以 p 是真命题. 命题 q：$\overrightarrow{MB}=\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\cos^2\alpha\cdot\overrightarrow{MC}$，因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\overrightarrow{MB}=\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+(1-\sin^2\alpha)\cdot\overrightarrow{MC}$，整理得 $\overrightarrow{CB}=\sin^2\alpha\,\overrightarrow{CA}$，故 A,B,C 三点共线；反之不一定成立，因为 $\sin^2\alpha,\cos^2\alpha\in[0,1]$，如 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(-1,0)$，此时 $\overrightarrow{CB}=(2,0)$，$\overrightarrow{CA}=(1,0)$，显然不存在角 α，使得 $\overrightarrow{CB}=\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{CA}$，所以不是必要条件. 故 q 是假命题. 因此，只有 C 项正确.

9 D **10** B **11** C

12 C 【解析】对于①，易知是正确的；对于②，由"$\neg p$ 是 q 的必要条件"得知，由 q 可推知 $\neg p$，由 p 可推知 $\neg q$（注：互为逆否命题的两个命题的真假性一致），因此 p 是 $\neg q$ 的充分条件，②正确；对于③，由 $M>N$ 不能得知 $\left(\frac{2}{3}\right)^M>\left(\frac{2}{3}\right)^N$，因此③是错误的，综上所述，其中正确的结论个数是 2，选 C.

13 任意 $x\in\mathbf{R}$，$2^x<0$

14 $(1,+\infty)$ **15** $(-\infty,-2)$

16 $t>-\frac{1}{2}$ 【解析】$\neg p$ 为假命题，则 p 为真命题. 不等式 $tx^2+2x-2>0$ 有属于 $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ 的解，即 $t>\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}$ 有在 $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ 内的解. 当 $1<x<\frac{5}{2}$ 时，$\frac{2}{5}<\frac{1}{x}<1$，所以 $\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$. 故 $t>-\frac{1}{2}$.

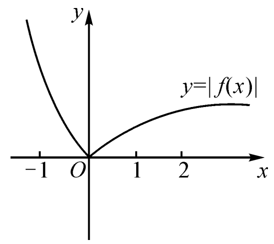
▶ 专题 4 函数的概念

5 年高考真题演练

1 D **2** D **3** C **4** C **5** A **6** C **7** C

8 A

9 D 【解析】$y=|f(x)|$的图象如图所示，$y=ax$为过原点的一条直线，当$a>0$时，与$y=|f(x)|$在y轴右侧总有交点，不合题意. 当$a=0$时成立. 当$a<0$时，找与$y=|-x^2+2x|$，$x\leqslant 0$相切的情况，即$y'=2x-2$，切线方程为$y=(2x_0-2)(x-x_0)$，由分析可知$x_0=0$，所以$a=-2$，综上，$a\in[-2,0]$.



第 9 题图

10 B **11** $(-\infty,2]$

12 $\left(0,\frac{1}{6}\right)$ 【解析】由题中图象知$f(x)$为奇函数，当$x\leqslant -2a$或$x\geqslant 2a$时，$f(x)$为增函数，$f(x)>f(x-1)$恒成立；又$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)$，且$f(4a)=f(-2a)=a$，故只需$4a-(-2a)<1$，即$a<\frac{1}{6}$，又a为正实数，故$a\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$.

13 20

14 -10 【解析】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上且周期为2的函数，所以$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，且$f(-1)=f(1)$，

故$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，从而$\dfrac{\frac{1}{2}b+2}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{2}a+1$，

$3a+2b=-2$. ①

由$f(-1)=f(1)$，得$-a+1=\frac{b+2}{2}$，故$b=-2a$. ②

由①②得$a=2$，$b=-4$，从而$a+3b=-10$.

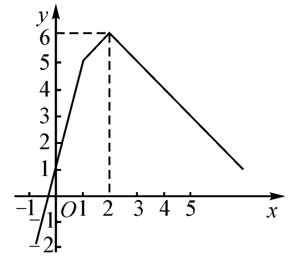
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**C**	**B**	**C**	**C**
题号	6	7			
答案	**B**	**B**			

1 D **2** C **3** B **4** C **5** C **6** B **7** B

8 11

9 6 【解析】在同一坐标系中分别作出函数$y=4x+1$，$y=x+4$，$y=-x+8$的图象后，取位于下方的部分得函数$f(x)=\min\{4x+1,x+4,-x+8\}$的图象，如图所示，不难看出函数$f(x)$在$x=2$时取得最大值6. 故填6.



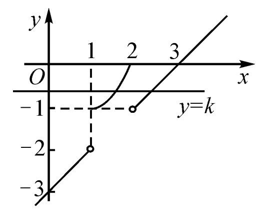
第 9 题图

10 $(-1,0]$ 【解析】$\because a\otimes b=\begin{cases}a, a-b\leqslant 1\\ b, a-b>1\end{cases}$，$\therefore f(x)=(x^2-2x)\otimes(x-3)=\begin{cases}x^2-2x, (x^2-2x)-(x-3)\leqslant 1\\ x-3, (x^2-2x)-(x-3)>1\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, 1\leqslant x\leqslant 2\\ x-3, x<1 \text{ 或 } x>2\end{cases}$.

$y=f(x)-k$的图象与x轴恰有两个公共点，即$y=f(x)$的图象与$y=k$的图象恰有两个公共点.

由图知当且仅当$-1<k\leqslant 0$时，$y=f(x)$的图象与$y=k$的图象恰有两个公共点. 故所求k的取值范围是$(-1,0]$.



第 10 题图

11 1 【解析】像这样的新定义函数关键是理解其含义，$f(10)=5$，$f(5)=9$. 而且要求的100重的函数值，这只能找规律，先计算几个，$f(9)=3$，$f(3)=1$，$f(1)=1$，至此出现常数，所以$\underbrace{f\{f\cdots f[f(10)]\}}_{100\text{个}}=1$，而且还发现对于$\underbrace{f\{f\cdots f[f(10)]\}}_{k\text{个}}$，当$k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant 4$时，函数值都等于1.

12 $[-1,7]$ 【解析】因为$h(x)=2x$在$\mathbf{R}$上为单调递增函数，故不妨假设$g(x)$在$[0,1]$上也为单调递增函数，则在$[0,1]$上$g(x)_{\min}=-1$，$g(x)_{\max}=1$. 由此在区间$[0,3]$上$g(x)_{\min}=-1$，$g(x)_{\max}=1$，故$f(x)$在区间$[0,3]$上的值域为$[-1,7]$.

13 $\frac{1}{2}$ 【解析】$f(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x^2+1+2x}\geqslant\frac{x^2+1}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=1$时取“=”. 故函数$f(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$的下确界为$\frac{1}{2}$.

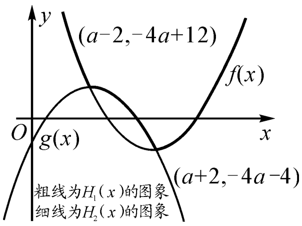
14 $\{a|a\geqslant 4+2\sqrt{3}\text{ 或 }a\leqslant 4-2\sqrt{3}\}$ 【解析】令$t=g(x)=x^2+ax-1+2a$，要使函数$y=\sqrt{t}$的值域为

[0, +∞),则说明[0, +∞)$\subseteq\{y|y=g(x)\}$,即二次函数的判别式 $\Delta\geqslant0$,即 $a^2-4(2a-1)\geqslant0$,即 $a^2-8a+4\geqslant0$,解得 $a\geqslant4+2\sqrt{3}$或 $a\leqslant4-2\sqrt{3}$,所以 a 的取值范围是 $a\geqslant4+2\sqrt{3}$或 $a\leqslant4-2\sqrt{3}$.

专题5 函数的单调性与最值

5年高考真题演练

1 **C** 【解析】$f(x)$ 的图象的顶点坐标为 $(a+2,-4a-4)$,$g(x)$ 的图象的顶点坐标为 $(a-2,-4a+12)$,并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象的顶点都在对方的图象上,如图所示,所以 $A-B=-16$.



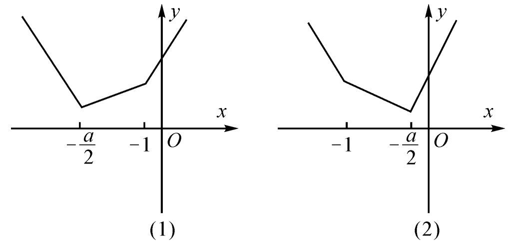
第1题图

2 **D** 【解析】函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$,因为函数 $y=f(x)$ 是由 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 与 $t=g(x)=x^2-4$ 复合而成,又 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减,所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增.选D.

3 **B** **4** **B**

5 **D** 【解析】由于当 $x>0$ 时,$f(x)=x+\dfrac{1}{x}+a$,在 $x=1$ 时取得最小值 $2+a$,由题意当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=(x-a)^2$ 应该是递减的,则 $a\geqslant0$,此时最小值为 $f(0)=a^2$,因此 $a^2\leqslant a+2$,解得 $0\leqslant a\leqslant2$,选D.

6 **D** 【解析】当 $a\geqslant2$ 时,$f(x)=\begin{cases}3x+a+1,x>-1,\\x+a-1,-\dfrac{a}{2}\leqslant x\leqslant-1,\\-3x-a-1,x<-\dfrac{a}{2},\end{cases}$如图(1)可知,当 $x=-\dfrac{a}{2}$时,$f(x)_{\min}=f(-\dfrac{a}{2})=\dfrac{a}{2}-1=3$,可得 $a=8$;当 $a<2$ 时,$f(x)=\begin{cases}3x+a+1,x>-\dfrac{a}{2},\\-x-a+1,-1\leqslant x\leqslant-\dfrac{a}{2},\\-3x-a-1,x<-1,\end{cases}$如图(2)可知,当 $x=-\dfrac{a}{2}$时,$f(x)_{\min}=f(-\dfrac{a}{2})=-\dfrac{a}{2}+1=3$,可得 $a=-4$.综上可知,答案为D.



第6题图

7 2 【解析】$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$,考察函数 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$,显然函数 $g(x)$ 为奇函数,所以 $g(x)$ 的最大值与最小值的和为0,所以函数 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为2.

8 $\dfrac{1}{4}$ 【解析】函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,则 $1-4m>0$,即 $m<\dfrac{1}{4}$.若 $a>1$,则函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值为 $\dfrac{1}{a}=m$,最大值为 $a^2=4$,解得 $a=2$,$\dfrac{1}{2}=m$,与 $m<\dfrac{1}{4}$ 矛盾;当 $0<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值为 $a^2=m$,最大值为 $a^{-1}=4$,解得 $a=\dfrac{1}{4}$,$m=\dfrac{1}{16}$.所以 $a=\dfrac{1}{4}$.

9 【解析】(1)由题意知,E 移动时单位时间内的淋雨量为 $\dfrac{3}{20}|v-c|+\dfrac{1}{2}$,故 $y=\dfrac{100}{v}\left(\dfrac{3}{20}|v-c|+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{v}(3|v-c|+10)$.

(2)由(1)知,当 $0<v\leqslant c$ 时,$y=\dfrac{5}{v}(3c-3v+10)=\dfrac{5(3c+10)}{v}-15$;

当 $c<v\leqslant10$ 时,$y=\dfrac{5}{v}(3v-3c+10)=\dfrac{5(10-3c)}{v}+15$.

故 $y=\begin{cases}\dfrac{5(3c+10)}{v}-15,0<v\leqslant c,\\\dfrac{5(10-3c)}{v}+15,c<v\leqslant10.\end{cases}$

①当 $0<c\leqslant\dfrac{10}{3}$时,$y$ 是关于 v 的减函数.故当 $v=10$ 时,$y_{\min}=20-\dfrac{3c}{2}$.

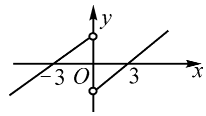
②当 $\dfrac{10}{3}<c\leqslant5$ 时,在 $(0,c]$ 上,y 是关于 v 的减函数;在 $(c,10]$ 上,y 是关于 v 的增函数,故当 $v=c$ 时,$y_{\min}=\dfrac{50}{c}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	A	A	C	D
题号	6	7	8	9	10
答案	B	B	B	D	C

1 B **2** A **3** A **4** C **5** D **6** B

7 B 【解析】$\because f(x)$是奇函数且在$(0,+\infty)$上是增函数,$f(-3)=0$;$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数且$f(3)=0$;由$\dfrac{x}{f(x)}<0$得$\begin{cases}x>0,\\ f(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\ f(x)>0,\end{cases}$ $-3<x<0$或$0<x<3$(如图),故选B.



第7题图

8 B **9** D **10** C

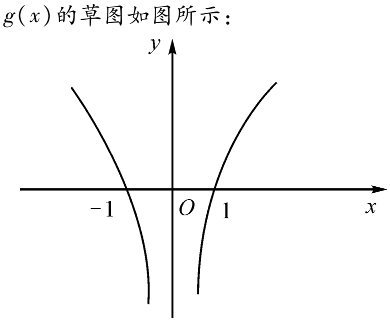
11 $m>-1$ 【解析】由条件当$a,b\in(-\infty,0)$时总有$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$得:函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,而$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$,所以函数$f(x)$为偶函数,因此在$(0,+\infty)$上单调递减,又$m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$,$m^2+2>0$,因此$f(m^2-m+1)>f(m^2+2)\Leftrightarrow m^2-m+1<m^2+2\Leftrightarrow m>-1$.

12 $\sqrt{2}-1$ 【解析】由题意可知$f(x+t)\leqslant 4f(x)$可化为:$f(x+t)\leqslant f(\sqrt{2}x)$,易知奇函数$f(x)$在$R$上单调递增,所以有$x+t\leqslant\sqrt{2}x$在$x\in[1,16]$上恒成立,因此$t\leqslant(\sqrt{2}-1)x$在$x\in[1,16]$上恒成立,又因为当$x\in[1,16]$时,$[(\sqrt{2}-1)x]_{\min}=\sqrt{2}-1$,所以$t\leqslant(\sqrt{2}-1)$,即实数$t$的最大值是$\sqrt{2}-1$.

13 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 【解析】$\because\dfrac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}<0$对区间$(-\infty,0)$内任意两个不相等的实数$x_1$,$x_2$都成立,

$\therefore$函数$g(x)=xf(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,又$f(x)$为奇函数,$\therefore g(x)=xf(x)$为偶函数,$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$g(-1)=g(1)=0$,

作出$g(x)$的草图如图所示:



第13题图

$xf(2x)<0$即$2xf(2x)<0$,$g(2x)<0$,

由图象得,$-1<2x<0$或$0<2x<1$,解得$-\dfrac{1}{2}<x<0$或$0<x<\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$不等式$xf(2x)<0$解集是$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,

故答案为:$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

14 $-\dfrac{3}{2}$ 【解析】$\because f(x)=ax^3+bx+2^x$,所以$f'(x)=3ax^2+b+2^x\ln 2$. $\because a,b$为正实数,$\therefore f'(x)>0$,故函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增,在区间$[-1,0]$上亦单调递增,则有$f(1)=a\cdot 1^3+b\cdot 1+2^1=4$,所以$a+b=2$,故$f(-1)=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)+2^{-1}=-a-b+\dfrac{1}{2}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$,即函数$f(x)$在$[-1,0]$上的最小值为$-\dfrac{3}{2}$.

15 $\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$ 【解析】易知原函数在**R**上单调递增,且为奇函数,故$f(mx-2)+f(x)<0\Rightarrow f(mx-2)<-f(x)=f(-x)$,此时应有$mx-2<-x\Rightarrow mx+x-2<0$对所有$m\in[-2,2]$恒成立.

令$g(m)=xm+x-2$,此时只需$\begin{cases}g(-2)<0,\\ g(2)<0\end{cases}$即可,解得$-2<x<\dfrac{2}{3}$.

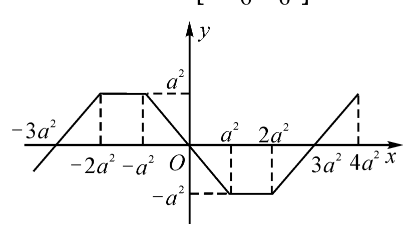
16 $(-\infty,-5]$ 【解析】当$x\in(1,2)$时,不等式$x^2+mx+4<0$可化为$m<-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$,又函数$f(x)=-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$在$(1,2)$上单调递增,则$f(x)>-5$,则$m\leqslant-5$.

专题6 函数的奇偶性、周期性

5年高考真题演练

1 A **2** D **3** D

4 B 【解析】当$x\geqslant 0$时,$f(x)=\begin{cases}-x,0\leqslant x\leqslant a^2\\ -a^2,a^2<x\leqslant 2a^2\\ x-3a^2,x>2a^2\end{cases}$,又$f(x)$为奇函数,可得$f(x)$的图象如图所示,由图象可得,当$x\leqslant 2a^2$时,$f(x)_{\max}=a^2$,当$x>2a^2$时,令$x-3a^2=a^2$,得$x=4a^2$,又$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x-1)\leqslant f(x)$,可知$4a^2-(-2a^2)\leqslant 1\Rightarrow a\in\left[-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right]$,选B.



第4题图

5 C **6** D

7 D 【解析】取函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x\in[1,2)\cup(2,3]\\ 2, x=2\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 满足题设条件具有性质 P，但函数 $f(x)$ 的图象是不连续的，故①为假命题，排除 A、B；取函数 $f(x)=-x, 1\leqslant x\leqslant 3$，则函数满足题设条件具有性质 P，但 $f(x^2)=-x^2, 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 就不具有性质 P，故②为假命题，排除 C. 应选 D.

8 D 【解析】由图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称得，$\left|-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}+t\right|$，解得 $t=0$ 或 $t=1$，当 $t=0$ 时，$f(x)=|x|$，不符合题意，故 $t=1$，选 D.

9 $a\leqslant-\frac{8}{7}$ **10** $(-7,3)$ **11** -1

12 $\frac{-x(x+1)}{2}$ **13** 3 **14** $-\frac{3}{2}$ **15** 1

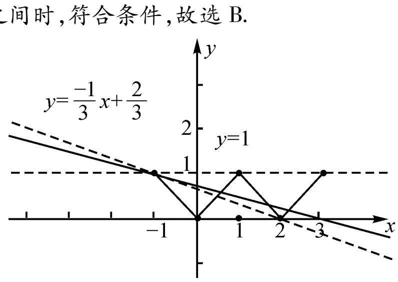
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	B	D	C
题号	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	B	B
题号	11				
答案	C				

1 A **2** A

3 B 【解析】由已知，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 的图象如图所示，关于 x 的方程 $f(x)=kx+k+1$（$k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq-1$）表示过定点 $(-1,1)$ 的直线，为使关于 x 的方程 $f(x)=kx+k+1$（$k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq-1$）有 4 个不同的根，即直线 $y=kx+k+1$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 4 个不同的交点.

结合图象可知，当直线 $y=kx+k+1$ 介于过点 $(-1,1)$，$(2,0)$ 的直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 和直线 $y=1$ 之间时，符合条件，故选 B.



第 3 题图

4 D 【解析】由原不等式，可得 $f(\sin\theta)>-f(1-m)$，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数可得 $f(\sin\theta)>f(m-1)$，又单调递增，则 $\sin\theta>m-1$，可知 $m<\sin\theta+1$ 恒成立，当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\theta\in[0,1]$，则 $m<1$.

5 C 【解析】$f(x-1)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位而得到，又 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称，所以 $f(x-1)$ 的图象关于点 $A(1,0)$ 对称，故①正确；

由 $f(x+1)=f(x-1)$ 可知 $f(x)$ 的周期为 2，无法判断其对称轴，故②错误；

$f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(x)$ 关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 为偶函数，③正确；

$y=f(1+x)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 的图象向左平移一个单位后得到，$y=f(1-x)$ 是由 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称后再向右平移一个单位而得到，两者图象关于 y 轴对称，故④错误.

6 B 【解析】由①可得 $f\left(x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$，所以最小正周期为 3，故①错；因为 $y=f\left(x-\frac{3}{4}\right)$ 是奇函数，相当于是把 $f(x)$ 向右平移 $\frac{3}{4}$ 个单位后图象关于原点对称，则 $f(x)$ 关于 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 对称，故②正确；对于③：由②知，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(-\frac{3}{4}-x\right)=-f\left(-\frac{3}{4}+x\right)$，用 $-\frac{3}{4}+x$ 替换 x 可得 $f\left(-\frac{3}{2}-x\right)+f(x)=0$，故 $f(x)$ 是偶函数；由前面可知 $f(x)$ 是周期函数，所以在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，故④错误.

7 A 【解析】因为 $f(x)$ 是偶函数，且 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，

当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$x-2\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$，所以 $f(x-2)\geqslant f(1)$，

若 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时不等式 $f(ax+1)\leqslant f(x-2)$ 恒成立，

则 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$|ax+1|\leqslant1$ 恒成立，解得 $-2\leqslant a\leqslant0$，

故实数 a 的取值范围是 $[-2,0]$.

8 A

9 B 【解析】由 $M_{x-3}^{7}=(x-3)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x+3)$ 可知 $f(-x)=(-x-3)(-x-2)\cdot\cdots\cdot(-x+3)\cdot\cos\left(-\frac{2009}{2010}x\right)$，即 $f(-x)=-(x+3)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x-3)\cos\left(\frac{2009}{2010}x\right)=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数.

10 B 【解析】把 $f(x)=x^3+\sin x+1$ 化简为 $f(x)-1=x^3+\sin x$，令 $g(x)=f(x)-1=x^3+\sin x$，则 $g(x)$ 为奇函数，有 $g(-m)=-g(m)$，所以 $f(-m)-1=-[f(m)-1]$，得到 $f(-m)=$

$-(2-1)+1=0$.

11 **C** 【解析】由题意,得 $g(-x)=f(-x-1)$. 又 $\because f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数, $\therefore g(-x)=-g(x)$, $f(-x)=f(x)$, $\therefore f(x-1)=-f(x+1)$, $\therefore f(x)=-f(x+2)$, $\therefore f(x)=f(x+4)$, $\therefore f(x)$ 的周期为 4, $\therefore f(2013)=f(1)$, $f(2015)=f(3)=f(-1)$. 又 $\because f(1)=f(-1)=g(0)=0$, $\therefore f(2013)+f(2015)=0$.

12 -1 【解析】由函数 $f(x)=\dfrac{e^x+ae^{-x}}{x^2}$ 是奇函数得: $f(-x)=-f(x)$, $x\neq0$. 即 $\dfrac{e^{-x}+ae^x}{(-x)^2}=-\dfrac{e^x+ae^{-x}}{x^2}$ $(x\neq0)\Rightarrow(a+1)(e^x+e^{-x})=0$ 对一切不为零的实数都成立,所以有 $a+1=0\Rightarrow a=-1$,故应填入 -1.

13 0 【解析】注意到 $y=x^5$ 与 $y=\sin x$ 均是奇函数,所以 $y=x^5+\sin x$ 是奇函数,从而构造函数 $g(x)=f(x)-1=x^5+\sin x$ 是奇函数,所以 $g(-a)=-g(a)=-(f(a)-1)=-1$,另一方面 $g(-a)=f(-a)-1=-1$,所以有 $f(-a)=0$.

14 ①②④ 【解析】令 $x=-2$,得 $f(2)=f(-2)+f(2)$,又函数 $f(x)$ 是偶函数,故 $f(2)=0$;根据 $f(2)=0$ 可得 $f(x+4)=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 的周期是 4,由于偶函数的图象关于 y 轴对称,故 $x=-4$ 也是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴;根据函数的周期性可知,函数 $f(x)$ 在 $[8,10]$ 上单调递减,③不正确;由于函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-4$ 对称,故如果方程 $f(x)=m$ 在区间 $[-6,-2]$ 上的两根为 x_1,x_2,则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-4$,即 $x_1+x_2=-8$. 故正确命题的序号为①②④.

专题 7 二次函数与幂函数

5 年高考真题演练

1 **A** **2** **A** **3** **A** **4** **B** **5** **C** **6** $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

7 $a\leqslant\sqrt{2}$ **8** $(0,1)$

9 【解析】(1) 因为 $f(0)=-a|-a|\geqslant1$,所以 $-a>0$,即 $a<0$.

由 $a^2\geqslant1$ 知 $a\leqslant-1$. 因此, a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

(2) 记 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$,则有

$$f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|=\begin{cases}3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+\dfrac{2a^2}{3}, x>a, & ①\\(x+a)^2-2a^2, x\leqslant a. & ②\end{cases}$$

当 $a\geqslant0$ 时, $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{2}{3}a^2$.

若 $x>a$,则由①知 $f(x)\geqslant\dfrac{2}{3}a^2$;

若 $x\leqslant a$,则 $x+a\leqslant2a<0$,由②知 $f(x)\geqslant2a^2>\dfrac{2}{3}a^2$.

此时 $g(a)=\dfrac{2}{3}a^2$. 综上得 $g(a)=\begin{cases}-2a^2, a\geqslant0,\\\dfrac{2a^2}{3}, a<0.\end{cases}$

(3)(ⅰ) 当 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时,解集为 $(a,+\infty)$;

(ⅱ) 当 $a\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,解集为 $\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$;

(ⅲ) 当 $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,解集为 $\left(a,\dfrac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	D
题号	6	7			
答案	B	A			

1 **A** **2** **A** **3** **D** **4** **D**

5 **D** 【解析】由已知得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,且 $a>0$,抛物线的开口向上.

若 $x<0$,则 $1>2013^x>2014^x>0$,而函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上为减函数,故有 $f(2013^x)<f(2014^x)$;

若 $x=0$,则 $2013^x=2014^x=1$,从而 $f(2013^x)=f(2014^x)$;

若 $x>0$,则 $2014^x>2013^x>1$,而函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,故有 $f(2014^x)>f(2013^x)$.

综上所述, $f(2013^x)\leqslant f(2014^x)$.

6 **B** 【解析】$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a=(x-2)a+(x^2-4x+4)$. 记 $g(a)=(x-2)a+(x^2-4x+4)$,由题意可得 $\begin{cases}g(-1)>0\\g(1)>0\end{cases}$,即 $\begin{cases}g(-1)=x^2-5x+6>0\\g(1)=x^2-3x+2>0\end{cases}$,解得 $x<1$ 或 $x>3$. 故选 B.

7 **A** **8** 6 **9** 0 或 2 **10** $2,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-2$

11 ±1 **12** $\dfrac{3}{2}$

13 $m\leqslant-3$ 【解析】只需要在 $x\in(0,1]$ 时, $(x^2-4x)_{\min}\geqslant m$ 即可. 而当 $x=1$ 时, $(x^2-4x)_{\min}=1-4=-3$,所以 $m\leqslant-3$.

14 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 【解析】不等式$(x-a)*(x+a)\leqslant 1$化为$x^2-x-a^2+a+1\geqslant 0$. 令$f(x)=x^2-x-a^2+a+1$,当$x=\frac{1}{2}$时,$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-a^2+a+1=-\frac{1}{4}-a^2+a+1$. 只需要$-\frac{1}{4}-a^2+a+1\geqslant 0$,解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$.

专题 8 指数函数

5 年高考真题演练

1 C **2** A **3** D **4** B **5** $(-\infty,8]$

6 $(-\infty,1]$ **7** $x=\log_3 4$

8 $\frac{1}{4}$ 【解析】函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数,则$1-4m>0$,即$m<\frac{1}{4}$. 若$a>1$,则函数$f(x)$在$[-1,2]$上的最小值为$\frac{1}{a}=m$,最大值为$a^2=4$,解得$a=2$,$\frac{1}{2}=m$,与$m<\frac{1}{4}$矛盾;当$0<a<1$时,函数$f(x)$在$[-1,2]$上的最小值为$a^2=m$,最大值为$a^{-1}=4$,解得$a=\frac{1}{4}$,$m=\frac{1}{16}$. 所以$a=\frac{1}{4}$.

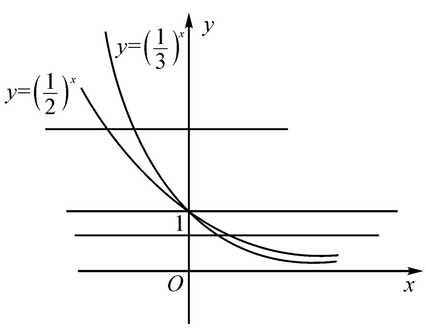
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	B	D	D	D
题号	6	7	8	9	10
答案	C	C	D	C	B

1 D **2** B **3** D **4** D **5** D **6** C **7** C

8 D **9** C

10 B 【解析】设$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b=t$,在同一坐标系中画出$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$与$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象,如图,若$t>1$,则有$a<b<0$;



第 10 题图

若$t=1$,则有$a=b=0$;若$0<t<1$,则有$a>b>0$.

故①②⑤可能成立,而③④不可能成立. 故选 B.

11 $0<a<1$ **12** $(-\infty,1]$

13 $(0,1)\cup(2,+\infty)$ **14** -1 **15** $\left(\frac{1}{2},1\right)$

16 -1 **17** $-2<m<3$ **18** $(-\infty,-1]$

专题 9 对数函数

5 年高考真题演练

1 D **2** D **3** B **4** B

5 D 【解析】因为$\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$,所以$\log_4(3a+4b)=\log_4(ab)$,即$3a+4b=ab$,且$\begin{cases}3a+4b>0,\\ ab>0,\end{cases}$即$a>0,b>0$,所以$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1(a>0,b>0)$,$a+b=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\right)=7+\frac{4b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 7+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=7+4\sqrt{3}$,当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{3a}{b}$时取等号,选择 D.

6 D 【解析】由$y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)(x>-1)$得$\sqrt[3]{x}+1=e^y$,即$\sqrt[3]{x}=e^y-1$,故$x=(e^y-1)^3$,$x,y$互换得$y=(e^x-1)^3$.

因为原函数$y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)(x>-1)$的值域为$\mathbf{R}$,所以其反函数的定义域为$\mathbf{R}$.

故所求函数的反函数为$y=(e^x-1)^3(x\in\mathbf{R})$.

7 B 【解析】因为函数$y=\log_a x$过点$(3,1)$,所以$1=\log_a 3$,解得$a=3$,$y=3^{-x}$不可能过点$(1,3)$,排除 A;$y=(-x)^3=-x^3$不可能过点$(1,1)$,排除 C;$y=\log_3(-x)$不可能过点$(-3,-1)$,排除 D,故选 B.

8 A 【解析】因为函数$f(x)=e^x+x-2$在$\mathbf{R}$上单调递增,且$f(0)=1-2<0$,$f(1)=e-1>0$,所以$f(a)=0$时,$a\in(0,1)$. 又$g(x)=\ln x+x^2-3$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$g(1)=-2<0$,所以$g(a)<0$. 由$g(2)=\ln2+1>0$,$g(b)=0$得$b\in(1,2)$,又$f(1)=e-1>0$,且$f(x)=e^x+x-2$在$\mathbf{R}$上单调递增,所以$f(b)>0$. 综上可知,$g(a)<0<f(b)$.

9 C 【解析】因为$f(\lg(\log_2 10))=f\left(\lg\left(\frac{1}{\lg2}\right)\right)=f(-\lg(\lg2))=5$,又$f(x)+f(-x)=8$,所以$f(-\lg(\lg2))+f(\lg(\lg2))=8$,所以$f(\lg(\lg2))=3$,故选 C.

10 ①③④ 【解析】对于①,当$a\geqslant1$时,$a^b\geqslant1$,则$\ln^+(a^b)=\ln a^b=b\ln a=b\ln^+a$,当$0<a<1$时,$0<a^b<1$,则$\ln^+(a^b)=0$,$b\ln^+a=0$,即$\ln^+(a^b)=b\ln^+a$,故①正确;同理讨论$a,b$在$(0,+\infty)$内的不同取值,可知③,④正确. 对于②,可取特殊值$a=e,b=\frac{1}{e}$,则$\ln^+(ab)=0$,$\ln^+a+\ln^+b=1+0=$

1，故②不正确.

11【解析】(1)由$\begin{cases}2-2x>0,\\x+1>0,\end{cases}$得$-1<x<1$.

由$0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\dfrac{2-2x}{x+1}<1$得$1<\dfrac{2-2x}{x+1}<10$.

因为$x+1>0$，所以$x+1<2-2x<10x+10$，$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}$.

由$\begin{cases}-1<x<1,\\-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3},\end{cases}$得$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}$.

(2)当$x\in[1,2]$时，$2-x\in[0,1]$，因此

$y=g(x)=g(x-2)=g(2-x)=f(2-x)=\lg(3-x)$.

由单调性可得$y\in[0,\lg2]$.

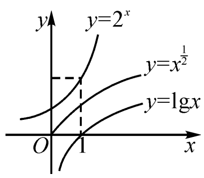
因为$x=3-10^y$，所以所求反函数是$y=3-10^x$，$x\in[0,\lg2]$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	A	C	B
题号	6	7	8	9	10
答案	D	B	B	C	C

1 C **2** B **3** A **4** C **5** B

6 D 【解析】分别画出函数$y=2^x$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=\lg x$的图象，如图. 由图象可知，当$x\in(0,1)$时，有$2^x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$，故选D.

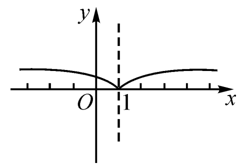


第6题图

7 B 【解析】因为函数的值域为$[0,+\infty)$，所以函数$f(x)$的最值为0，故$t=x^2-2x+a$的最小值为1，又$t=x^2-2x+a=(x-1)^2+(a-1)$，故$a-1=1$，解得$a=2$. 故选B.

8 B 【解析】由$\log_a x+\log_a y=3$得$\log_a xy=3$，即$xy=a^3$，所以$y=\dfrac{a^3}{x}$，显然函数$y=\dfrac{a^3}{x}$在$[a,2a]$上为减函数，故$\begin{cases}\dfrac{a^3}{a}\leqslant a^2,\\\dfrac{a^3}{2a}\geqslant a\end{cases}$，解得$a\geqslant2$. 故选B.

9 C 【解析】由$f(2-x)=f(x)$得$f(1-x)=f(x+1)$，即函数$f(x)$图象的对称轴为直线$x=1$，结合图，可知$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f(0)=f(2)$，故选C.



第9题图

10 C 【解析】由a,b,c互不相等，结合图象可知：这三个数分别在区间$(0,1)$，$(1,10)$，$(10,12)$上，不妨设$a\in(0,1)$，$b\in(1,10)$，$c\in(10,12)$，由$f(a)=f(b)$得$\lg a+\lg b=0$，即$\lg ab=0$，所以$ab=1$，所以$abc\in(10,12)$，故选C.

11 9 【解析】$\because\log_{n+1}(n+2)=\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$，$\therefore f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(k)=\dfrac{\ln3}{\ln2}\cdot\dfrac{\ln4}{\ln3}\cdot\dfrac{\ln5}{\ln4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}=\dfrac{\ln(k+2)}{\ln2}=\log_2(k+2)$，$\because1024=2^{10}$，$2048=2^{11}$，且$\log_2 4=2$，$\therefore$使$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(k)$为整数的数有$10-1=9$个.

12 $(-\infty,1)$ 【解析】当$x=3$时，$y=\log_a(3^2-3\times3+2)=\log_a 2<0$，故有$0<a<1$.

设$t=x^2-3x+2$，则$y=\log_a t$.

由$t=x^2-3x+2>0$，解得$x<1$或$x>2$. 故函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

因为当$x<1$时，t单调递减，当$x>2$时，t单调递增，而$y=\log_a t$在$(0,+\infty)$上单调递减，故函数的单调递增区间为$(-\infty,1)$.

13 $(2,3)$ 【解析】$\because$函数$y=\lg(x^2-2x+3)$有最小值，$f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$有最大值，$\therefore0<a<1$. $\therefore$由$\log_a(x^2-5x+7)>0$，得$0<x^2-5x+7<1$，解得$2<x<3$. $\therefore$不等式$\log_a(x^2-5x+7)>0$的解集为$(2,3)$.

14 $(-\infty,2)$ **15** $(-\infty,-3)$

16 $(1,2)$ **17** $[1,2]$

18 $(1,2\sqrt{3})$ 【解析】由题意知$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right]$上单调递减，

令$u(x)=x^2-ax+3$，可知$u(x)$的对称轴为$\dfrac{a}{2}$，

$u(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right]$上单调递减，故底数$a>1$，

且当$x=\dfrac{a}{2}$时要有意义，

$\therefore u\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$，即$3-\dfrac{a^2}{4}>0$，$\therefore1<a<2\sqrt{3}$.

专题10 函数与方程

5年高考真题演练

1 C

2 A 【解析】由题意得$\sqrt{e^x+x-a}=x$，$x\in[0,1]$

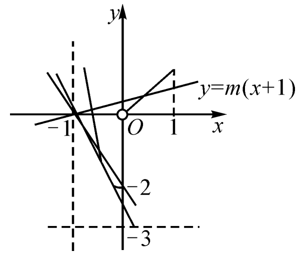
①,化简得$e^x+x-x^2=a,x\in[0,1]$.令$g(x)=e^x+x-x^2$,所以$g'(x)=e^x+1-2x$,设$h(x)=e^x+1-2x$,则$h'(x)=e^x-2$,所以当$x\in(0,\ln2)$时,$h'(x)<0$,当$x\in(\ln2,1)$时,$h'(x)>0$.所以$g'(x)\geqslant g'(\ln2)=3-2\ln2>0$,所以$g(x)$在$[0,1]$上单调递增,所以原题中的方程有解必须方程①有解,所以$g(0)\leqslant a\leqslant g(1)$.故选A.

3 **A** 【解析】因为函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$有两个极值点x_1,x_2,可知关于导函数的方程$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$有两个不等的实根x_1,x_2.则方程$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$有两个不等的实根,即$f(x)=x_1$或$f(x)=x_2$,原方程的个数就是这两个方程$f(x)=x_1$和$f(x)=x_2$的不等实根的个数之和,再结合图象可看出函数$y=f(x)$的图象与直线$y=x_1$和直线$y=x_2$共有3个不同的交点,故所求方程有3个不同的实根.

4 **B** 【解析】利用数形结合的方法求解.函数$f(x)=2^x+x^3-2$在区间$(0,1)$内的零点个数即为函数$y=2^x,y=2-x^3$在区间$(0,1)$内的图象的交点个数,作出图象即可知两个函数图象在区间$(0,1)$内有1个交点,故原函数在区间$(0,1)$内的零点个数是1.

5 **C** **6** **C** **7** **D**

8 **A** 【解析】$g(x)=f(x)-mx-m$在$(-1,1]$内有且仅有两个不同的零点就是函数$y=f(x)$的图象与函数$y=m(x+1)$的图象有两个交点,在同一直角坐标系内作出函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}-3,x\in(-1,0],\\x,x\in(0,1]\end{cases}$和函数$y=m(x+1)$的图象,如图,当直线$y=m(x+1)$与$y=\frac{1}{x+1}-3,x\in(-1,0]$和$y=x,x\in(0,1]$都相交时$0<m\leqslant\frac{1}{2}$;当直线$y=m(x+1)$与$y=\frac{1}{x+1}-3,x\in(-1,0]$有两个交点时,由方程组$\begin{cases}y=m(x+1),\\y=\frac{1}{x+1}-3,\end{cases}$消元得$\frac{1}{x+1}-3=m(x+1)$,即$m(x+1)^2+3(x+1)-1=0$,化简得$mx^2+(2m+3)x+m+2=0$,当$\Delta=9+4m=0$,即$m=-\frac{9}{4}$时直线$y=m(x+1)$与$y=\frac{1}{x+1}-3$相切,当直线$y=m(x+1)$过点$(0,-2)$时,$m=-2$,所以$m\in\left(-\frac{9}{4},-2\right]$.综上,实数$m$的取值范围是$\left(-\frac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$,选择A.



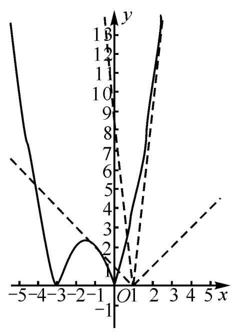
第8题图

9 2 【解析】当$x\leqslant0$时,令$x^2-2=0$,解得$x=-\sqrt{2}$;当$x>0$时,$f(x)=2x-6+\ln x$,因为$f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$,所以函数$f(x)=2x-6+\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为$f(1)=2-6+\ln1=-4<0$,$f(3)=\ln3>0$,所以函数$f(x)=2x-6+\ln x$在$(0,+\infty)$有且只有一个零点.综上,函数$f(x)$的零点个数为2.

10 $(0,1)\cup(9,+\infty)$ 【解析】画出函数$f(x)=|x^2+3x|$的大致图象,如图,令$g(x)=a|x-1|$,则函数$f(x)$的图象与函数$g(x)$的图象有且仅有4个不同的交点,显然$a>0$.联立$\begin{cases}y=-x^2-3x,\\y=a(1-x),\end{cases}$消去$y$,得$x^2+(3-a)x+a=0$,

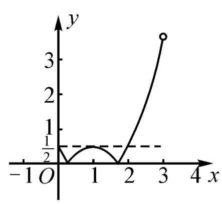
由$\Delta>0$,解得$a<1$或$a>9$;联立$\begin{cases}y=x^2+3x,\\y=a(1-x),\end{cases}$消去$y$,得$x^2+(3+a)x-a=0$,由$\Delta>0$,解得$a>-1$(舍去)或$a<-9$(舍去).

综上,实数a的取值范围为$(0,1)\cup(9,+\infty)$.



第10题图

11 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【解析】函数$y=f(x)-a$在区间$[-3,4]$上有互不相同的10个零点,即函数$y=f(x),x\in[-3,4]$与$y=a$的图象有10个不同交点.在坐标系中作出函数$f(x)$在一个周期内的图象如图,可知当$0<a<\frac{1}{2}$时满足题意.



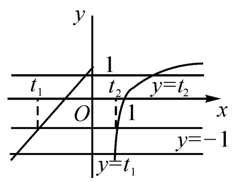
第11题图

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**B**	**A**	**D**
题号	6	7	8	9	
答案	**D**	**B**	**D**	**C**	

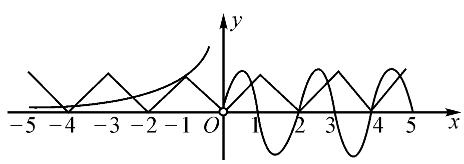
1 **B** **2** **D** **3** **B** **4** **A** **5** **D**

6 **D** 【解析】令 $f[f(x)]+1=0$ 得 $f[f(x)]=-1$. 当 $k>0$ 时,在平面直角坐标系下画出函数 $f(x)$ 的大致图象及直线 $y=-1$,注意到直线 $y=-1$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 2 个交点,设其横坐标分别是 t_1、t_2,则 $t_1<0$,$0<t_2<1$;再画出直线 $y=t_1$ 与 $y=t_2$,结合图象可知,直线 $y=t_1$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 2 个不同的交点,直线 $y=t_2$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 2 个不同的交点,因此此时函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点. 同理,当 $k<0$ 时,函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 1 个零点,结合各选项知,选 D.



第 6 题图

7 **B** 【解析】函数 $y=f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$,故 $f(x+2)=-f(x+1)=-[-f(x)]=f(x)$,即函数 $f(x)$ 的周期为 2. 在同一直角坐标系内作出函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的图象如图所示.



第 7 题图

由图象可知,函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 9 个交点,所以函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上的零点个数为 9. 故选 B.

8 **D** 【解析】令 $g(x)=0$,得 $f(x)=x+m$ ①. 考虑函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的图象,因为两个端点分别为 $(0,0)$,$(1,1)$,所以过这两点的直线方程为 $y=x$ ②;考虑直线 $y=x+m$ 与 $f(x)=x^2\ (x\in[0,1])$ 的图象相切,与区间 $(1,2]$ 上的函数图象相交,也就是两个交点,仍然有两个零点,可求得此时切线方程为 $y=x-\frac{1}{4}$. 根据周期为 2,得 $m=2k$ 或 $2k-\frac{1}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.

9 **C** 【解析】设对区间 $(1,2)$ 至少二等分 n 次,此时区间长为 1,第 1 次二等分后区间长为 $\frac{1}{2}$,第 2 次二等分后区间长为 $\frac{1}{2^2}$,第 3 次二等分后区间长为 $\frac{1}{2^3}$,…,第 n 次二等分后区间长为 $\frac{1}{2^n}$. 依题意得 $\frac{1}{2^n}<0.01$,$\therefore n>\log_2 100$. 由于 $6<\log_2 100<7$,$\therefore n\geqslant 7$,即 $n=7$ 为所求.

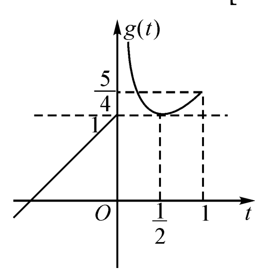
10 1

11 $(0,0.5)$ $f(0.25)$ $(0.25,0.5)$

12 (1) -2 (2) $\left[1,\frac{5}{4}\right]$

【解析】(1) $f(1)=-3$,$g[f(1)]=g(-3)=-3+1=-2$.

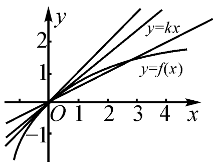
(2) 设 $t=f(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1\leqslant 1$,所以当 $0<t\leqslant 1$ 时,$g[f(x)]=g(t)=t+\frac{1}{4t}\geqslant 2\sqrt{t\times\frac{1}{4t}}=1$ $\left(\text{当且仅当 } t=\frac{1}{2}\text{ 时等号成立}\right)$. 当 $t\leqslant 0$ 时,$g[f(x)]=g(t)=t+1\leqslant 1$,作出函数 $g(t)$ 的图象,如图所示. 当 $a\in\left[1,\frac{5}{4}\right]$ 时,$g(t)$ 与 $y=a$ 有两个不同交点,即 $g(t)=a$ 有两解 t_1,t_2,而 $t=-x^2-2x$,所以满足条件的 x 有 4 个,当 $a=\frac{5}{4}$ 时,$g(t)$ 与 $y=a$ 也有两个不同的交点,此时有 $0<t_1<\frac{1}{2}$,$t_2=1$,但 $t_2=-x^2-2x=1$ 只有唯一根,所以不满足. 综上可知,a 的取值范围为 $\left[1,\frac{5}{4}\right]$.



第 12 题图

13 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 【解析】显然 $x=0$ 是函数 $y=f(x)-kx$ 的一个零点. 当 $x>0$ 时,$y=f(x)=\ln(x+1)$,由于 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ 在 $x=0$ 时恰好等于 1,所以直线 $y=x$ 与曲线 $y=\ln(x+1)$ 恰好相切于坐标原点. 由图象可知,当 $0<k<1$ 时,$y=kx$ 与 $y=\ln(x+1)$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 内只有一个交点;当 $x<0$ 时,$y=f(x)=-x^2+\frac{1}{2}x$,$f'(x)=-2x+\frac{1}{2}$,当 $x=0$ 时,$y'=\frac{1}{2}$,即直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与直线 $y=-x^2+\frac{1}{2}x$ 恰好相切于坐标原点,结合函数图象可知,当 $k>\frac{1}{2}$

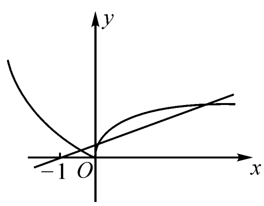
时，函数 $y=kx$ 与函数 $y=-x^2+\frac{1}{2}x$ 的图象在 $(-\infty,0)$ 内才存在交点且只有一个，故要想使 $y=f(x)-kx$ 有三个零点，其 k 的取值范围为上述两个方面的 k 的取值范围的公共部分，故 $\frac{1}{2}<k<1$.



第 13 题图

14 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【解析】函数 $y=f(x)-k(x+1)$ 有三个零点 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 与 $y=k(x+1)$ 的图象有三个交点.

当 $x<0$ 时，$f(x)=e^{-x}-e^x$，则 $f'(x)=-e^{-x}-e^x<0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，分别作出函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=k(x+1)$ 的图象，如图所示.



第 14 题图

由 $k(x+1)=\sqrt{x}\Rightarrow k^2x^2+(2k^2-1)x+k^2=0$，得 $\Delta=(2k^2-1)^2-4k^4=0$ 时，$k=\frac{1}{2}$（由图易知 $k<0$ 舍去），则由图象可知，当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=k(x+1)$ 与曲线 $y=f(x)$ 有三个不同的交点，即函数 $y=f(x)-k(x+1)$ 有三个零点.

专题 11　函数模型及其应用

5 年高考真题演练

1 D　**2** D　**3** D

4【解析】(1) 令 $y=0$，得 $kx-\frac{1}{20}(1+k^2)x^2=0$，由实际意义和题设条件知 $x>0,k>0$，

故 $x=\frac{20k}{1+k^2}=\frac{20}{k+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{20}{2}=10$，当且仅当 $k=1$ 时取等号.

所以炮的最大射程为 10 千米.

(2) 因为 $a>0$，所以炮弹可击中目标 $\Leftrightarrow$ 存在 $k>0$，使 $3.2=ka-\frac{1}{20}(1+k^2)a^2$ 成立

$\Leftrightarrow$ 关于 k 的方程 $a^2k^2-20ak+a^2+64=0$ 有正根

$\Leftrightarrow$ 判别式 $\Delta=(-20a)^2-4a^2(a^2+64)\geqslant0$

$\Leftrightarrow a\leqslant6$.

所以当 a 不超过 6 千米时，可击中目标.

5【解析】(1) 设完成 A,B,C 三种部件的生产任务需要的时间（单位：天）分别为 $T_1(x),T_2(x),T_3(x)$，由题设有

$T_1(x)=\frac{2\times3\,000}{6x}=\frac{1\,000}{x}$，$T_2(x)=\frac{2\,000}{kx}$，

$T_3(x)=\frac{1\,500}{200-(1+k)x}$，

其中 $x,kx,200-(1+k)x$ 均为 1 到 200 之间的正整数.

(2) 完成订单任务的时间为 $f(x)=\max\{T_1(x),T_2(x),T_3(x)\}$，其定义域为 $\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{200}{1+k},x\in\mathbf{N}^*\right\}$，易知，$T_1(x),T_2(x)$ 为减函数，$T_3(x)$ 为增函数. 注意到 $T_2(x)=\frac{2}{k}T_1(x)$，于是

①当 $k=2$ 时，$T_1(x)=T_2(x)$，此时

$f(x)=\max\{T_1(x),T_3(x)\}=\max\left\{\frac{1\,000}{x},\frac{1\,500}{200-3x}\right\}$.

由函数 $T_1(x),T_3(x)$ 的单调性知，当 $\frac{1\,000}{x}=\frac{1\,500}{200-3x}$ 时 $f(x)$ 取得最小值，解得 $x=\frac{400}{9}$. 由于 $44<\frac{400}{9}<45$，而 $f(44)=T_1(44)=\frac{250}{11}$，$f(45)=T_3(45)=\frac{300}{13}$，$f(44)<f(45)$. 故当 $x=44$ 时完成订单任务的时间最短，且最短时间为 $f(44)=\frac{250}{11}$.

②当 $k>2$ 时，$T_1(x)>T_2(x)$，由于 k 为正整数，故 $k\geqslant3$，此时

$\frac{1\,500}{200-(1+k)x}\geqslant\frac{1\,500}{200-(1+3)x}=\frac{375}{50-x}$.

记 $T(x)=\frac{375}{50-x}$，$\varphi(x)=\max\{T_1(x),T(x)\}$，易知 $T(x)$ 是增函数，则

$f(x)=\max\{T_1(x),T_3(x)\}\geqslant\max\{T_1(x),T(x)\}=\varphi(x)=\max\left\{\frac{1\,000}{x},\frac{375}{50-x}\right\}$.

由函数 $T_1(x),T(x)$ 的单调性知，当 $\frac{1\,000}{x}=\frac{375}{50-x}$ 时 $\varphi(x)$ 取最小值，解得 $x=\frac{400}{11}$. 由于 $36<\frac{400}{11}<37$，而 $\varphi(36)=T_1(36)=\frac{250}{9}>\frac{250}{11}$，$\varphi(37)=T(37)=\frac{375}{13}>\frac{250}{11}$. 此时完成订单任务的最短时间大于 $\frac{250}{11}$.

③当 $k<2$ 时,$T_1(x)<T_2(x)$,由于 k 为正整数,故 $k=1$,此时

$f(x)=\max\{T_2(x),T_3(x)\}=\max\left\{\frac{2\ 000}{x},\frac{750}{100-x}\right\}$.

由函数 $T_2(x)$,$T_3(x)$ 的单调性知,当 $\frac{2\ 000}{x}=\frac{750}{100-x}$ 时 $f(x)$ 取最小值,解得 $x=\frac{800}{11}$,类似①的讨论,此时完成订单任务的最短时间为 $\frac{250}{9}$,大于 $\frac{250}{11}$.

综上所述,当 $k=2$ 时,完成订单任务的时间最短,此时,生产 A,B,C 三种部件的人数分别为 44,88,68.

6【解析】(1)根据题意,$200\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\geqslant 3\ 000\Rightarrow$

$5x-14-\frac{3}{x}\geqslant 0$,

又 $1\leqslant x\leqslant 10$,可解得 $x\leqslant x\leqslant 10$

(2)设利润为 y 元,则 $y=\frac{900}{x}\cdot 100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)=$

$9\times 10^4\left[-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{61}{12}\right]$,

故 $x=6$ 时,$y_{\max}=457\ 500$ 元.

高考试题专项预测

题号	1	2	3		
答案	B	A	B		

1 B **2** A **3** B

4 10 【解析】由题意得 $\begin{cases}1000=a+b\\3\ 000=4a+2b\end{cases}$,解得:$a=500$,$b=500$,

$\therefore y=500x^2+500x$.

设平均消耗费用为 S,则 $S=\frac{50\ 000+500x^2+500x}{x}+6\ 000=\frac{50\ 000}{x}+500x+500+6\ 000\geqslant 2\times 5\ 000+500+6\ 000=16\ 500$(元),

当且仅当 $\frac{50\ 000}{x}=500x$

即 $x=10$ 时取"$=$".

5 (4)(1)(3)(2) 【解析】A 容器下粗上细,水高度的变化先慢后快,故与(4)对应;

B 容器为球形,水高度变化为快—慢—快,应与(1)对应;

C、D 容器都是柱形的,水高度的变化速度都应是直线形,但 C 容器细,D 容器粗,故水高度的变化为:C 容器快,与(3)对应,D 容器慢,与(2)对应.

6【解析】(1)根据题意,当购票人数不多于 100 时,可设 y 与 x 之间的函数关系为 $y=30x-500-k\sqrt{x}$.

$\because$ 人数为 25 时,该旅游景点收支平衡,

$\therefore 30\times 25-500-k\sqrt{25}=0$,解得 $k=50$.

$\therefore y=\begin{cases}30x-50\sqrt{x}-500 & (x\in\mathbf{N}^*,x\leqslant 100),\\30x-50\sqrt{x}-700 & (x\in\mathbf{N}^*,x>100).\end{cases}$

(2)设每张门票价格提高为 m 元,根据题意,得 $m\times 20-50\sqrt{20}-500\geqslant 0$,$\therefore m\geqslant 25+5\sqrt{5}\approx 36.2$,

故每张门票最少要 37 元.

7【解析】设裁员 x 人,可获得的经济效益为 y 万元,则

$y=(2a-x)(b+0.01bx)-0.4bx=-\frac{b}{100}[x^2-2(a-70)x]+2ab$.

依题意 $2a-x\geqslant\frac{3}{4}\cdot 2a$,$\therefore 0<x\leqslant\frac{a}{2}$. 又 $140<2a<420$,$70<a<210$.

(1)当 $0<a-70\leqslant\frac{a}{2}$,即 $70<a\leqslant 140$ 时,$x=a-70$,y 取到最大值;

(2)当 $a-70>\frac{a}{2}$,即 $140<a<210$ 时,$x=\frac{a}{2}$,y 取到最大值;

所以当 $70<a<140$,公司应裁员 $a-70$ 人,经济效益取到最大值;

当 $140<a<210$,公司应裁员 $\frac{a}{2}$ 人,经济效益取到最大值.

8【解析】(1)由题意知,公司对奖励方案的函数模型 $f(x)$ 的基本要求是:当 $x\in[10,1000]$ 时,

①$f(x)$ 是增函数;②$f(x)\geqslant 1$ 恒成立;③$f(x)\leqslant\frac{x}{5}$ 恒成立.

(2)①对于函数模型 $f(x)=\frac{x}{150}+2$;当 $x\in[10,1000]$ 时,$f(x)$ 是增函数,则 $f(x)\geqslant 1$ 显然恒成立;

而若使函数 $f(x)=\frac{x}{150}+2\leqslant\frac{x}{5}$ 在 $[10,1000]$ 上恒成立,整理即 $29x\geqslant 300$ 恒成立,而 $(29x)_{\min}=290$,

$\therefore f(x)\leqslant\frac{x}{5}$ 不恒成立.

故该函数模型不符合公司要求.

②对于函数模型 $f(x)=4\lg x-2$;

当 $x\in[10,1000]$ 时,$f(x)$ 是增函数,则 $f(x)_{\min}=f(10)=4\lg 10-2=2>1$.

$\therefore f(x)\geqslant 1$ 恒成立.

设 $g(x)=4\lg x-2-\frac{x}{5}$,则 $g'(x)=\frac{4\lg e}{x}-\frac{1}{5}$.

当 $x\geqslant10$ 时,$g'(x)=\dfrac{4\lg e}{x}-\dfrac{1}{5}\leqslant\dfrac{2\lg e-1}{5}=\dfrac{\lg e^2-1}{5}<0$,所以 $g(x)$ 在 $[10,1000]$ 上是减函数,从而 $g(x)\leqslant g(10)=4\lg10-2-2=0$.

$\therefore 4\lg x-2-\dfrac{x}{5}\leqslant0$,即 $4\lg x-2\leqslant\dfrac{x}{5}$,$\therefore f(x)\leqslant\dfrac{x}{5}$ 恒成立.

故该函数模型符合公司要求.

专题 12　导数

5 年高考真题演练

1 C 【解析】$\because f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$,$\therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=3$. 依题意有,函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$ 的图象与 x 轴有三个不同的交点,故 $f(1)f(3)<0$,即 $(1-6+9-abc)(3^3-6\times3^2+9\times3-abc)<0$,$\therefore 0<abc<4$,$\therefore f(0)=-abc<0$,$f(1)=4-abc>0$,$f(3)=-abc<0$,故②③是对的,应选 C.

2 C 【解析】令 $f'(x)=2x-2-\dfrac{4}{x}=\dfrac{2(x-2)(x+1)}{x}>0$,利用数轴标根法可解得 $-1<x<0$ 或 $x>2$,又 $x>0$,所以 $x>2$. 故选 C.

3 A 【解析】由题意可知,该三次函数满足以下条件:过点 $(0,0)$,$(2,0)$,在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=-x$,在 $(2,0)$ 处的切线方程为 $y=3x-6$,以此对选项进行检验. A 选项,$y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x$,显然过两个定点,又 $y'=\dfrac{3}{2}x^2-x-1$,则 $y'|_{x=0}=-1$,$y'|_{x=2}=3$,故条件都满足,由选择题的特点知应选 A.

4 2　**5** $\dfrac{1}{2}$　**6** 2

7 2 【解析】当 $x>0$ 时,求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,所以曲线在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率 $k=1$,切线方程为 $y=x-1$,画图可知区域 D 为三角形,三个顶点的坐标分别为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$,$(0,-1)$,$(1,0)$,平移直线 $x-2y=0$,可知在点 $(0,-1)$ 处 z 取得最大值 2.

8 ①③④ 【解析】对于①,$y'=3x^2$,$y'|_{x=0}=0$,所以 $l:y=0$ 是曲线 $C:y=x^3$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线,画图可知曲线 $C:y=x^3$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,①正确;对于②,因为 $y'=2(x+1)$,$y'|_{x=-1}=0$,所以 $l:x=-1$ 不是曲线 $C:y=(x+1)^2$ 在点 $P(-1,0)$ 处的切线,②错误;对于③,$y'=\cos x$,$y'|_{x=0}=1$,在点 $P(0,0)$ 处的切线为 $l:y=x$,画图可知曲线 $C:y=\sin x$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,③正确;对于④,$y'=\dfrac{1}{\cos^2x}$,$y'|_{x=0}=\dfrac{1}{\cos^2 0}=1$,在点 $P(0,0)$ 处的切线为 $l:y=x$,画图可知曲线 $C:y=\tan x$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,④正确;对于⑤,$y'=\dfrac{1}{x}$,$y'|_{x=1}=1$,在点 $P(1,0)$ 处的切线为 $l:y=x-1$,令 $h(x)=x-1-\ln x(x>0)$,可得 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$,所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$,故 $x-1\geqslant\ln x$,可知曲线 $C:y=\ln x$ 在点 $P(1,0)$ 附近位于直线 l 的下侧,⑤错误.

9 -3 【解析】由曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$ 过点 $P(2,-5)$ 可得 $-5=4a+\dfrac{b}{2}$ (1). 又 $y'=2ax-\dfrac{b}{x^2}$,所以在点 P 处的切线斜率 $4a-\dfrac{b}{4}=-\dfrac{7}{2}$ (2). 由(1)(2)解得 $a=-1$,$b=-2$,所以 $a+b=-3$.

10 【解析】(1)对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}$,由 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 知 $f'(1)=-\dfrac{3}{4}-a=-2$,解得 $a=\dfrac{5}{4}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{4x}-\ln x-\dfrac{3}{2}$,则 $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{4x^2}$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=5$,因 $x=-1$ 不在 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内,故舍去.

当 $x\in(0,5)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(0,5)$ 内为减函数;当 $x\in(5,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 内为增函数. 由此知函数 $f(x)$ 在 $x=5$ 时取得极小值 $f(5)=-\ln5$.

11 【解析】(1)由 $f(x)=2x^3-3x$ 得 $f'(x)=6x^2-3$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-\dfrac{\sqrt2}{2}$ 或 $x=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

因为 $f(-2)=-10$,$f\left(-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt2$,$f\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=-\sqrt2$,$f(1)=-1$,所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值为 $f\left(-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt2$.

(2)设过点 $P(1,t)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0),

则 $y_0=2x_0^3-3x_0$,且切线斜率为 $k=6x_0^2-3$,

所以切线方程为 $y-y_0=(6x_0^2-3)(x-x_0)$,

因此 $t-y_0=(6x_0^2-3)(1-x_0)$.

整理得 $4x_0^3-6x_0^2+t+3=0$.

设 $g(x)=4x^3-6x^2+t+3$,

则"过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切"等价于"$g(x)$ 有 3 个不同零点".

$g'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$,

$g(x)$与$g'(x)$的情况如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	$t+3$	↘	$t+1$	↗

所以,$g(0)=t+3$是$g(x)$的极大值,$g(1)=t+1$是$g(x)$的极小值.

当$g(0)=t+3\leqslant 0$,即$t\leqslant -3$时,此时$g(x)$在区间$(-\infty,1]$和$(1,+\infty)$上分别至多有1个零点,所以$g(x)$至多有2个零点.

当$g(1)=t+1\geqslant 0$,即$t\geqslant -1$时,此时$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$上分别至多有1个零点,所以$g(x)$至多有2个零点.

当$g(0)>0$且$g(1)<0$,即$-3<t<-1$时,因为$g(-1)=t-7<0$,$g(2)=t+11>0$,所以$g(x)$分别在区间$[-1,0)$,$[0,1)$和$[1,2)$上恰有1个零点,由于$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上单调,所以$g(x)$分别在区间$(-\infty,0)$和$[1,+\infty)$上恰有1个零点.

综上可知,当过点$P(1,t)$存在3条直线与曲线$y=f(x)$相切时,t的取值范围是$(-3,-1)$.

(3)过点$A(-1,2)$存在3条直线与曲线$y=f(x)$相切;

过点$B(2,10)$存在2条直线与曲线$y=f(x)$相切;

过点$C(0,2)$存在1条直线与曲线$y=f(x)$相切.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	A	C	D
题号	6	7	8	9	
答案	A	B	C	B	

1 B **2** B **3** A **4** C **5** D **6** A

7 B 【解析】因为函数$f(x)=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$的图象与直线$x=1$交于点$P$,所以$P(1,1)$.

因为$f(x)=x^{n+1}$,所以$f'(x)=(n+1)x^n$,则$f'(1)=n+1$,即切线的斜率为$n+1$,故曲线$f(x)$在$P(1,1)$处的切线方程为$y-1=(n+1)(x-1)$.

令$y=0$,得$x=\dfrac{n}{n+1}$,即该切线与x轴的交点的横坐标为$x_n=\dfrac{n}{n+1}$,

所以$\log_{2015}x_1+\log_{2015}x_2+\cdots+\log_{2015}x_{2014}=\log_{2015}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2014}{2015}\right)=\log_{2015}\dfrac{1}{2015}=-1$.

8 C 【解析】$g(x)=(\sin x)'=\cos x$,则函数$y=x^2g(x)=x^2\cos x$,显然该函数是偶函数,所以排除A,B;当$x=0$时,$x^2\cos x=0^2\cos 0=0$,排除D.

9 B 【解析】由题意知$f'(x)=3ax^2+\dfrac{12}{ax}$,$f'(1)=3a+\dfrac{12}{a}\geqslant -12$,即$a+\dfrac{4}{a}\geqslant -4$,因为$a<0$,所以$a+\dfrac{4}{a}\leqslant -4$,故$a+\dfrac{4}{a}=-4$,解得$a=-2$.

10 $\dfrac{3}{6-4\pi}$ **11** -1

12 -2 【解析】$f_2(x)=f'_1(x)=\cos x-\sin x$,

$f_3(x)=(\cos x-\sin x)'=-\sin x-\cos x$,

$f_4(x)=-\cos x+\sin x$,$f_5(x)=\sin x+\cos x$,

以此类推,可得出$f_n(x)=f_{n+4}(x)$.

又$\because f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$,

$\therefore f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\cdots+f_{2015}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

13 $(1,+\infty)$ 【解析】设$F(x)=f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$,则$F(1)=f(1)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=1-1=0$,$f'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}$,对任意$x\in\mathbf{R}$,有$f'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}<0$,即函数$F(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,则$F(x)<0$的解集为$(1,+\infty)$,即$f(x)<\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$的解集为$(1,+\infty)$.

14 $\dfrac{1}{3}$ 【解析】因为$y'=-2e^{-2x}$,$y'|_{x=0}=-2$,所以曲线$y=e^{-2x}+1$在点$(0,2)$处的切线方程是$y=-2x+2$,在直角坐标系中作出示意图(图略),联立$\begin{cases}y=x,\\y=-2x+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{2}{3},\end{cases}$所以切线$y=-2x+2$与直线$y=x$的交点坐标为$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

又得切线$y=-2x+2$与直线$y=0$的交点坐标为$(1,0)$,由此所求面积$S=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

15 2 【解析】由条件知$f'(5)=-1$,又在点P处切线方程为$y-f(5)=-(x-5)$,$\therefore y=-x+5+f(5)$,即$y=-x+8$,$\therefore 5+f(5)=8$,$\therefore f(5)=3$,$\therefore f(5)+f'(5)=2$.

专题13 导数的应用

5年高考真题演练

1 B 【解析】由题知,$x>0$,$f'(x)=\ln x+1-2ax$,由于函数$f(x)$有两个极值点,则$f'(x)=0$有两个不等的正根,即函数$y=\ln x+1$与$y=2ax$的图象有两个不同的交点$(x>0)$,则$a>0$;设函数$y=\ln x+1$上任一点$(x_0,1+\ln x_0)$处的切线为l,则$k_1=y'=$

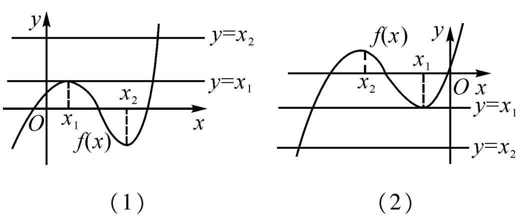
$\frac{1}{x_0}$,当 l 过坐标原点时,$\frac{1}{x_0}=\frac{1+\ln x_0}{x_0}\Rightarrow x_0=1$,令 $2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$,结合图象知 $0<a<\frac{1}{2}$,故选 B.

2 **D** 【解析】取函数 $f(x)=x^3-x$,则 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点,但 $f(3)>f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$,∴ 排除 A;取函数 $f(x)=-(x-1)^2$,则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点,但 -1 不是 $f(-x)$ 的极小值点,∴ 排除 B;$-f(x)=(x-1)^2$,-1 不是 $-f(x)$ 的极小值点,∴ 排除 C,故选 D.

3 **A** 【解析】因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 且方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的两个根分别为 x_1,x_2,所以 $f(x)=x_1$ 或 $f(x)=x_2$. 当 x_1 是极大值点时,x_2 为极小值点,且 $x_2>x_1$,如图(1)所示可知方程 $f(x)=x_1$ 有 2 个实根,$f(x)=x_2$ 有 1 个实根,故方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 共有 3 个不同实根.

当 x_1 是极小值点时,$f(x_1)=x_1$,x_2 为极大值点. 且 $x_2<x_1$,如图(2)可知方程 $f(x)=x_1$ 有 2 个实根,$f(x)=x_2$ 有 1 个实根,故方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 共有 3 个不同实根.

综上,可知方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 共有 3 个不同实根.



第 3 题图

4 **B** 【解析】令 $a=0$,则函数 $y=ax^2-x+\frac{a}{2}$ 与 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a$ 分别为 $y=-x$ 与 $y=x$,对应的图象是选项 D 中的图象. 记 $f(x)=ax^2-x+\frac{a}{2}$,$g(x)=a^2x^3-2ax^2+x+a$,取 $a=\frac{1}{2}$,则 $g(0)>f(0)>0$. 而 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{4}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac{2}{3},2$,易知 $g(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增,在区间 $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 上单调递减,所以 $g(x)$ 的极小值为 $g(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2^3-2\times\frac{1}{2}\times2^2+2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,又 $f(2)=\frac{1}{2}\times2^2-2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$,所以 $g(2)>f(2)$,所以选项 A 中的图象有可能. 取 $a=2$,则 $g(0)>f(0)>0$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{6},\frac{1}{2}$,易知 $g(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,在区间 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,所以 $g(x)$ 的极小值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+2=2$,又 $f(x)=2x^2-x+1>0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=1$,所以 $g\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$,所以选项 C 中的图象有可能. 利用排除法选 B.

5 **C** 【解析】构造函数 $f(x)=e^x-\ln x$,则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,故 $f(x)=e^x-\ln x$ 在 $(0,1)$ 上有一个极值点,即 $f(x)=e^x-\ln x$ 在 $(0,1)$ 上不是单调函数,无法判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小,故 A、B 错;构造函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,故函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,故 $g(x_1)>g(x_2)$,$x_2e^{x1}>x_1e^{x2}$,故选 C.

6 **C** 【解析】由题意知 $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$,当 $a=0$ 时,不满足题意. 当 $a\neq0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{a}$,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减. 又 $f(0)=1$,此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在零点,不满足题意;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$,$(0,+\infty)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{2}{a},0\right)$ 上单调递增,要使 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0,且 $x_0>0$,则需 $f\left(\frac{2}{a}\right)>0$,即 $a\times\left(\frac{2}{a}\right)^3-3\times\left(\frac{2}{a}\right)^2+1>0$,解得 $a<-2$,故选 C.

7 【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $f'(x)>0$,即 $0<x<e$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增;
当 $f'(x)<0$,即 $x>e$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减.
故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$,单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

(2)因为 $e<3<\pi$,所以 $e\ln3<e\ln\pi$,$\pi\ln e<\pi\ln3$,即 $\ln3^e<\ln\pi^e$,$\ln e^\pi<\ln3^\pi$.
于是根据函数 $y=\ln x$,$y=e^x$,$y=\pi^x$ 在定义域上单调递增,可得 $3^e<\pi^e<\pi^3$,$e^3<e^\pi<3^\pi$.
故这 6 个数中的最大数在 π^3 与 3^π 之中,最小数在 3^e 与 e^3 之中.

由 $e<3<\pi$ 及(1)的结论,得 $f(\pi)<f(3)<f(e)$,

即 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln3}{3}<\frac{\ln e}{e}$.

由 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln3}{3}$,得 $\ln\pi^3<\ln3^\pi$,所以 $3^\pi>\pi^3$;

由 $\frac{\ln3}{3}<\frac{\ln e}{e}$,得 $\ln3^e<\ln e^3$,所以 $3^e<e^3$.

综上,6 个数中的最大数是 3^π,最小数是 3^e.

8【解析】(1)$f'(x)=3ax^2+6x+3$,$f'(x)=0$ 的判别式 $\Delta=36(1-a)$.

(i)若 $a\geqslant1$,则 $f'(x)\geqslant0$,且 $f'(x)=0$,当且仅当 $a=1$,$x=-1$. 故此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(ii)由于 $a\neq0$,故当 $a<1$ 时,$f'(x)=0$ 有两个根:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$,$x_2=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$.

若 $0<a<1$,则当 $x\in(-\infty,x_2)$ 或 $x\in(x_1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 分别在 $(-\infty,x_2)$,$(x_1,+\infty)$ 是增函数;

当 $x\in(x_2,x_1)$ 时 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 (x_2,x_1) 是减函数.

若 $a<0$,则当 $x\in(-\infty,x_1)$ 或 $x\in(x_2,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 分别在 $(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$ 是减函数;

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 是增函数.

(2)当 $a>0$,$x>0$ 时,$f'(x)=3ax^2+6x+3>0$,故当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 是增函数.

当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 是增函数当且仅当 $f'(1)\geqslant0$ 且 $f'(2)\geqslant0$,

解得 $-\frac{5}{4}\leqslant a<0$.

综上,a 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$.

9【解析】(1)$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=k\pi(k\in\mathbf{N}^*)$.

当 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in\mathbf{N})$ 时,$\sin x>0$,此时 $f'(x)<0$;

当 $x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in\mathbf{N})$ 时,$\sin x<0$,此时 $f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in\mathbf{N})$,单调递增区间为 $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in\mathbf{N})$.

(2)由(1)知,$f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减,又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,故 $x_1=\frac{\pi}{2}$. 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,因为 $f(n\pi)f((n+1)\pi)=[(-1)^n n\pi+1][(-1)^{n+1}(n+1)\pi+1]<0$,

且函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的,所以 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 内至少存在一个零点. 又 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上是单调的,故 $n\pi<x_{n+1}<(n+1)\pi$.

因此当 $n=1$ 时,$\frac{1}{x_1^2}=\frac{4}{\pi^2}<\frac{2}{3}$;

当 $n=2$ 时,$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<\frac{1}{\pi^2}(4+1)<\frac{2}{3}$;

当 $n\geqslant3$ 时,

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{\pi^2}\left[4+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]$$

$$<\frac{1}{\pi^2}\left[5+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right]$$

$$<\frac{1}{\pi^2}\left[5+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(6-\frac{1}{n-1}\right)<\frac{6}{\pi^2}<\frac{2}{3}.$$

综上所述,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{2}{3}$.

10【解析】(1)因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=e^{-x}+e^x=f(x)$,所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(2)由条件知 $m(e^x+e^{-x}-1)\leqslant e^{-x}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $t=e^x(x>0)$,则 $t>1$,所以 $m\leqslant-\frac{t-1}{t^2-t+1}=-\frac{1}{t-1+\frac{1}{t-1}+1}$ 对任意 $t>1$ 成立. 因为 $t-1+\frac{1}{t-1}+1\geqslant2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{1}{t-1}}+1=3$,

所以 $-\frac{1}{t-1+\frac{1}{t-1}+1}\geqslant-\frac{1}{3}$,当且仅当 $t=2$,即 $x=\ln2$ 时等号成立.

因此实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$.

(3)令函数 $g(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-a(-x^3+3x)$,则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}+3a(x^2-1)$.

当 $x\geqslant1$ 时,$e^x-\frac{1}{e^x}>0$,$x^2-1\geqslant0$,又 $a>0$,故 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的单调增函数,因此 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值是 $g(1)=e+e^{-1}-2a$.

由于存在 $x_0\in[1,+\infty)$,使 $e^{x_0}+e^{-x_0}-a(-x_0^3+3x_0)<0$ 成立,当且仅当最小值 $g(1)<0$.

故 $e+e^{-1}-2a<0$,即 $a>\frac{e+e^{-1}}{2}$.

令函数 $h(x)=x-(e-1)\ln x-1$，则 $h'(x)=1-\frac{e-1}{x}$. 令 $h'(x)=0$，得 $x=e-1$，

当 $x\in(0,e-1)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 是 $(0,e-1)$ 上的单调减函数；

当 $x\in(e-1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，故 $h(x)$ 是 $(e-1,+\infty)$ 上的单调增函数.

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值是 $h(e-1)$.

注意到 $h(1)=h(e)=0$，所以当 $x\in(1,e-1)\subseteq(0,e-1)$ 时，$h(e-1)\leqslant h(x)<h(1)=0$.

当 $x\in(e-1,e)\subseteq(e-1,+\infty)$ 时，$h(x)<h(e)=0$. 所以 $h(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,e)$ 成立.

①当 $a\in\left(\frac{e+e^{-1}}{2},e\right)\subseteq(1,e)$ 时，$h(a)<0$，即 $a-1<(e-1)\ln a$，从而 $e^{a-1}<a^{e-1}$；

②当 $a=e$ 时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；

③当 $a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$ 时，$h(a)>h(e)=0$，即 $a-1>(e-1)\ln a$，故 $e^{a-1}>a^{e-1}$.

综上所述，当 $a\in\left(\frac{e+e^{-1}}{2},e\right)$ 时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；当 $a=e$ 时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；当 $a\in(e,+\infty)$ 时，$e^{a-1}>a^{e-1}$.

11【解析】(1)设容器的容积为 V，

由题意知 $V=\pi r^2l+\frac{4}{3}\pi r^3$，又 $V=\frac{80\pi}{3}$，

故 $l=\dfrac{V-\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}=\frac{80}{3r^2}-\frac{4}{3}r=\frac{4}{3}\left(\frac{20}{r^2}-r\right)$.

由于 $l\geqslant 2r$，因此 $0<r\leqslant 2$.

所以建造费用 $y=2\pi rl\times 3+4\pi r^2c=2\pi r\times\frac{4}{3}\left(\frac{20}{r^2}-r\right)\times 3+4\pi r^2c$，因此 $y=4\pi(c-2)r^2+\frac{160\pi}{r}$，$0<r\leqslant 2$.

(2)由(1)得 $y'=8\pi(c-2)r-\frac{160\pi}{r^2}=\frac{8\pi(c-2)}{r^2}\cdot\left(r^3-\frac{20}{c-2}\right)$，$0<r<2$.

由于 $c>3$，所以 $c-2>0$，当 $r^3-\frac{20}{c-2}=0$ 时，$r=\sqrt[3]{\frac{20}{c-2}}$.

令 $\sqrt[3]{\frac{20}{c-2}}=m$，则 $m>0$，所以 $y'=\frac{8\pi(c-2)}{r^2}(r-m)(r^2+rm+m^2)$.

①当 $0<m<2$ 即 $c>\frac{9}{2}$ 时，

当 $r=m$ 时，$y'=0$；当 $r\in(0,m)$ 时，$y'<0$；

当 $r\in(m,2)$ 时，$y'>0$，

所以 $r=m$ 是函数 y 的极小值点，也是最小值点.

②当 $m\geqslant 2$ 即 $3<c\leqslant\frac{9}{2}$ 时，

当 $r\in(0,2)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，

所以 $r=2$ 是函数 y 的最小值点.

综上所述，当 $3<c\leqslant\frac{9}{2}$ 时，建造费用最小时 $r=2$；

当 $c>\frac{9}{2}$ 时，建造费用最小时 $r=\sqrt[3]{\frac{20}{c-2}}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	D	C	D
题号	6	7			
答案	B	C			

1 B 【解析】依题意，记 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$，$g(0)=0$. 当 $x>0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]>0$，$g(x)$ 是增函数，$g(x)>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]<0$，$g(x)$ 是减函数，$g(x)>0$. 在同一坐标系内画出函数 $y=g(x)$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 的大致图象，结合图象可知，它们共有 1 个公共点，因此函数 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点个数是 1，选 B.

2 B **3** D

4 C 【解析】因为 $y'=-x^2+81$，所以当 $x>9$ 时，$y'<0$；当 $0<x<9$ 时，$y'>0$. 所以函数 $y=-\frac{1}{3}x^3+81x-234$ 在 $(9,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,9)$ 上单调递增，所以 $x=9$ 是该函数的极大值点，又该函数在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极大值点，所以该函数在 $x=9$ 处取得最大值.

5 D 【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x\cdot f'(x)-e^x\cdot f(x)}{e^{2x}}=\frac{e^x[f'(x)-f(x)]}{e^{2x}}$. 因为 $f'(x)>f(x)$，

所以，函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，故 $\frac{f(2)}{e^2}>\frac{f(0)}{e^0}$，则 $f(2)>e^2f(0)$，故选 D.

6 B 【解析】不等式 $2x\ln x+x^2\geqslant ax-3$，则 $a\leqslant 2\ln x+x+\frac{3}{x}$.

设 $f(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}(x>0)$，

则 $f'(x)=\frac{2}{x}+1-\frac{3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,$

$+\infty$)上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=4,\therefore a\leqslant f(x)_{\min}=4.$

7 **C** 【解析】由已知得$f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-3x$, $f''(x)=x^2-mx-3$,在区间(a,b)上$f''(x)<0$恒成立,令$g(m)=x^2-mx-3$,对于任意的实数m满足$|m|\leqslant 2$时,$g(m)<0$恒成立,则$\begin{cases}g(2)<2\\g(-2)<0\end{cases}$,即$\begin{cases}x^2-2x-3<0\\x^2+2x-3<0\end{cases}$,解得$-1<x<1$,所以$b-a$的最大值为$1-(-1)=2$.

8 8 cm 【解析】设截去的正方形边长为x cm,则铁盒的底面边长为$(48-2x)$cm,高为x cm,其中$x\in(0,24)$.

容积$V=(48-2x)^2x(0<x<24)$,

$\therefore V'=2(48-2x)\cdot(-2)\cdot x+(48-2x)^2$

$=12(x-8)(x-24)$.

令$V'=0$,解得$x=8$,或$x=24$(舍去).

在$x=8$处附近,当$x<8$时,$V'>0$,$x>8$时,$V'<0$.

则在$(0,24)$内,当$x=8$时,函数取得最大值.

即所做铁盒容积最大时,截去正方形的边长应为8 cm.

9 $\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$ 【解析】当$x\in[1,2]$时,$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}\geqslant 0$,$\therefore f(x)$在$[1,2]$上单调递增,$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=3$,又$\because g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-m$在$[-1,1]$上单调递减,$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}-m$.

$\forall x_1\in[1,2]$,$\exists x_2\in[-1,1]$使$f(x_1)\geqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$,即$\frac{1}{2}-m\leqslant 3$,$\therefore m\geqslant-\frac{5}{2}$.

10 $[12,+\infty)$ 【解析】$\because p\neq q$且$p,q\in(0,1)$,不等式$\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>0$恒成立,即$\frac{f(p+1)-f(q+1)}{(p+1)-(q+1)}>0$,$\therefore f(x)$在$(1,2)$上单调递增,故当$x\in(1,2)$时,$f'(x)>0$恒成立,即$f'(x)=\frac{a}{x+1}-2x>0\Rightarrow a>2x(x+1)$对$\forall x\in(1,2)$恒成立.记$g(x)=2x(x+1)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$,则当$x\in(1,2)$时,$g(x)<g(2)=12$,$\therefore a\geqslant 12$.

11 【解析】(1)当$a=-4$时,由$f'(x)=\frac{2(5x-2)(x-2)}{\sqrt{x}}=0$得$x=\frac{2}{5}$或$x=2$,由$f'(x)>0$得$x\in\left(0,\frac{2}{5}\right)$或$x\in(2,+\infty)$,

故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{2}{5}\right)$和$(2,+\infty)$.

(2)$f'(x)=\frac{(10x+a)(2x+a)}{2\sqrt{x}}$,$a<0$,由$f'(x)=0$得$x=-\frac{a}{10}$或$x=-\frac{a}{2}$.

当$x\in\left(0,-\frac{a}{10}\right)$时,$f(x)$单调递增;当$x\in\left(-\frac{a}{10},-\frac{a}{2}\right)$时,$f(x)$单调递减;当$x\in\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$时,$f(x)$单调递增.

易知$f(x)=(2x+a)^2\sqrt{x}\geqslant 0$,且$f(-\frac{a}{2})=0$.

①当$-\frac{a}{2}\leqslant 1$时,即$-2\leqslant a<0$时,$f(x)$在$[1,4]$上的最小值为$f(1)$,由$f(1)=4+4a+a^2=8$,得$a=\pm 2\sqrt{2}-2$,均不符合题意.

②当$1<-\frac{a}{2}\leqslant 4$时,即$-8\leqslant a<-2$时,$f(x)$在$[1,4]$上的最小值为$f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$,不符合题意.

③当$-\frac{a}{2}>4$时,即$a<-8$时,$f(x)$在$[1,4]$上的最小值可能在$x=1$或$x=4$处取得,而$f(1)\neq 8$,由$f(4)=2(64+16a+a^2)=8$得$a=-10$或$a=-6$(舍去),当$a=-10$时,$f(x)$在$(1,4)$单调递减,$f(x)$在$[1,4]$上的最小值为$f(4)=8$,符合题意.

综上有,$a=-10$.

12 【解析】(1)$f'(x)=3x^2-6x+a$,$f'(0)=a$.

曲线$y=f(x)$在点$(0,2)$处的切线方程为$y=ax+2$.

由题设得$-\frac{2}{a}=-2$,所以$a=1$.

(2)由(1)知,$f(x)=x^3-3x^2+x+2$.

设$g(x)=f(x)-kx+2=x^3-3x^2+(1-k)x+4$.

由题设知$1-k>0$.

当$x\leqslant 0$时,$g'(x)=3x^2-6x+1-k>0$,$g(x)$单调递增,$g(-1)=k-1<0$,$g(0)=4$,所以$g(x)=0$在$(-\infty,0]$有唯一实根.

当$x>0$时,令$h(x)=x^3-3x^2+4$,则$g(x)=h(x)+(1-k)x>h(x)$.

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$,$h(x)$在$(0,2)$单调递减,在$(2,+\infty)$单调递增,所以$g(x)>h(x)\geqslant h(2)=0$.

所以$g(x)=0$在$(0,+\infty)$没有实根.

综上,$g(x)=0$在$\mathbf{R}$有唯一实根,即曲线$y=f(x)$与直线$y=kx-2$只有一个交点.

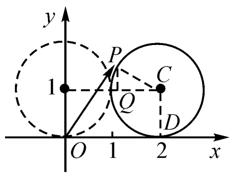
专题 14　任意角的三角函数

5 年高考真题演练

1 D　**2** C　**3** A　**4** A　**5** C　**6** B

7 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　**8** -8　**9** $\frac{4}{3}$

10 $(2-\sin2,1-\cos2)$　【解析】如图，作 $CQ \parallel x$ 轴，$PQ\perp CQ$，Q 为垂足.



第 10 题图

根据题意得劣弧 $\overset{\frown}{DP}=2$，故 $\angle DCP=2$，则在 $\triangle PCQ$ 中，$\angle PCQ=2-\frac{\pi}{2}$，$|CQ|=\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=\sin2$，$|PQ|=\sin\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos2$，所以 P 点的横坐标为 $2-|CQ|=2-\sin2$，P 点的纵坐标为 $1+|PQ|=1-\cos2$，所以 P 点的坐标为 $(2-\sin2,1-\cos2)$，故 $\overrightarrow{OP}=(2-\sin2,1-\cos2)$.

高考试题专项预测

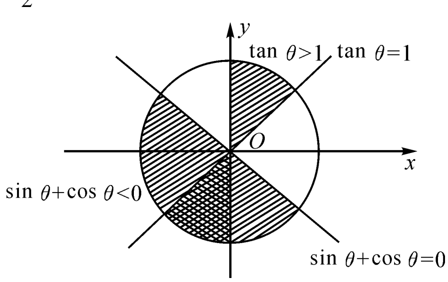
题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	B	D	D
题号	6	7	8	9	10
答案	B	B	B	D	A

1 C　**2** C　**3** B　**4** D　**5** D　**6** B

7 B　【解析】由于函数 $f(x)$ 为偶函数，故 $b=f(\cos2)=f(-\cos2)$，$c=f(\cos3)=f(-\cos3)$，由于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)=\sin x+x\cos x\geqslant0$，即函数在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，据单位圆中三角函数线易得 $0<-\cos2<\cos1<-\cos3<\frac{\pi}{2}$，根据函数单调性可得 $f(-\cos2)<f(\cos1)<f(-\cos3)$，故选 B.

8 B　**9** D

10 A　【解析】因为 $\tan(\pi+\theta)>1$，即 $\tan\theta>1$，又 $\sin\theta+\cos(-\theta)<0$，如图，结合三角函数线进行分析可知，$2k\pi+\frac{5\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，因此 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<0$. 故选 A.



第 10 题图

11 0　【解析】原式 $=\cos\alpha\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\cos\alpha\frac{1}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\frac{1}{|\sin\alpha|}$.

因为 α 是第二象限角，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以 $\cos\alpha\frac{1}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\frac{1}{|\sin\alpha|}=-1+1=0$，即原式等于 0.

12 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　【解析】由 $-180°<\alpha<-90°$，得 $-105°<\alpha+75°<-15°$，

故 $\sin(75°+\alpha)=-\sqrt{1-\cos^2(75°+\alpha)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

而 $\cos(15°-\alpha)=\cos[90°-(75°+\alpha)]=\sin(75°+\alpha)$，

$\sin(15°-\alpha)=\sin[90°-(75°+\alpha)]=\cos(75°+\alpha)$，

所以 $\tan(15°-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

13 0　【解析】$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}$.

$\because$ 角 α 的终边落在直线 $y=-x$ 上，$\therefore$ 角 α 是第二或第四象限角.

当 α 是第二象限角时，$\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$，

当 α 是第四象限角时，$\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$.

14 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　**15** $-\frac{1}{8}$　**16** 2　3　**17** $\frac{\sqrt{15}}{4}$

专题 15　三角函数的图象

5 年高考真题演练

1 D　【解析】函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在 $x=\pi$ 时为负，排除 A；易知函数为奇函数，图象关于原点对称，排除 B；再比较 C，D，不难发现当 x 取接近于 0 的正数时 $y>0$，排除 C.

2 B　**3** A　**4** C

5 B　【解析】由题意知，$f(x)=|\cos x|\cdot\sin x$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin2x$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f(x)=-\cos x\cdot\sin x=-\frac{1}{2}\sin2x$，故选 B.

6 D　【解析】由题图知正三角形的高为 1，则边长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，显然当 $x=0$ 时，$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，且函数 $y=f(x)$ 是递增函数，可排除 B；由平行线分线段成比例定理

可知$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{1}$，即$BE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)$，而$BE=CD$，所以$y=2EB+BC=2\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cos\dfrac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$，排除A，C，故选D.

7 $\dfrac{\pi}{6}$　**8** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9【解析】(1) $f(8)=10-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\times 8\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\times 8\right)=10-\sqrt{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}-\sin\dfrac{2\pi}{3}=10-\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10.$

故实验室上午8时的温度为10 ℃.

(2)因为$f(t)=10-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}t\right)=10-2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

又$0\leqslant t<24$，所以$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7\pi}{3}$，$-1\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

当$t=2$时，$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$；当$t=14$时，$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$.

于是$f(t)$在$[0,24)$上取得最大值12，取得最小值8.

故实验室一天最高温度为12 ℃，最低温度为8 ℃，最大温差为4 ℃.

10【解析】(1) $f(x)$的最小正周期为π，

$x_0=\dfrac{7\pi}{6}$，$y_0=3$.

(2)因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{12}\right]$，所以$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{5\pi}{6},0\right]$.

于是，当$2x+\dfrac{\pi}{6}=0$，即$x=-\dfrac{\pi}{12}$时，$f(x)$取得最大值0；

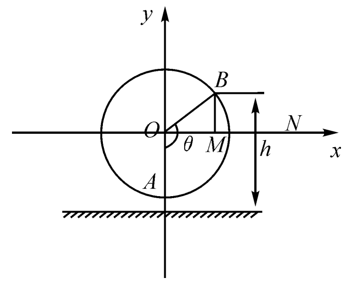
当$2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}$，即$x=-\dfrac{\pi}{3}$时，$f(x)$取得最小值$-3$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**A**	**B**	**D**	**D**	**A**
题号	6	7	8	9	
答案	**B**	**B**	**B**	**D**	

1 A　**2** B　**3** D　**4** D　**5** A

6 B【解析】过点O作地面平行线ON，过点B作ON的垂线BM交ON于M点，点A在$\odot O$上逆时针运动的角速度是$\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore t$秒转过的弧度数为$\dfrac{\pi}{6}t$，设$\theta=\dfrac{\pi}{6}t$，当$\theta>\dfrac{\pi}{2}$时，$\angle BOM=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，$h=OA+BM=30+30\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$，当$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，上述关系式也适合．故$h=30+30\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=30\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{2}\right)+30.$



第6题图

7 B【解析】将函数$y=\sin x$的图象按照变换①图象上所有点向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$可得$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

②图象上所有点向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$可得$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)$；

③图象上每个点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$，向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度可得$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

④图象上每个点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$，向左平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度可得$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8 B【解析】将函数$f(x)=\sin(2x+\theta)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到函数$g(x)=\sin(2x+\theta-2\varphi)$的图象，因为函数$f(x)$，$g(x)$的图象都经过点$P\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

所以$g(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}-2\varphi\right)$，所以$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当$\dfrac{\pi}{3}-2\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=-k\pi(k\in\mathbf{Z})$，与选项不符，舍去；

当$\dfrac{\pi}{3}-2\varphi=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令$k=-1$，$\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

故选 B.

9 **D** 【解析】先化简函数解析式 $y=\begin{cases}2\tan x, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\\ 2\sin x, x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$，利用正切函数和正弦函数的图象可知答案为 D.

10 $\frac{7}{3}\pi$ 【解析】先利用两角和公式对函数解析式化简，画出函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，方程的解即为直线与三角函数图象的交点，在$[0,2\pi]$上，当 $a=\sqrt{3}$时，直线与三角函数图象恰有三个交点，进而求得此时 x_1,x_2,x_3，最后相加即可.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$得到 $x_1=0, x_2=\frac{\pi}{3}, x_3=2\pi$

$x_1+x_2+x_3=\frac{7}{3}\pi$.

11 8 【解析】由题意可得 $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}t+5$，则 $2.5\sin\frac{\pi}{6}t+5\geqslant 6.25$，$\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant\frac{5\pi}{6}$，即 $1\leqslant t\leqslant 5$，该船可以 1 点进港，5 点离港，或 13 点进港，17 点离港，在港口内呆的时间总和为 $4+4=8$(小时).

12 $\frac{\sqrt{7}}{6}\pi$ 【解析】由图可知 $M\left(\frac{\pi}{12},A\right)$，$N\left(\frac{7\pi}{12},-A\right)$，$\because \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即$\frac{\pi}{12}\cdot\frac{7\pi}{12}-A^2=0$，$\therefore A=\frac{\sqrt{7}}{12}\pi$. 又 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$，$\therefore A\cdot\omega=\frac{\sqrt{7}}{12}\pi\times 2=\frac{\sqrt{7}}{6}\pi$.

13 $\frac{1}{2}$ 【解析】因为函数的最大值为 1，最小值为 -1，且在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减，又函数值从 1 减小到 -1，可知$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$为半周期，则周期为 π，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，此时原式为 $y=\sin(2x+\varphi)$，又由函数过点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，代入可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，因此函数为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $x=0$，可得 $y=\frac{1}{2}$.

14 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

【解析】$A=\frac{3-(-1)}{2}=2$，$B=\frac{3+(-1)}{2}=1$，

由图可知 $2\sin\varphi+1=2$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，

又$\because f(x)$的图象过点$(-\pi,-1)$，

$\therefore 2\sin\left(-\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right)+1=-1$，

即 $\sin\left(-\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

$\therefore -\pi\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=-2k-\frac{4}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$，而 $T>2\pi$，$\therefore 0<\omega<1$，$\therefore \omega=\frac{2}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

15 2016 【解析】观察图形，易知 $A=\frac{1}{2}$，$b=1$，$T=4$，

则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)+1$，将$(0,1)$代入解析式得$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 0+\varphi\right)+1=1$，$\therefore \sin\varphi=0$，又 $0\leqslant\varphi<\pi$，$\therefore \varphi=0$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x+1$. 由图可知 $f(0)=1$，$f(1)=\frac{3}{2}$，$f(2)=1$，$f(3)=\frac{1}{2}$，则$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=4$，且$f(x)$是以 4 为周期的周期函数. $\therefore S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2015)=504\times 4=2016$.

▶ 专题 16　三角函数的性质

5 年高考真题演练

1 B　**2** A　**3** C　**4** D　**5** B

6 π　**7** $\frac{3}{2}$　**8** $\frac{5}{16}$

9 (1)$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\cos\frac{5\pi}{4}\left(\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

$=-2\cos\frac{\pi}{4}\left(-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=2$.

(2)因为 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x$

$=\sin 2x+\cos 2x+1$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，

所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	D	B
题号	6	7	8		
答案	A	C	A		

1 C **2** B **3** D **4** D **5** B **6** A

7 C 【解析】因为 $f(x)=\frac{2\cos^2x}{4\cos x}+\frac{1}{2}a\sin x=\frac{1}{2}(\cos x+a\sin x)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{2}\cos(x-\varphi)$(其中 $\tan\varphi=a$),所以 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{2}=2$,解得 $a=\pm\sqrt{15}$.

8 A 【解析】$\frac{2\sin^2\theta+\sin2\theta}{1+\tan\theta}=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}=\sin2\theta=k$,在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上随着 k 的增大而增大,所以 $\sin\theta-\frac{\pi}{4}$ 也随着 k 的增大而增大.

9 $[-1,0)$ 【解析】由正弦函数图象知,要使函数 $y=\sin\frac{1}{2}\omega x$ 在 $(0,\pi)$ 内是减函数,则 $\begin{cases}\omega<0\\\left|\frac{\omega\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$,解得 $-1\leqslant\omega<0$.

10 ③ **11** ①③④ **12** 2

13 ①③ 【解析】对于①,$y=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=\cos2x$ 是偶函数,故①正确;对于②,由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,令 $k=0$,得 $k\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,则函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上不是增函数,故②错误;对于③,当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时,$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$,取得最小值,故③正确;对于④,函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 单位,得到函数 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,故④错误.

专题 17 简单的三角恒等变换

5 年高考真题演练

1 A **2** C **3** B **4** C

5 $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **6** $\frac{2}{3}$

7 【解析】(1) 因为函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

所以,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2) 由已知,有 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$,

所以,$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$,

即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

当 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 时,由 α 是第二象限角,知 $\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

此时,$\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}$.

当 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq0$ 时,有 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\frac{5}{4}$.

由 α 是第二象限角,知 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$,此时 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

综上所述,$\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

8 【解析】(1) 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$

$=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) 由 (1) 知 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$,

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$,

所以 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos\frac{5\pi}{6}\cos2\alpha+\sin\frac{5\pi}{6}\sin2\alpha$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)$

$=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}.$

9【解析】(1) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,

因为 $x\in[0,\pi]$,从而 $\frac{\pi}{4}-x\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,最小值为 -1.

(2) 由 $\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\\ f(\pi)=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\cos\theta(1-2a\sin\theta)=0,\\ 2a\sin^2\theta-\sin\theta-a=1,\end{cases}$ 又 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 知 $\cos\theta\neq0$,

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ \theta=-\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**D**	**C**	**C**	**C**
题号	6				
答案	**B**				

1 **D**

2 **D** 【解析】原式 $=\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}-\frac{1}{\sin10^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{2\sin(10^\circ-30^\circ)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{2\sin(-20^\circ)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{-2\sin20^\circ}{\frac{1}{2}\sin20^\circ}=-4$,选 D.

3 **C** 【解析】原式 $=\frac{\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}$

$=\frac{\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{4\sin20^\circ}=\frac{\sin80^\circ\cos80^\circ}{8\sin20^\circ}$

$=\frac{\sin160^\circ}{16\sin20^\circ}=\frac{1}{16}.$

4 **C** 【解析】$\frac{3-\sin70^\circ}{2-\cos^210^\circ}=\frac{3-\cos20^\circ}{2-\cos^210^\circ}$

$=\frac{3-(2\cos^210^\circ-1)}{2-\cos^210^\circ}$

$=\frac{2(2-\cos^210^\circ)}{2-\cos^210^\circ}=2$. 故选 C.

5 **C** 【解析】$\because \alpha+\frac{\pi}{4}+\beta-\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta$,

$\therefore \alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{3}{22}.$

6 **B** 【解析】由 $\sin x-\sin y=-\frac{2}{3}$,

得 $\sin^2x+\sin^2y-2\sin x\sin y=\frac{4}{9}$. ①

由 $\cos x-\cos y=\frac{2}{3}$,

得 $\cos^2x+\cos^2y-2\cos x\cos y=\frac{4}{9}$. ②

①+②,得 $2-2\cos(x-y)=\frac{8}{9}$,

$\therefore \cos(x-y)=\frac{5}{9}.$

$\because 0<x<\frac{\pi}{2},0<y<\frac{\pi}{2}$,且 $\sin x-\sin y=-\frac{2}{3}<0$,

$\therefore x<y$,$\therefore -\frac{\pi}{2}<x-y<0$,

$\therefore \sin(x-y)=-\sqrt{1-\cos^2(x-y)}=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$,

$\therefore \tan(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=-\frac{2\sqrt{14}}{5}.$

7 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 【解析】因为函数 $f(x)=\sqrt{8x^2-8x\sin\alpha+\cos2\alpha}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $8x^2-(8\sin\alpha)x+\cos2\alpha\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $(8\sin\alpha)^2-4\times8\times\cos2\alpha\leqslant0$,即 $2\sin^2\alpha\leqslant\cos2\alpha$,整理得 $4\sin^2\alpha\leqslant1$,$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$,所以 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

8 $\frac{\pi}{3}$ 【解析】$\because (1+\sqrt{3}\tan\alpha)(1+\sqrt{3}\tan\beta)=4$,

$\therefore 1+\sqrt{3}(\tan\alpha+\tan\beta)+3\tan\alpha\tan\beta=4$,

$\therefore \sqrt{3}(\tan\alpha+\tan\beta)=3-3\tan\alpha\tan\beta=3(1-\tan\alpha\tan\beta)$,

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)$,

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\sqrt{3}$,

又 α,β 为锐角,$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

9 $\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\cos(x+10^\circ)+\cos(x-10^\circ)$

$=\cos x\cos10^\circ-\sin x\sin10^\circ+\cos x\cos10^\circ+\sin x\sin10^\circ$

$=2\cos x\cos10^\circ$,

所以 $\sin(x+20°)=2\cos x\cos 10°$,

即 $\sin x\cos 20°+\cos x\sin 20°=2\cos x\cos 10°$,

即 $\sin x\cos 20°+\cos x\sin 20°=2\cos x\cos(30°-20°)$,

即 $\sin x\cos 20°+\cos x\sin 20°=2\cos x(\cos 30°\cos 20°+\sin 30°\sin 20°)$,

整理得 $\sin x\cos 20°=\sqrt{3}\cos x\cos 20°$,所以 $\tan x=\sqrt{3}$.

10【解析】(1) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

(2) $f\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)$.

因为 $\cos\theta=\frac{4}{5}$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$,

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$, $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{7}{25}$,

所以 $f\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)=\left(\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

11【解析】(1)由 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$ 得 $f(x)=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2x-1)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上为增函数,在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数

又 $f(0)=1$,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2,最小值为 -1.

(2)由(1)可知 $f(x_0)=2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$.

又因为 $f(x_0)=\frac{6}{5}$,所以 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$. 由 $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,得 $2x_0+\frac{\pi}{6}=\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$,从而 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$.

所以

$\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

12【解析】(1) $\because \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=1$,

$\therefore \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

$\therefore \cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$.

(2) $\because (2a-c)\cos B=b\cos C$, $\therefore 2\sin A\cos B=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A$.

$\because \sin A>0$, $\therefore \cos B=\frac{1}{2}$, $\because B\in(0,\pi)$,

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$, $A\in\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$.

$\because f(A)=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$, 又 $\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,

$\therefore f(A)\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

13【解析】(1) $\because \boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$, $\therefore 2a\cos C=2b-c$. 根据正弦定理,得 $2\sin A\cos C=2\sin B-\sin C$. 又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

$\therefore \frac{1}{2}\sin C=\cos A\sin C$,

$\because \sin C\neq 0$, $\therefore \cos A=\frac{1}{2}$.

又 $\because 0<A<\pi$. $\therefore A=\frac{\pi}{3}$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\frac{-2\cos 2C}{1+\tan C}+1=1-\frac{2(\cos^2C-\sin^2C)}{1+\frac{\sin C}{\cos C}}=1-2\cos^2C+2\sin C\cos C=\sin 2C-\cos 2C=\sqrt{2}\sin\left(2C-\frac{\pi}{4}\right)$, $\because 0<C<\frac{2}{3}\pi$, $\therefore -\frac{\pi}{4}<2C-\frac{\pi}{4}<\frac{13}{12}\pi$, $\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(2C-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, $\therefore -1<\sqrt{2}\sin\left(2C-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$, 即 $\frac{-2\cos 2C}{1+\tan C}+1$ 的取值范围是 $(-1,\sqrt{2}]$.

专题 18 平面向量的概念及其线性运算

5 年高考真题演练

1 D **2** B **3** B **4** D **5** A **6** D

7 $\frac{1}{2}$ **8** 4

9 $\frac{3}{4}$ 【解析】基本事件的总数是 $4\times4=16$，在 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ 中，当 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}$ 时，点 G 分别为该平行四边形的各边的中点，此时点 G 在平行四边形的边界上，而其余情况中的点 G 都在平行四边形外，故所求的概率是 $1-\frac{4}{16}=\frac{3}{4}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	B	A	C
题号	6	7	8		
答案	B	B	A		

1 B **2** C **3** B **4** A **5** C **6** B

7 B 【解析】$\because \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，$2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{CP}$，

$\therefore 2|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{CP}|$；

同理可得 $2|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|$，$2|\overrightarrow{RC}|=|\overrightarrow{BR}|$，

$\therefore S_{\triangle PRC}=S_{\triangle AQP}=S_{\triangle BQR}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle PRQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PRC}-S_{\triangle AQP}-S_{\triangle BQR}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore$ $\triangle PQR$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $1:3$.

8 A 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，由向量 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 共线可知存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{BE}$，即 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\begin{cases}m=-\lambda,\\ n=\frac{1}{2}\lambda,\end{cases}$ 所以 $\frac{m}{n}=-2$.

9 $\frac{1}{2}$

10 $\frac{1}{4}$ 【解析】如图.

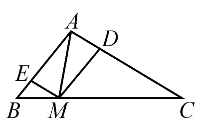
$\because \overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore 4\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

$3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

$\therefore 3(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$，

$\therefore 3\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$. 故 B、C、M 三点共线.



第 10 题图

设 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则四边形 $AEMD$ 是平行四边形，易知 $|\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|$，于是点 M 到直线 AB 的距离是点 C 到直线 AB 的距离的 $\frac{1}{4}$.

故 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{1}{4}$.

11 $\frac{2015}{2}$ 【解析】$\because \overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\therefore P,A,B$ 三点共线，

又 $\overrightarrow{OP}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{2015}\overrightarrow{OB}$，$\therefore a_1+a_{2015}=1$.

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，

$\therefore S_{2015}=\frac{2015(a_1+a_{2015})}{2}=\frac{2015}{2}$.

12 3 【解析】$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AQ}\right)$

$=\frac{1}{3m}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3n}\overrightarrow{AQ}$.

又 $\because Q$、G、P 三点共线，$\therefore \frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

13 $\frac{1}{8}$ 【解析】$\because N,M$ 分别为 OA 与 OB 的中点，

$\therefore \overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=2x\overrightarrow{ON}+2y\overrightarrow{OM}$，又 M、C、N 三点共线，$\therefore 2x+2y=1$，即 $x+y=\frac{1}{2}$，$\therefore x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{1}{8}$，当且仅当 $x=y=\frac{1}{4}$ 时等号成立，故 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{1}{8}$.

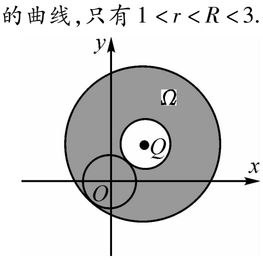
▶ 专题 19 平面向量基本定理及其坐标表示

5 年高考真题演练

1 C **2** B **3** B

4 D 【解析】设 $D(x,y)$，则 $(x-3)^2+y^2=1$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=(x-1,y+\sqrt{3})$，故 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|=\sqrt{(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2}$，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$ 的最大值即为圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的点到点 $(1,-\sqrt{3})$ 距离的最大值，其最大值为圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心到点 $(1,-\sqrt{3})$ 的距离加上圆的半径，即 $\sqrt{(3-1)^2+(0+\sqrt{3})^2}+1=\sqrt{7}+1$，最小值为 $\sqrt{(3-1)^2+(0+\sqrt{3})^2}-1=\sqrt{7}-1$，故取值范围为 $[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$.

5 A 【解析】由已知可设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(0,1)$，$P(x,y)$，则 $\overrightarrow{OQ}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，曲线 $C=\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\sin\theta),0\leqslant\theta<2\pi\}$，即 $C:x^2+y^2=1$，区域 $\Omega=\{P\,|\,0<r\leqslant|\overrightarrow{PQ}|\leqslant R,r<R\}$ 表示圆 $P_1:(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=r^2$ 与圆 $P_2:(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=R^2$ 所形成的圆环，如图所示，要使 $C\cap\Omega$ 为两段分离的曲线，只有 $1<r<R<3$.



第 5 题图

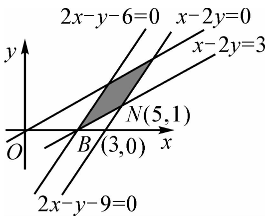
6 $\frac{1}{2}$ **7** $\sqrt{5}$ **8** 4

9 3 【解析】设点 $P(x,y)$，由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，得 $(x-1,y+1)=\lambda(2,1)+\mu(1,2)$，

故$\begin{cases}x-1=2\lambda+\mu,\\y+1=\lambda+2\mu,\end{cases}$得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2x-y-3}{3},\\\mu=\dfrac{-x+2y+3}{3},\end{cases}$由

$1\leqslant\lambda\leqslant2,0\leqslant\mu\leqslant1$ 得，$\begin{cases}1\leqslant\dfrac{2x-y-3}{3}\leqslant2,\\0\leqslant\dfrac{-x+2y+3}{3}\leqslant1,\end{cases}$

即$\begin{cases}3\leqslant2x-y-3\leqslant6,\\-3\leqslant x-2y-3\leqslant0,\end{cases}$画出可行域如图中阴影部分所示，点 $B(3,0)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离 $d=\frac{|3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，点 B,N 之间的距离 $|BN|=\sqrt{5}$，故阴影部分的面积为 3.



第 9 题图

10【解析】(1)$\because\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，

又$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)+(2-x,3-y)+(3-x,2-y)=(6-3x,6-3y)$，

$\therefore\begin{cases}6-3x=0,\\6-3y=0,\end{cases}$解得 $x=2,y=2$，

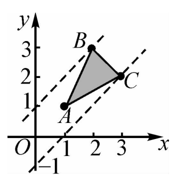
即$\overrightarrow{OP}=(2,2)$，故$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$.

(2)$\because\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$\therefore(x,y)=(m+2n,2m+n)$，

$\therefore\begin{cases}x=m+2n,\\y=2m+n,\end{cases}$

两式相减得，$m-n=y-x$，



第 10 题图

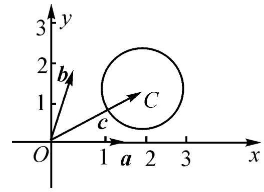
令 $y-x=t$，由图知，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时，t 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	C	A	D
题号	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	A	B

1 B **2** C **3** C **4** A **5** D **6** A **7** C **8** B

9 A 【解析】由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$得向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，如图所示，$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$. 设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，则由$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$ 得$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$，由 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 和图象可得 $|\boldsymbol{c}|_{\max}=|OC|+r_C=4\left[r_C\text{ 为圆}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1\text{ 的半径}\right]$.



第 9 题图

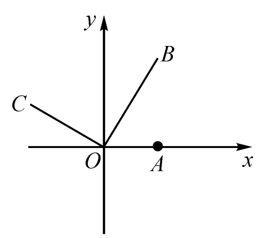
10 B 【解析】如图所示：$\angle AOC=\frac{5\pi}{6}$，

根据三角函数的定义，可设 $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r,\frac{1}{2}r\right)$.

$\because\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，

$\therefore\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r,\frac{1}{2}r\right)=(-2,0)+(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\lambda-2,\\\dfrac{1}{2}r=\sqrt{3}\lambda,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.



第 10 题图

11 $\{(-2,-2)\}$ **12** $\sqrt{2}$

13 2 【解析】建立如图所示的坐标系，

则 $A(1,0)$，$B(\cos120°,\sin120°)$，即 $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设$\angle AOC=\alpha$，则$\overrightarrow{OC}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

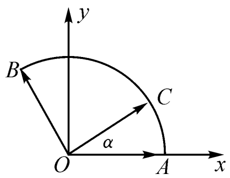
$\because\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(x,0)+\left(-\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

$\therefore\begin{cases}x-\dfrac{y}{2}=\cos\alpha,\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\alpha,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}+\cos\alpha,\\y=\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}},\end{cases}$

$\therefore x+y=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin(\alpha+30°)$.

$\because0°\leqslant\alpha\leqslant120°$，$\therefore30°\leqslant\alpha+30°\leqslant150°$.

$\therefore x+y$ 有最大值 2，当 $\alpha=60°$时取最大值.



第 13 题图

14 $\frac{9}{4}$ 【解析】由题意知$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,因为$M,E,N$三点共线,所以$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AM}+(1-\lambda)\overrightarrow{AN}$(其中$0<\lambda<1$). 又$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$,所以$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\lambda x\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)y\overrightarrow{AC}$. 因此有$4\lambda x=1,4(1-\lambda)y=1$,解得$x=\frac{1}{4\lambda}$,$y=\frac{1}{4(1-\lambda)}$. 令$\frac{1}{\lambda}=t$,则$t>1$,则$4x+y=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4(1-\lambda)}=t+\frac{t}{4(t-1)}=(t-1)+\frac{1}{4(t-1)}+\frac{5}{4}\geqslant\frac{9}{4}$,当且仅当$t=\frac{3}{2}$,即$\lambda=\frac{2}{3}$时取得等号.

15 $m\neq-\frac{7}{10}$

16 5 【解析】以D为坐标原点,以DA,DC所在直线为x轴、y轴建立平面直角坐标系,根据题意设$CD=a$,则$A(2,0)$,$B(1,a)$,$P(0,y)$,则$\overrightarrow{PA}=(2,-y)$,$\overrightarrow{PB}(1,a-y)$. $\therefore\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=(5,3a-4y)$,$\therefore|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5^2+(3a-4y)^2}\geqslant5$.

▶ 专题 20 平面向量的数量积

5 年高考真题演练

1 C **2** A

3 B 【解析】由于$|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{a}^2t^2$,令$f(t)=\boldsymbol{a}^2t^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{b}^2$,而$t$是任意实数,所以可得$f(t)$的最小值为$\frac{4\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{4\boldsymbol{a}^2}=\frac{4\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\theta}{4\boldsymbol{a}^2}=\frac{4\boldsymbol{b}^2\sin^2\theta}{4}=1$,即$|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=1$,则知若$\theta$确定,则$|\boldsymbol{b}|$唯一确定.

4 D 【解析】由已知得$\boldsymbol{c}=(m+4,2m+2)$,因为$\cos<\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|}$,$\cos<\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$,所以$\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$,又由已知得$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$,所以$2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$,即$2[(m+4)+2(2m+2)]=4(m+4)+2(2m+2)$,解得$m=2$.

5 D 【解析】对于$\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}$与$\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$,相当于平行四边形的对角线长度的较小者与两邻边长的较小者比较,它们的大小关系不定,因此A,B均错;而$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$中的较大者与$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|$可构成非锐角三角形的三边,因此有$\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\geqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$,因此选D.

6 D 【解析】由题意得点B_1,B_2在以O为圆心的单位圆上,点P在以O为圆心半径为$\frac{1}{2}$的圆内,又$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$,所以点$A$在以$B_1B_2$为直径的圆上,当$P$与$O$点重合时,$|\overrightarrow{OA}|$最大,为$\sqrt{2}$,当$P$在半径为$\frac{1}{2}$的圆周上时,$|\overrightarrow{OA}|$最小,为$\frac{\sqrt{7}}{2}$,故选D.

7 D 【解析】由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,可得$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,又$A,B$是两定点,可设$A(\sqrt{3},1)$,$B(0,2)$,$P(x,y)$,由$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,可得

$$\begin{cases}x=\sqrt{3}\lambda\\y=\lambda+2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\\mu=\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}x,\end{cases}$$

因为$|\lambda|+|\mu|\leqslant1$,所以$\left|\frac{\sqrt{3}}{3}x\right|+\left|\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right|\leqslant1$,

当$\begin{cases}x\geqslant0\\3y-\sqrt{3}x\geqslant0\\3y+\sqrt{3}x\leqslant6\end{cases}$时,

由可行域可得$S_0=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,所以由对称性可知点$P$所表示的区域面积$S=4S_0=4\sqrt{3}$,故选D.

8 D 【解析】设$AB=4$,以AB所在直线为x轴,线段AB的中垂线为y轴,则$A(-2,0)$,$B(2,0)$,则$P_0(1,0)$,设$C(a,b)$,$P(x,0)$,$\therefore\overrightarrow{PB}=(2-x,0)$,$\overrightarrow{PC}=(a-x,b)$,$\therefore\overrightarrow{P_0B}=(1,0)$,$\overrightarrow{P_0C}=(a-1,b)$.
则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=(2-x)(a-x)\geqslant a-1$恒成立. 即$x^2-(2+a)x+a+1\geqslant0$恒成立.
$\therefore\Delta=(2+a)^2-4(a+1)=a^2\leqslant0$恒成立,
$\therefore a=0$.
即点C在线段AB的中垂线上,$\therefore AC=BC$,选D.

9 A 【解析】依题意得,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=1$. 一方面,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=-\frac{1}{2}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2$;另一方面,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2}{4}=\frac{1-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2}{2}$,于是有$-\frac{1}{2}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2\leqslant\frac{1-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}^2|}{2}$,即$|\boldsymbol{c}|^2\leqslant2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\leqslant$

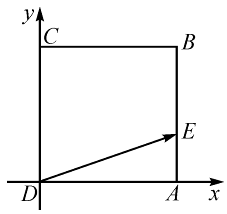
$2+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|=2+|\boldsymbol{c}|$，$|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{c}|-2=(|\boldsymbol{c}|-2)(|\boldsymbol{c}|+1)\leqslant 0$，$|\boldsymbol{c}|\leqslant 2$，即$|\boldsymbol{c}|$的最大值是 2，选 A.

10 1 【解析】以 D 为坐标原点，建立平面直角坐标系如图所示.

则 $D(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$，

设 $E(1,a)(0\leqslant a\leqslant 1)$.

所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=(1,a)\cdot(1,0)=1$.



第 10 题图

11 ②④ 【解析】对于①，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有 0 组对应乘积，则 $S_1=2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{b}^2$，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有 2 组对应乘积，则 $S_2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有 4 组对应乘积，则 $S_3=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以 S 最多有 3 个不同的值，①错误；因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不等向量，所以 $S_1-S_3=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2>0$，$S_1-S_2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2>0$，$S_2-S_3=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2>0$，所以 $S_3<S_2<S_1$，故 $S_{\min}=S_3=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，对于②，当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$S_{\min}=\boldsymbol{b}^2$ 与$|\boldsymbol{a}|$无关，②正确；对于③，显然 $S_{\min}$ 与$|\boldsymbol{b}|$有关，③错误；对于④，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $S_{\min}=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>16|\boldsymbol{a}|^2+16|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta=16|\boldsymbol{a}|^2\cdot(1+\cos\theta)\geqslant 0$，故 $S_{\min}>0$，④正确；对于⑤，$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，$S_{\min}=4|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta=8|\boldsymbol{a}|^2$，所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，⑤错误.

12【解析】(1) 由题意知 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m\sin 2x+n\cos 2x$.

因为 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},\sqrt{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$，

所以 $\begin{cases}\sqrt{3}=m\sin\frac{\pi}{6}+n\cos\frac{\pi}{6},\\ -2=m\sin\frac{4\pi}{3}+n\cos\frac{4\pi}{3},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sqrt{3}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n,\\ -2=-\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n,\end{cases}$

解得 $m=\sqrt{3}$，$n=1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由题意知 $g(x)=f(x+\varphi)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$.

设 $y=g(x)$ 的图象上符合题意的最高点为$(x_0,2)$，

由题意知 $x_0^2+1=1$，所以 $x_0=0$，

即到点$(0,3)$的距离为 1 的最高点为$(0,2)$.

将其代入 $y=g(x)$ 得 $\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

因此 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	A	D	C
题号	6				
答案	D				

1 C **2** B **3** A

4 D 【解析】由题意知 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$，又$|\boldsymbol{a}|=1$，

$\therefore 1-|\boldsymbol{b}|\cos\theta-2|\boldsymbol{b}|^2=0$，$\therefore|\boldsymbol{b}|\cos\theta=1-2|\boldsymbol{b}|^2$，

$\because -1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，$\therefore -|\boldsymbol{b}|\leqslant 1-2|\boldsymbol{b}|^2\leqslant|\boldsymbol{b}|$，

$\therefore\frac{1}{2}\leqslant|\boldsymbol{b}|\leqslant 1$.

5 C 【解析】设 BC 边中点为 D，$\because\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$，即$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{BC}$，$MD\perp BC$，$MD$ 为 BC 的垂直平分线，$\therefore$ 动点 M 的轨迹必通过$\triangle ABC$ 的外心，选 C.

6 D

7 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}^2=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times 3\times 2\times\cos\alpha+4=9$，所以$|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{b}^2=(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times 3\times 1\times\cos\alpha+1=8$，所以$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=9\boldsymbol{e}_1^2-9\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2^2=9-9\times 1\times 1\times\frac{1}{3}+2=8$，所以 $\cos\beta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{8}{3\times 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8 2 【解析】由题意可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 120°=2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$，在菱形 $ABCD$ 中，易知$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{\lambda}+\frac{4}{3}-2\left(1+\frac{1}{3\lambda}\right)=1$，解得 $\lambda=2$.

9 1 【解析】由题意得，$|\boldsymbol{a}|=1$，又$\triangle OAB$ 是以 O 为直

角顶点的等腰直角三角形，所以$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$. 由$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=2$，所以$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2}$，故$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

10 6 【解析】设A、B、C三点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，由题意得$F(1,0)$. $\because \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，$\therefore F$为$\triangle ABC$的重心，$\therefore x_1+x_2+x_3=3$. 由抛物线定义得$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)=6$.

11 【解析】(1)$\because \boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，

$\therefore \frac{3}{2}\cos x+\sin x=0$，$\therefore \tan x=-\frac{3}{2}$.

故$2\cos^2x-\sin2x=\frac{2\cos^2x-2\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{2-2\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{20}{13}$.

(2)$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\sin x+\cos x,\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore f(x)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\left(\sin x+\cos x,\frac{1}{2}\right)\cdot(\cos x,-1)=\sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}$.

$\because \sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin2x+\cos2x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

又$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$，$\therefore -\frac{3\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

$\therefore -1\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore f(x)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right]$.

12 【解析】(1)$\boldsymbol{a}'=(2,3)-\frac{2\times(-2+9)}{10}\times(-1,3)=\left(\frac{17}{5},-\frac{6}{5}\right)$.

(2)设$\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{a}'=(x',y')$，则$(x',y')=(x,y)-\frac{2}{5}(2x+y)(2,1)=\left(-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y,-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)$，

$\therefore \begin{cases}x'=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y,\\ y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y,\end{cases}$ 于是$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y',\\ y=-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'.\end{cases}$

故$A\left(-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\right)+B\left(-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\right)+C=0$，

从而$-\frac{1}{5}(3A+4B)x'+\frac{1}{5}(-4A+3B)y'+C=0$，

由于A、B不全为零，所以$3A+4B$，$-4A+3B$也不全为零.

于是$\boldsymbol{a}'$的终点在直线$-\frac{1}{5}(3A+4B)x+\frac{1}{5}(-4A+3B)\cdot y+C=0$上.

(3)设$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，则$b_1^2+b_2^2=1$. 对任意的实数t，取$\boldsymbol{a}=(t,t^2)$，则$\boldsymbol{a}'=(t,t^2)-[2(t,t^2)\cdot(b_1,b_2)]\cdot(b_1,b_2)=(t,t^2)-(2tb_1+2t^2b_2)\cdot(b_1,b_2)=((1-2b_1^2)t-2b_1b_2t^2,-2b_1b_2t+(1-2b_2^2)t^2)$.

$\because \boldsymbol{a}'$的终点在曲线C'上，

$\therefore [-2b_1b_2t+(1-2b_2^2)t^2]^2=(1-2b_1^2)t-2b_1b_2t^2$. ①

由于t为任意实数，比较①式两边的系数得

$1-2b_2^2=0$，$(-2b_1b_2)^2=-2b_1b_2$，$1-2b_1^2=0$.

从而$b_1^2=b_2^2=\frac{1}{2}$，$b_1b_2=-\frac{1}{2}$.

$\therefore \boldsymbol{b}=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由上知$\boldsymbol{a}'=(t^2,t)$，故对曲线C上任意点(x_0,y_0)，可知(y_0,x_0)落在曲线C'上，反之亦然，故曲线C：$x^2=y$与曲线C'：$y^2=x$关于直线l：$y=x$对称.

l的方向向量$\boldsymbol{d}=(1,1)$，$\because \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore \boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{b}$，即直线$l$与向量$\boldsymbol{b}$垂直.

13 【解析】(1)$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

$\because f(x)=1$，$\therefore \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

(2)$\because (2a-c)\cos B=b\cos C$，

由正弦定理得$(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，

$\therefore 2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq0$，

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore 0<A<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{2}<\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)<1$，

$\therefore 1<\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$，

故函数$f(A)$的取值范围是$\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

14 【解析】(1)设$M(x,y)$，由题设可得$A(2,0)$，$B(2,1)$，$C(0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{OM}=(x,y)$，$\overrightarrow{AM}=(x-2,y)$，$\overrightarrow{CM}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{BM}=(x-2,y-1)$，$d=|y-1|$.

$\because \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=k(\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BM}-d^2)$，

$\therefore (x,y)\cdot(x-2,y)=k[(x,y-1)\cdot(x-2,y-1)-|y-1|^2]$,

即 $(1-k)(x^2-2x)+y^2=0$ 为所求轨迹方程.

当 $k=1$ 时, $y=0$, 动点 M 的轨迹是一条直线;

当 $k=0$ 时, $x^2-2x+y^2=0$, 动点 M 的轨迹是圆;

当 $k\neq1$ 时, 方程可化为 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{1-k}=1$;

当 $k>1$ 时, 动点 M 的轨迹是双曲线;

当 $0<k<1$ 或 $k<0$ 时, 动点 M 的轨迹是椭圆.

(2) 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时, M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$, 得 $0\leqslant x\leqslant2$, $y^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

$\because \overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}=(x,y)+2(x-2,y)=(3x-4,3y)$,

$\therefore |\overrightarrow{OM}+2AM|^2=(3x-4)^2+9y^2=(3x-4)^2+9\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(x-1)^2\right]=\dfrac{9}{2}\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{7}{2}$,

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{5}{3}$ 时, $|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}|^2$ 取最小值 $\dfrac{7}{2}$;

当 $x=0$ 时, $|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}|^2$ 取最大值 16.

因此, $|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}|$ 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$, 最大值是 4.

(3) 由于 $\dfrac{\sqrt3}{3}\leqslant e\leqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$, 即 $e<1$, 此时圆锥曲线是椭圆,

其方程可化为 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{1-k}=1$.

①当 $0<k<1$ 时, $a^2=1$, $b^2=1-k$, $c^2=1-(1-k)=k$, $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=k$, $\because \dfrac{\sqrt3}{3}\leqslant e\leqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$, $\therefore \dfrac{1}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{2}$;

②当 $k<0$ 时, $a^2=1-k$, $b^2=1$, $c^2=(1-k)-1=-k$, $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{-k}{1-k}=\dfrac{k}{k-1}$, $\because \dfrac{\sqrt3}{3}\leqslant e\leqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$, $\therefore \dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{k}{k-1}\leqslant\dfrac{1}{2}$, 由 $k<0$ 得, $-1\leqslant k\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

综上, k 的取值范围是 $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

专题 21 解三角形

5 年高考真题演练

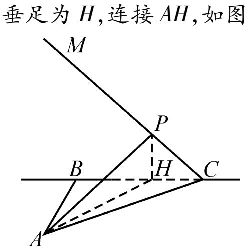
1 A

2 B 【解析】由题意可得 $\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}$, 又 $AB=1$, $BC=\sqrt2$, 所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt2}{2}$, 所以 $B=45^\circ$ 或 $B=135^\circ$. 当 $B=45^\circ$ 时, 由余弦定理可得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=1$, 此时 $AC=AB=1$, $BC=\sqrt2$, 易得 $A=90^\circ$, 与“钝角三角形”条件矛盾, 舍去. 所以 $B=135^\circ$. 由余弦定理可得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=\sqrt5$.

3 A 【解析】因为 $A+B+C=\pi$, 由 $\sin2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$ 得 $\sin2A+\sin2B+\sin2C=\dfrac{1}{2}$, 即 $\sin[(A+B)+(A-B)]+\sin[(A+B)-(A-B)]+\sin2C=\dfrac{1}{2}$, 整理得 $2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=\dfrac{1}{2}$, 整理得 $4\sin A\sin B\sin C=\dfrac{1}{2}$, 即 $\sin A\sin B\sin C=\dfrac{1}{8}$. 又 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$, 因此 $S^3=\dfrac{1}{8}a^2b^2c^2\sin A\sin B\sin C=\dfrac{1}{64}a^2b^2c^2$. 由 $1\leqslant S\leqslant2$ 得 $1\leqslant\dfrac{1}{64}a^2b^2c^2\leqslant2^3$, 即 $8\leqslant abc\leqslant16\sqrt2$, 因此选项 C、D 不一定成立. 又 $b+c>a>0$, 因此 $bc(b+c)>bc\cdot a\geqslant8$, 即 $bc(b+c)>8$, 选项 A 一定成立. 又 $a+b>c>0$, 因此 $ab(a+b)>ab\cdot c\geqslant8$, 即 $ab(a+b)>8$, 显然不能得出 $ab(a+b)>16\sqrt2$, 选项 B 不一定成立. 综上所述, 选 A.

4 D 【解析】由题意, 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$, 则 $\cos\angle ACB=\dfrac{4}{5}$.

作 $PH\perp BC$, 垂足为 H, 连接 AH, 如图所示.



第 4 题图

设 $PH=x$, 则 $CH=\sqrt3x$, 在 $\triangle ACH$ 中, 由余弦定理得

$AH=\sqrt{AC^2+CH^2-2AC\cdot CH\cdot\cos\angle ACB}$

$=\sqrt{625+3x^2-40\sqrt3x}$,

$\tan\angle PAH=\dfrac{PH}{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{625}{x^2}-\dfrac{40\sqrt3}{x}+3}}\left(\dfrac{1}{x}>0\right)$,

故当 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{4\sqrt3}{125}$ 时, 最大值为 $\dfrac{5\sqrt3}{9}$.

5 $\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$ 【解析】由正弦定理可得 $a+\sqrt2b=2c$, 又 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-\frac{1}{4}(a+\sqrt2b)^2}{2ab}=\dfrac{3a^2+2b^2-2\sqrt2ab}{8ab}\geqslant\dfrac{2\sqrt6ab-2\sqrt2ab}{8ab}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$, 当且

仅当 $\sqrt{3}a=\sqrt{2}b$ 时取等号，所以 $\cos C$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

6 $2\sqrt{3}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，根据正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，所以 $\frac{4}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，解得 $\sin B=1$，因为 $B\in(0^\circ,120^\circ)$，所以 $B=90^\circ$，所以 $C=30^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin C=2\sqrt{3}$.

7 【解析】如题图，设 $\angle CED=\alpha$.

(1) 在 $\triangle CDE$ 中，由余弦定理，得

$EC^2=CD^2+DE^2-2CD\cdot DE\cdot\cos\angle EDC$.

于是由题设知，$7=CD^2+1+CD$，即 $CD^2+CD-6=0$.

解得 $CD=2$ ($CD=-3$ 舍去).

在 $\triangle CDE$ 中，由正弦定理，得 $\frac{EC}{\sin\angle EDC}=\frac{CD}{\sin\alpha}$.

于是，$\sin\alpha=\frac{CD\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{EC}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，即 $\sin\angle CED=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(2) 由题设知，$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，于是由(1)知，

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{21}{49}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

而 $\angle AEB=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，所以 $\cos\angle AEB=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

在 $\text{Rt}\triangle EAB$ 中，$\cos\angle AEB=\frac{EA}{BE}=\frac{2}{BE}$，故

$BE=\frac{2}{\cos\angle AEB}=\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{14}}=4\sqrt{7}$.

8 【解析】(1) 由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 得 $c\cdot a\cos B=2$，又 $\cos B=\frac{1}{3}$，所以 $ac=6$.

由余弦定理，得 $a^2+c^2=b^2+2ac\cos B$.

又 $b=3$，所以 $a^2+c^2=9+2\times2=13$.

解 $\begin{cases}ac=6\\a^2+c^2=13\end{cases}$，得 $a=2,c=3$ 或 $a=3,c=2$.

因 $a>c$，所以 $a=3,c=2$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理，得 $\sin C=\frac{c}{b}\sin B=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

因 $a=b>c$，所以 C 是锐角，因此 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2}=\frac{7}{9}$.

于是 $\cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{23}{27}$.

9 【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，

由题意知 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又因为 $B=A+\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin B=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由正弦定理可得

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{3\times\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3\sqrt{2}$.

(2) 由 $B=A+\frac{\pi}{2}$ 得 $\cos B=\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由 $A+B+C=\pi$，得 $C=\pi-(A+B)$.

所以 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}$.

因此 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

10 【解析】(1) 由题得，$\alpha\geqslant2\beta$，且 $0<2\beta\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\geqslant\tan2\beta$，

即 $\frac{|CD|}{35}\geqslant\frac{\frac{|CD|}{40}}{1-\frac{|CD|^2}{6400}}$，解得，$|CD|\leqslant20\sqrt{2}$，$|CD|\approx28.28$ 米.

(2) 由题得，$\angle ADB=180^\circ-38.12^\circ-18.45^\circ=123.43^\circ$，

$\because\frac{35+80}{\sin123.43^\circ}=\frac{|AD|}{\sin18.45^\circ}$，$\therefore|AD|\approx43.61$ 米.

$\because|CD|^2=35^2+|AD|^2-2\times35\cdot|AD|\cdot\cos38.12^\circ$，

$\therefore|CD|\approx26.93$ 米.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	A	D	D
题号	6				
答案	A				

1 B **2** C **3** A

4 D 【解析】依题意及正弦定理可得,$b^2+c^2-a^2=-bc$,则由余弦定理得,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$,又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$,则 $\tan A=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$,选 D.

5 D 【解析】因为 a,b,c 为连续的三个正整数,且 $A>B>C$,可得 $a=c+2,b=c+1$①. 又因为 $3b=20a\cos A$,由余弦定理可知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,则 $3b=20a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$②,联立①②,化简可得 $7c^2-13c-60=0$,解得 $c=4$ 或 $c=-\frac{15}{7}$(舍去),则 $a=6,b=5$. 又由正弦定理可得,$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=6:5:4$. 故选 D.

6 A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+(c+b)(c-b)}{2ac}$,

$\because a=\sqrt{3},b+c=4,\angle B=30°,\therefore\frac{3+4(c-b)}{2\sqrt{3}c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $3+4(c-b)=3c,3+c=4b$,结合 $b+c=4$ 解得 $c=\frac{13}{5}$. $\therefore$ 选 A.

7 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】$\because\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$,$\therefore C=135°$,为钝角,$\therefore c=1$.

$\because 0<\tan B<\tan A$,$\therefore A,B$ 均为锐角且 $B<A$,$\therefore$ 最短边为 b,

由 $\tan B=\frac{1}{3}$,得 $\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$,由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得

$b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{1\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8 15 【解析】如题图所示,设 $AD=x$ 千米,$AC=y$ 千米,$\because\angle BAC=20°+40°=60°$,$\therefore$ 在 $\triangle ACD$ 中,有 $x^2+y^2-2xy\cos60°=21^2$,即 $x^2+y^2-xy=441$①.

而在 $\triangle ABC$ 中,$(x+20)^2+y^2-2(x+20)y\cos60°=31^2$,即 $x^2+y^2-xy+40x-20y=561$ ②.

②-①得 $y=2x-6$,代入①得 $x^2-6x-135=0$,解得 $x=15$,即此人还需走 15 千米才能到达 A 城.

9 $\sqrt{3}$ $(4,\sqrt{6}]$ 【解析】由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

$\because b^2+ac=a^2+c^2\geqslant 2ac$,$\therefore ac\leqslant 4$,当且仅当 $a=c$ 时等号成立.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A,c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$,

则 $\triangle ABC$ 的周长为 $L=a+b+c=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]+2=4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$,$\therefore\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,

$\therefore\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

$\therefore 4<4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+2\leqslant 6$,

$\therefore\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $(4,6]$.

10 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ 【解析】因为 $4\sin^2\frac{A+B}{2}-\cos2C=\frac{7}{2}$,

所以 $2[1-\cos(A+B)]-2\cos^2C+1=\frac{7}{2}$,

$2+2\cos C-2\cos^2C+1=\frac{7}{2}$,

即 $\cos^2C-\cos C+\frac{1}{4}=0$,解得 $\cos C=\frac{1}{2}$.

由余弦定理得 $\cos C=\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-7}{2ab}$,即 $ab=a^2+b^2-7\geqslant 2ab-7$,所以 $ab\leqslant 7$(当且仅当 $a=b=\sqrt{7}$ 时,"="成立).

从而 $S=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant\frac{1}{2}\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$,即 S 的最大值为 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

11 ①②③ 【解析】①由 $ab>c^2$,得 $-c^2>-ab$,由余弦定理可知 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{2ab-ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,因为 $C\in(0,\pi)$,函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数,所以 $C<\frac{\pi}{3}$,即①正确.

②由余弦定理可知 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>$

$\dfrac{a^2+b^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}=\dfrac{4(a^2+b^2)-(a+b)^2}{8ab}=\dfrac{3(a^2+b^2)-2ab}{8ab}\geqslant\dfrac{4ab}{8ab}=\dfrac{1}{2}$，所以 $C<\dfrac{\pi}{3}$，即②正确.

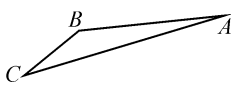
③若 C 是直角或钝角，则 $a^2+b^2\leqslant c^2$，即 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2\leqslant1$，而 $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\in(0,1)$，而函数 $y=a^x(0<a<1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^3+\left(\dfrac{b}{c}\right)^3<\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2\leqslant1$ 与 $a^3+b^3=c^3$ 矛盾，所以假设不成立，所以 $C<\dfrac{\pi}{2}$，即③正确.

④因为 $(a+b)c<2ab$，所以 $c<\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，即 $ab>c^2$，转化为命题①，故④错误.

⑤因为 $(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$，所以 $c^2<\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\leqslant\dfrac{2a^2b^2}{2ab}=ab$，即 $ab>c^2$，转化为命题①，故⑤错误.

12【解析】(1)在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos A=\dfrac{12}{13}$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\sin C=\dfrac{4}{5}$.

从而 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$.



第 12 题图

由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，得 $AB=\dfrac{AC}{\sin B}\times\sin C=\dfrac{1260}{\frac{63}{65}}\times\dfrac{4}{5}=1040(\mathrm{m})$.

所以索道 AB 的长为 1040m.

(2)假设乙出发 t 分钟后，甲、乙两游客距离为 d，此时，甲行走了 $(100+50t)$m，乙距离 A 处 $130t$m，所以由余弦定理得

$d^2=(100+50t)^2+(130t)^2-2\times130t\times(100+50t)\times\dfrac{12}{13}=200(37t^2-70t+50)$，

因 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{1040}{130}$，即 $0\leqslant t\leqslant8$，故当 $t=\dfrac{35}{37}$(min)时，甲、乙两游客距离最短.

(3)由正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，得 $BC=\dfrac{AC}{\sin B}\times\sin A=\dfrac{1\,260}{\frac{63}{65}}\times\dfrac{5}{13}=500(\mathrm{m})$. 乙从 B 出发时，甲已走了 $50\times(2+8+1)=550(\mathrm{m})$，还需走 710m 才能到达 C.

设乙步行的速度为 vm/min，由题意得 $-3\leqslant\dfrac{500}{v}-\dfrac{710}{50}\leqslant3$，解得 $\dfrac{1250}{43}\leqslant v\leqslant\dfrac{625}{14}$，所以为使两位游客在 C 处互相等待的时间不超过 3 分钟，乙步行的速度应控制在 $\left[\dfrac{1250}{43},\dfrac{625}{14}\right]$(单位：m/min)范围内.

13【解析】(1)$\because$ $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore$ $-\cos B\cos C+\sin B\sin C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，

即 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ $\cos(B+C)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because$ $A+B+C=180°$，$\therefore$ $\cos(B+C)=-\cos A$，

$\therefore$ $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<A<\pi$，$\therefore$ $A=30°$.

(2)选择①②，可确定 $\triangle ABC$.

$\because$ $A=30°$，$a=1$，$2c-(\sqrt{3}+1)b=0$，

由余弦定理得 $1^2=b^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}b\right)^2-2b\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}b\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得 $b^2=2$，$\therefore$ $b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

14【解析】(1)$\because$ $f(x)=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1-m=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1-m$，

$\therefore$ $m=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有解.

又$\because$ $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ $\dfrac{\pi}{6}\leqslant2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，$\therefore$ $-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，$\therefore$ $0\leqslant2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1\leqslant3$，

$\therefore$ $0\leqslant m\leqslant3$，即 m 的取值范围是 $[0,3]$.

(2)$\because$ $m=3$，$\therefore$ $f(A)=2\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)-2=-1$，即 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

又$\because$ $0<A<\pi$，$\therefore$ $\dfrac{\pi}{6}<2A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$，$\therefore$ $2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc\geqslant(b+c)^2-\dfrac{3}{4}(b+c)^2=\dfrac{1}{4}(b+c)^2$，

$\because b+c=2, \therefore a^2 \geqslant 1, a \geqslant 1$,当且仅当 $b=c=1$ 时,a 取得最小值 1.

专题 22 数列

5 年高考真题演练

1 B 【解析】已知 $b_1>c_1, b_1+c_1=2a_1, a_2=a_1$,故 $b_2=\frac{c_1+a_1}{2}=\frac{3}{4}c_1+\frac{1}{4}b_1<b_1, c_2=\frac{b_1+a_1}{2}=\frac{3}{4}b_1+\frac{1}{4}c_1>c_1, b_2+c_2=a_1+\frac{b_1+c_1}{2}=2a_1, b_2-c_2=\frac{c_1-b_1}{2}<0$,即 $b_2<c_2$, $b_2c_2=\left(\frac{3}{4}c_1+\frac{1}{4}b_1\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b_1+\frac{1}{4}c_1\right)=\frac{3}{16}(b_1+c_1)^2+\frac{1}{4}b_1c_1>b_1c_1$. 又 $a_3=a_2=a_1$,所以 $b_3=\frac{c_2+a_2}{2}=\frac{3}{4}c_2+\frac{1}{4}b_2<b_2, c_3=\frac{b_2+a_2}{2}=\frac{3}{4}b_2+\frac{1}{4}c_2>c_2, b_3+c_3=\frac{c_2+a_2}{2}+\frac{b_2+a_2}{2}=2a_2=2a_1, b_3-c_3=\frac{3}{4}c_2+\frac{1}{4}b_2-\left(\frac{3}{4}b_2+\frac{1}{4}c_2\right)=\frac{c_2-b_2}{2}>0$,即 $b_3>c_3$, $b_3c_3=\left(\frac{3}{4}c_2+\frac{1}{4}b_2\right)\left(\frac{3}{4}b_2+\frac{1}{4}c_2\right)=\frac{3}{16}(b_2+c_2)^2+\frac{1}{4}b_2c_2>b_2c_2>b_1c_1$. 又 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $S_n=\sqrt{p(p-a_n)(p-b_n)(p-c_n)}=\sqrt{p(p-a_n)[p^2-(b_n+c_n)p+b_nc_n]}$,其中 $p=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n)$, $p(p-a_n)$ 和 $p^2-(b_n+c_n)p$ 都为定值,b_nc_n 逐渐递增,所以数列 $\{S_n\}$ 为递增数列,选 B.

2 A **3** A **4** 4

5 2 n^2 【解析】依题意可知,数列 $\{a_n\}$ 是 1,4,9,16,…,所以满足 $a_m<5$ 的只有 a_1 和 a_2 两个,故 $(a_5)^*=2$;数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 0,1,1,1,2,2,2,2,2,…,由此规律可知数列 $\{(a_n)^*\}$ 有 $2n+1$ 个 n,故 $[(a_n)^*]^*=1+3+\cdots+[2(n-1)+1]=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

6 $(-2)^{n-1}$ 【解析】当 $n=1$ 时,由已知 $S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$,得 $a_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$,即 $a_1=1$;当 $n\geqslant 2$ 时,由已知得到 $S_{n-1}=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$,所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}a_{n-1}$,所以 $a_n=-2a_{n-1}$,所以数列 $\{a_n\}$ 为以 1 为首项,以 -2 为公比的等比数列,所以 $a_n=(-2)^{n-1}$.

7 $\frac{1}{2}$ 【解析】将 $a_8=2$ 代入 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$,可求得 $a_7=\frac{1}{2}$;再将 $a_7=\frac{1}{2}$ 代入 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$,可求得 $a_6=-1$;再将 $a_6=-1$ 代入 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$,可求得 $a_5=2$;由此可以推出数列 $\{a_n\}$ 是一个周期数列,且周期为 3,所以 $a_1=a_7=\frac{1}{2}$.

8 【解析】(1) 由题设,$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1, a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$.

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$.

由于 $a_{n+1}\neq 0$,所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2) 由题设,$a_1=1, a_1a_2=\lambda S_1-1$,可得 $a_2=\lambda-1$.

由(1)知,$a_3=\lambda+1$.

令 $2a_2=a_1+a_3$,解得 $\lambda=4$.

故 $a_{n+2}-a_n=4$,由此可得

$\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1,公差为 4 的等差数列,$a_{2n-1}=4n-3$;

$\{a_{2n}\}$ 是首项为 3,公差为 4 的等差数列,$a_{2n}=4n-1$.

所以 $a_n=2n-1, a_{n+1}-a_n=2$.

因此存在 $\lambda=4$,使得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	D	B	A	B
题号	6	7	8	9	
答案	B	D	D	B	

1 D **2** D **3** B

4 A 【解析】因为 $a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

从而有 $a_n=a_{n-1}+\ln\frac{n}{n-1}$,

$a_{n-1}=a_{n-2}+\ln\frac{n-1}{n-2}$,

… …

$a_2=a_1+\ln 2$.

累加得 $a_{n+1}=a_1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\right)=2+\ln(n+1)$.

$\therefore a_n=2+\ln n$,故应选 A.

5 B 【解析】$\because S_n=n^2-9n$,

$\therefore n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-10$.

$a_1=S_1=-8$ 适合上式,$\therefore a_n=2n-10(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore 5<2k-10<8$,得 $7.5<k<9$,$\therefore k=8$.

6 B 【解析】$a_2=\frac{0-\sqrt{3}}{0+1}=-\sqrt{3}, a_3=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-3+1}=\sqrt{3}$,

$a_4=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+1}=0$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的一个循环数列.

$\therefore a_{20}=a_{3\times6+2}=a_2=-\sqrt{3}$.

7 **D** 【解析】由已知,整理得$(n+1)a_n=na_{n+1}$,

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$,$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是常数列.

且$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$,$\therefore a_n=n$.

8 **D** 【解析】由于 $x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}$,令 $x_{n+1}-x_n=0$ 得 $x_n=\sqrt{3}$,所以当 $x_1=\sqrt{3}$ 时,数列$\{x_n\}$既不是单调递增数列,也不是单调递减数列. 选 D.

9 **B** 【解析】由 $B_n(n,0)$ 得 $C_n\left(n,n+\frac{1}{n}\right)$,令 $x+\frac{1}{x}=n+\frac{1}{n}$,即 $x^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)x+1=0$,得 $x=n$ 或 $x=\frac{1}{n}$,所以 $D_n\left(\frac{1}{n},n+\frac{1}{n}\right)$. 所以矩形 $A_nB_nC_nD_n$ 的周长 $a_n=2\left(n-\frac{1}{n}\right)+2\left(n+\frac{1}{n}\right)=4n$,则 $a_2+a_3+\cdots+a_{10}=4(2+3+\cdots+10)=216$.

10 $(-3,+\infty)$ **11** $\begin{cases}3 & (n=1),\\ 2^n & (n\geqslant2)\end{cases}$

12 108 【解析】由数阵可知,第 n 行共有 n 个数.

设 a_n 为第 n 个正整数,则 $a_1=1,a_2=2,a_n=n$,

其前 n 行的项数和为 S_n,

则 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

令 $n=14$,则 $S_{14}=7\times15=105$,

$\therefore$ 第 14 行的从左向右的最后 1 个数是 105,

第 15 行从左向右的第 1 个数是 106,第 3 个数为 108.

13 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 【解析】$a_n=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{1+a_{n-1}^2}}$,$a_1=1$,

$\therefore \frac{1}{a_n^2}=\frac{1+a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{1}{a_{n-1}^2}+1$,$a_n>0$,即$\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1$.

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列.

$\therefore \frac{1}{a_n^2}=1+(n-1)\times1=n$. $\therefore a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

14 ②③④ 【解析】①中取 1 和 3 两个元素验证,发现不具有性质 P.

②显然满足题意.

③若数列 A 具有性质 P,则 $a_n+a_n=2a_n$ 与 $a_n-a_n=0$ 两数中至少有一个是该数列中的一项.

$\because 0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$,$n\geqslant3$,

而 $2a_n$ 不是该数列中的项,$\therefore$ 0 是该数列中的项,

$\therefore a_1=0$.

③正确.

④数列 a_1,a_2,a_3 是等差数列,经验证符合题意.

故答案为②③④.

15 20 【解析】由每个数的规律可得整个三角形数表的变化规律,进而可得数列指定的项.

由题意可知,第 1 行的数为:2^0+2^1,

第二行的数为:$2^0+2^2,2^1+2^2$,

第三行的数为:$2^0+2^3,2^1+2^3,2^2+2^3$,

故第四行的数为:$2^0+2^4,2^1+2^4,2^2+2^4,2^3+2^4$,

故可得第四行的第三个数为 $b_{43}=2^2+2^4=20$.

16 36 3985 【解析】设 $f(k)=2k-1$,则数列为 1,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1…. $\therefore$ 前 20 项中共有 16 个 2,4 个 1,$S_{20}=1\times4+2\times16=36$.

记第 k 个 1 与其后面的 $2k-1$ 个 2 组成第 k 组,其组内元素个数记为 b_k,则 $b_k=2k$,$b_1+b_2+\cdots+b_n=2+4+\cdots+2n=n(n+1)<2015$.

而 $44\times45=1980<2015$,$45\times46=2070>2015$,故 $n=44$,即前 2015 项中有 45 个 1 以及 1970 个 2,

$\therefore S_{2015}=45+1970\times2=3985$.

专题 23 等差数列

5 年高考真题演练

1 **A**

2 **C** 【解析】由 $S_{m-1}=-2,S_m=0,S_{m+1}=3$,得 $a_m=S_m-S_{m-1}=2$,$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$,所以等差数列的公差为 $d=a_{m+1}-a_m=3-2=1$,

由$\begin{cases}a_m=a_1+(m-1)d=2,\\ S_m=a_1m+\frac{1}{2}m(m-1)d=0\end{cases}$

得$\begin{cases}a_1+m-1=2,\\ a_1m+\frac{1}{2}m(m-1)=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-2,\\ m=5,\end{cases}$选 C.

3 **D** 【解析】设 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$,它是递增数列,所以 p_1 为真命题;若 $a_n=3n-12$,则满足已知,但 $na_n=3n^2-12n$ 并非递增数列,所以 p_2 为假命题;若 $a_n=n+1$,则满足已知,但$\frac{a_n}{n}=1+\frac{1}{n}$是递减数列,所以 p_3 为假命题;设 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$,则 $a_n+3nd=4dn+a_1-d$,它是递增数列,所以 p_4 为真命题.

4 **C** **5** **D** **6** $-1<d<-\frac{7}{8}$ **7** 64

8 -49 【解析】由已知$\begin{cases}S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=0,\\ S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d=25,\end{cases}$解得 $a_1=-3$,$d=\frac{2}{3}$,那么 $nS_n=n^2a_1+\frac{n^2(n-1)}{2}d=\frac{n^3}{3}-\frac{10n^2}{3}$. 由于函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{10x^2}{3}$ 在 $x=\frac{20}{3}$ 处取得极小值,因而检验 $n=6$ 时,$6S_6=-48$,而 $n=7$ 时,

$7S_7=-49$.

9【解析】(1)由 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$,得 $a_1=S_1=1$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为:$a_n=3n-2$.

(2)要使得 a_1,a_n,a_m 成等比数列,只需要 $a_n^2=a_1\cdot a_m$,

即$(3n-2)^2=1\cdot(3m-2)$,即 $m=3n^2-4n+2$,而此时 $m\in\mathbf{N}^*$,且 $m>n$.

所以对任意的 $n>1$,都存在 $m\in\mathbf{N}^*$,使得 a_1,a_n,a_m 成等比数列.

10【解析】(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,依题意,$2,2+d,2+4d$ 成等比数列,故有$(2+d)^2=2(2+4d)$,化简得 $d^2-4d=0$,解得 $d=0$ 或 $d=4$.

当 $d=0$ 时,$a_n=2$;当 $d=4$ 时,$a_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$,从而得数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2$ 或 $a_n=4n-2$.

(2)当 $a_n=2$ 时,$S_n=2n$. 显然 $2n<60n+800$,

此时不存在正整数 n,使得 $S_n>60n+800$ 成立.

当 $a_n=4n-2$ 时,$S_n=\frac{n[2+(4n-2)]}{2}=2n^2$.

令 $2n^2>60n+800$,即 $n^2-30n-400>0$,解得 $n>40$ 或 $n<-10$(舍去),此时存在正整数 n,使得 $S_n>60n+800$ 成立,n 的最小值为 41.

综上,当 $a_n=2$ 时,不存在满足题意的 n;当 $a_n=4n-2$ 时,存在满足题意的 n,其最小值为 41.

11【解析】(1)由题意得 $5a_3\cdot a_1=(2a_2+2)^2$,即 $d^2-3d-4=0$.

故 $d=-1$ 或 $d=4$.

所以 $a_n=-n+11,n\in\mathbf{N}^*$ 或 $a_n=4n+6,n\in\mathbf{N}^*$.

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 因为 $d<0$,由(1)得 $d=-1,a_n=-n+11$.

当 $n\leqslant 11$ 时,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=S_n=-\frac{1}{2}n^2+\frac{21}{2}n$.

当 $n\geqslant 12$ 时,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=-S_n+2S_{11}=\frac{1}{2}n^2-\frac{21}{2}n+110$.

综上所述,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}n^2+\frac{21}{2}n,n\leqslant 11,\\ \frac{1}{2}n^2-\frac{21}{2}n+110,n\geqslant 12.\end{cases}$$

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	C	B	A
题号	6	7	8	9	10
答案	B	A	D	B	A

1 B **2** B **3** C **4** B **5** A

6 B 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的首项和公差分别为 a_1,d,由等差数列的性质可得 $a_m-a_k=(m-k)d=\frac{1}{k}-\frac{1}{m}=\frac{m-k}{mk}$,则 $d=\frac{1}{mk}$,又 $a_m=a_1+(m-1)d=\frac{1}{k}$,将 $d=\frac{1}{mk}$代入,可得 $a_1=\frac{1}{mk}$,进而由等差数列的前 n 项和公式可得 $S_{mk}=mka_1+\frac{mk(mk-1)}{2}d$,将 $a_1=d=\frac{1}{mk}$代入可得 $S_{mk}=\frac{mk+1}{2}$.

7 A 【解析】圆的标准方程为$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$,
$\because$ 圆心为$\left(\frac{5}{2},0\right)$,半径 $r=\frac{5}{2}$,则最大的弦为直径,即 $a_n=5$,当圆心到弦的距离为$\frac{3}{2}$,即过圆心向弦作垂线,点$\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$为垂足时,弦长最小为 4,即 $a_1=4$,$\therefore$ 由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得 $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{5-4}{n-1}=\frac{1}{n-1}$,$\because \frac{1}{6}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}$,$\therefore \frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{n-1}\leqslant\frac{1}{3}$,即 $3\leqslant n-1\leqslant 6$,$\therefore 4\leqslant n\leqslant 7$,即 $n=4,5,6,7$.

8 D **9** B

10 A 【解析】$a_1+a_{2015}=2a_{1008}>0\Rightarrow a_1>-a_{2015}\Rightarrow f(a_1)>f(-a_{2015})=-f(a_{2015})\Rightarrow f(a_1)+f(a_{2015})>0$,同理 $f(a_2)+f(a_{2014})>0,f(a_3)+f(a_{2013})>0,\cdots$,$f(a_{1007})+f(a_{1009})>0$,又 $a_{1008}>0$,$\therefore f(a_{1008})>f(0)=0$,以上各式相加得 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2014})+f(a_{2015})>0$.

11 $\frac{3}{4}$

12 5 【解析】由已知可得 $a_n=4n-3$,对数列$\{S_{2n+1}-S_n\}$,有$(S_{2n+3}-S_{n+1})-(S_{2n+1}-S_n)=\frac{1}{8n+5}+\frac{1}{8n+9}-\frac{1}{4n+1}<0$,因此数列$\{S_{2n+1}-S_n\}$单调递减,$\therefore \frac{m}{15}\geqslant(S_{2n+1}-S_n)_{\max}=S_3-S_1=\frac{14}{45}$,即 $m\geqslant\frac{14}{3}$,故正整数 m 的最小值为 5.

13 640 【解析】由已知 $S_n\sqrt{S_{n-1}}-S_{n-1}\sqrt{S_n}=2\sqrt{S_nS_{n-1}}$可得,$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2$,$\therefore\{\sqrt{S_n}\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,故 $\sqrt{S_n}=2n-1$,$S_n=(2n-1)^2$,$\therefore a_{81}=S_{81}-S_{80}=161^2-159^2=640$.

14 6 【解析】设该数列的公差为 d,则 $a_4+a_6=2a_1+8d=2\times(-11)+8d=-6$,解得 $d=2$.

所以 $S_n=-11n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-12n=(n-$

6)$^2-36$,所以当 $n=6$ 时,S_n 取最小值.

15 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由等差数列的性质可知 $a_4+a_6=2a_5$,故 $a_5=\frac{\pi}{12}$,所以 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$,$\cos S_9=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16【解析】(1)由题意,设等差数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d,d\neq0$.

由 $a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2$,知 $2a_1+5d=0$. ①

又因为 $S_7=7$,所以 $a_1+3d=1$. ②

由①②,可得 $a_1=-5,d=2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=2n-7$,

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-6n$.

(2)因为 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}=\frac{(a_{m+2}-4)(a_{m+2}-2)}{a_{m+2}}=a_{m+2}-6+\frac{8}{a_{m+2}}$ 为数列$\{a_n\}$中的项,故 $\frac{8}{a_{m+2}}$ 为整数,又由(1)知,a_{m+2} 为奇数,所以 $a_{m+2}=2m-3=\pm1$,即 $m=1,2$.

经检验,符合题意的正整数只有 $m=2$.

17【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

因为 $\begin{cases}a_7=4,\\a_{19}=2a_9,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1+6d=4,\\a_1+18d=2(a_1+8d).\end{cases}$

解得 $a_1=1,d=\frac{1}{2}$,所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

(2) $b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$,所以 $S_n=\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$.

18【解析】(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$.

因为 a_1,a_3,a_9 成等比数列,所以 $a_3^2=a_1a_9$,即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$,所以 $d^2=a_1d$.

因为 $d>0$,所以 $a_1=d$. ①

因为 $S_5=a_5^2$,

所以 $5a_1+\frac{5\times4}{2}\cdot d=(a_1+4d)^2$. ②

由①②解得 $a_1=d=\frac{3}{5}$. 所以 $a_n=\frac{3}{5}+(n-1)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $b_n=\frac{n^2+n+1}{\frac{3}{5}n\cdot\frac{3}{5}(n+1)}=\frac{25}{9}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{25}{9}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{99}=\frac{25}{9}\left(1+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{25}{9}\times\left(99+1-\frac{1}{100}\right)=275+2.75=277.75$.

专题 24 等比数列

5 年高考真题演练

1 C **2** A **3** D **4** C **5** D

6 C 【解析】设等比数列的公比为 q.

则 $S_2=a_1+a_2=3,S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(1+q^2)\cdot(a_1+a_2)=(1+q^2)\times3=15$,

解得 $q^2=4$.

故 $S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(1+q^2+q^4)\cdot(a_1+a_2)=(1+4+4^2)\times3=63$. 故选 C.

7【解析】(1)因为$\{a_n\}$是首项 $a_1=1$,公差 $d=2$ 的等差数列,所以

$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

故 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2$.

(2)由(1)知 $a_4=7,S_4=16$. 因为 $q^2-(a_4+1)q+S_4=0$,即 $q^2-8q+16=0$,

所以$(q-4)^2=0$,从而 $q=4$.

又因 $b_1=2$,$\{b_n\}$是公比 $q=4$ 的等比数列,所以

$b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot4^{n-1}=2^{2n-1}$.

从而$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2}{3}(4^n-1)$.

8【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意得

$d=\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{12-3}{3}=3$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n(n=1,2,\cdots)$.

设等比数列$\{b_n-a_n\}$的公比为 q,由题意得

$q^3=\frac{b_4-a_4}{b_1-a_1}=\frac{20-12}{4-3}=8$,解得 $q=2$.

所以 $b_n-a_n=(b_1-a_1)q^{n-1}=2^{n-1}$.

从而 $b_n=3n+2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$.

(2)由(1)知 $b_n=3n+2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$.

数列$\{3n\}$的前 n 项和为 $\frac{3}{2}n(n+1)$,数列$\{2^{n-1}\}$的前 n 项和为 $1\times\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

所以,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $\frac{3}{2}n(n+1)+2^n-1$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	A	A	A	B
题号	6	7			
答案	B	A			

1 B **2** A **3** A **4** A

5 B 【解析】$\because a_4a_{14}=(2\sqrt{2})^2=8$,即 $a_4a_{14}=a_9^2=8$,$\therefore a_9=2\sqrt{2}$. 设数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $2a_7+a_{11}=\frac{2a_9}{q^2}+a_9q^2\geqslant 2\sqrt{\frac{2a_9}{q^2}\cdot a_9q^2}=2\sqrt{2}a_9=8$,当且仅当$\frac{2a_9}{q^2}=a_9q^2$,即 $q^4=2$ 时取等号.

6 B 【解析】设公比为 q,若 $q=1$,则$\frac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故 $q\neq 1$.

$\because \frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$. $\therefore \frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\frac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$.

7 A 【解析】①中,$\begin{cases}(a_{99}-1)(a_{100}-1)<0,\\ a_{99}a_{100}>1,\\ a_1>1\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a_{99}>1,\\ 0<a_{100}<1\end{cases}\Rightarrow q=\frac{a_{100}}{a_{99}}\in(0,1)$,$\therefore$ ①正确.

②中,$\left.\begin{matrix}a_{99}a_{101}=a_{100}^2,\\ 0<a_{100}<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_{99}a_{101}<1$,$\therefore$ ②正确.

③中,$\left.\begin{matrix}T_{100}=T_{99}a_{100},\\ 0<a_{100}<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow T_{100}<T_{99}$,$\therefore$ ③错误.

④中,$T_{198}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{198}=(a_1a_{198})\cdot\cdots\cdot(a_2a_{197})\cdot\cdots\cdot(a_{99}a_{100})=(a_{99}a_{100})^{99}>1$,

$T_{199}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{198}a_{199}=(a_1a_{199})\cdot\cdots\cdot(a_{99}a_{101})a_{100}=a_{100}^{199}<1$,$\therefore$ ④正确.

8 $\frac{3}{2^n}$ 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q>0$.

由 $a_5^2=a_3a_7$ 得 $a_4^2=4a_3a_7=4a_5^2=4a_4^2q^2$,$\therefore q^2=\frac{1}{4}$,$q=\frac{1}{2}$,又 $a_1+2a_2=a_1+2a_1q=3$,即 $2a_1=3$,

$\therefore a_1=\frac{3}{2}$,$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2^n}$.

9 1007 或 1008 【解析】由题可知 $a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_{2016}=a_{2016}$,故 $a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_{2015}=1$,由于$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列且 $a_1>1$,所以 $a_{1008}=1$,公比 $0<q<1$,所以 $a_{1007}>1$ 且 $0<a_{1009}<1$,故当数列$\{a_n\}$的前 n 项的乘积取最大值时 n 的值为 1007 或 1008.

10 $\frac{55}{4}$ 【解析】由各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1a_7=4$,$a_6=8$,可设公比为 q 且 $q>0$,于是 $\begin{cases}a_1^2q^6=4,\\ a_1q^5=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ q=2.\end{cases}$ $\therefore a_n=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$.

$\because f'(x)=a_1+2a_2x+3a^3x^2+\cdots+10a_{10}x^9$,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$b_n=na_n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\times 2^{n-3}\times 2^{1-n}=\frac{n}{4}$,

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{10}{4}=\frac{10\times 11}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{55}{4}$.

11 【解析】(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,因为 S_3+a_3,S_5+a_5,S_4+a_4 成等差数列,所以 $S_5+a_5-S_3-a_3=S_4+a_4-S_5-a_5$,即 $4a_5=a_3$,于是 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$. 又$\{a_n\}$不是递减数列且 $a_1=\frac{3}{2}$,所以 $q=-\frac{1}{2}$,故等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}$.

(2)由(1)得 $S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=$

$\begin{cases}1+\frac{1}{2^n},n\text{ 为奇数},\\ 1-\frac{1}{2^n},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

当 n 为奇数时,S_n 随 n 的增大而减小,

所以 $1<S_n\leqslant S_1=\frac{3}{2}$,故

$0<S_n-\frac{1}{S_n}\leqslant S_1-\frac{1}{S_1}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

当 n 为偶数时,S_n 随 n 的增大而增大,

所以$\frac{3}{4}=S_2\leqslant S_n<1$,故

$0>S_n-\frac{1}{S_n}\geqslant S_2-\frac{1}{S_2}=\frac{3}{4}-\frac{4}{3}=-\frac{7}{12}$.

综上,对于 $n\in\mathbf{N}^*$,总有 $-\frac{7}{12}\leqslant S_n-\frac{1}{S_n}\leqslant\frac{5}{6}$.

所以数列$\{T_n\}$的最大项的值为$\frac{5}{6}$,最小项的值为 $-\frac{7}{12}$.

12 【解析】(1)假设存在实数 λ,使数列$\{b_n\}$为等比数列.

设$\frac{b_n}{b_{n-1}}=q(n\geqslant 2)$,则 $a_{n+1}+\lambda a_n=q(a_n+\lambda a_{n-1})$,

即 $a_{n+1}=(q-\lambda)a_n+q\lambda a_{n-1}$.

与已知 $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$ 比较,令 $\begin{cases}q-\lambda=1,\\q\lambda=2,\end{cases}$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$,

所以存在实数 λ,使数列 $\{b_n\}$ 为等比数列.

当 $\lambda=1$ 时,$q=2$,$b_1=4$,则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 4、公比为 2 的等比数列;

当 $\lambda=-2$ 时,$q=-1$,$b_1=1$,则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1、公比为 -1 的等比数列.

(2)由(1)知当 $\lambda=1$ 时,$b_n=a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$ ①;

当 $\lambda=-2$ 时,$b_n=a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-1}$ ②.

联立①②,解得 $a_n=\frac{1}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$.

则 $S_n=\frac{1}{3}[(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n]=\frac{1}{3}\left\{\frac{4(1-2^n)}{1-2}+\frac{(-1)[1-(-1)^n]}{1-(-1)}\right\}=\frac{1}{3}\left[(2^{n+2}-4)+\frac{(-1)^n-1}{2}\right]=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+2}+\frac{1}{6}\cdot(-1)^n-\frac{3}{2}$.

13【解析】(1)$\because b_n=a_n+n^2$,

$\therefore b_{n+1}=a_{n+1}+(n+1)^2=2a_n+(n+1)^2-4(n+1)+2+(n+1)^2=2a_n+2n^2=2b_n(n\geqslant 2)$.

由 $a_1=2a+1$,得 $a_2=4a$,$b_2=a_2+4=4a+4$,

$\because a\neq -1$,$\therefore b_2\neq 0$,即 $\{b_n\}$ 从第 2 项起是以 2 为公比的等比数列.

(2)由(1)知 $b_n=\begin{cases}a,n=1\\(4a+4)\cdot 2^{n-2},n\geqslant 2\end{cases}$

$\therefore S_n=a+\frac{(4a+4)(2^{n-1}-1)}{2-1}=-3a-4+(2a+2)\cdot 2^n$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{(2a+2)\cdot 2^n-3a-4}{(2a+2)\cdot 2^{n-1}-3a-4}=2+\frac{3a+4}{(a+1)\cdot 2^{n-1}-3a-4}$.

$\because \{S_n\}$ 是等比数列,$\therefore \frac{S_n}{S_{n-1}}(n\geqslant 2)$ 是常数,

$\therefore 3a+4=0$,得 $a=-\frac{4}{3}$.

(3)由(1)知当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=(4a+4)2^{n-2}=(a+1)\cdot 2^n$,

$\therefore a_n=\begin{cases}2a+1,(n=1)\\(a+1)\cdot 2^n-n^2.(n\geqslant 2)\end{cases}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为 $2a+1,4a,8a-1,16a,32a+7\cdots\cdots$,

显然最小项是前三项中的一项.

当 $a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时,最小项为 $8a-1$;当 $a=\frac{1}{4}$ 时,最小项为 $4a$ 或 $8a-1$;

当 $a\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 时,最小项为 $4a$;当 $a=\frac{1}{2}$ 时,最小项为 $4a$ 或 $2a+1$;

当 $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时,最小项为 $2a+1$.

14【解析】(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\lambda a_1-1$,得 $a_1=\frac{1}{\lambda-1}$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(\lambda a_n-1)-(\lambda a_{n-1}-1)$,

所以 $a_n=\frac{\lambda}{\lambda-1}a_{n-1}$.

所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{\lambda-1}$ 为首项,$\frac{\lambda}{\lambda-1}$ 为公比的等比数列.

所以公比 $f(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda-1}=1+\frac{1}{\lambda-1}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 和 $(1,2]$ 内分别递减,

所以 $f(\lambda)\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

(2)由(1)知,$a_n=\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$,

当 $\lambda=2$ 时,$a_n=2^{n-1}$.

所以 $b_{n+1}-b_n=a_n=2^{n-1}$,叠加可得 $b_n=2^{n-1}+2$.

由 $\log_2(b_n-2)<\frac{3}{16}n^2+t$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

可得 $n-1<\frac{3}{16}n^2+t$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

即 $t>\left(-\frac{3}{16}n^2+n-1\right)_{\max}$,

而 $-\frac{3}{16}n^2+n-1=-\frac{3}{16}\left(n-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$,

所以,当 $n=3$ 时,$\left(-\frac{3}{16}n^2+n-1\right)_{\max}=\frac{5}{16}$,

所以 $t>\frac{5}{16}$.

▶ 专题 25 数列的综合与应用

5 年高考真题演练

1 A 【解析】由题意知,$a_1+a_2+a_3+a_4=2$,$a_5+a_6+a_7+a_8=2$,$\cdots$,$a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}=2$,$k\in\mathbf{N}$,故 $S_{2\,012}=503\times 2=1\,006$.

2 1 830 【解析】由 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$ 得

$a_{n+2}=(-1)^n a_{n+1}+2n+1=(-1)^n[(-1)^{n-1}a_n+2n-1]+2n+1=-a_n+(-1)^n(2n-1)+2n+1$,

即 $a_{n+2}+a_n=(-1)^n(2n-1)+2n+1$, ①

也有 $a_{n+3}+a_{n+1}=-(-1)^n(2n+1)+2n+3$, ②

①②两式相加得 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=-2(-1)^n+4n+4$.

设 k 为整数,则 $a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}=-2(-1)^{4k+1}+4(4k+1)+4=16k+10$,

于是 $S_{60}=\sum_{k=0}^{14}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4})=\sum_{k=0}^{14}(16k+10)=1\ 830$.

3 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 【解析】根据题目条件可知,$c-a=x(b-a)$,$b-c=b-a-(c-a)=(1-x)(b-a)$,最佳乐观系数满足:$c-a$ 是 $b-c$ 和 $b-a$ 的等比中项,所以有$[x(b-a)]^2=(1-x)(b-a)(b-a)$,又因为$(b-a)>0$,所以 $x^2=1-x$,即 $x^2+x-1=0$,解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,又 $0<x<1$,所以 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4 2 000 【解析】当放在最左侧坑时,路程和为 $2\times(0+10+20+\cdots+190)$;当放在左侧第 2 个坑时,路程和为 $2\times(10+0+10+20+\cdots+180)$(减少了 360 米);当放在左侧第 3 个坑时,路程和为 $2\times(20+10+0+10+20+\cdots+170)$(减少了 320 米);依次进行,显然当放在中间的第 10、11 个坑时,路程和最小,为 $2\times(90+80+\cdots+0+10+20+\cdots+100)=2\ 000$(米).

5【解析】(1)由已知可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$,即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$.

所以$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是以$\frac{a_1}{1}=1$ 为首项,1 为公差的等差数列.

(2)由(1)得$\frac{a_n}{n}=1+(n-1)\cdot 1=n$,所以 $a_n=n^2$.

从而 $b_n=n\cdot 3^n$.

$S_n=1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n$,①

$3S_n=1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}$. ②

①-②得 $-2S_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{3\cdot(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{(1-2n)\cdot 3^{n+1}-3}{2}$.

所以 $S_n=\frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{4}$.

6【解析】(1)方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根为 2,3,由题意得 $a_2=2,a_4=3$.

设数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_4-a_2=2d$,故 $d=\frac{1}{2}$,

从而 $a_1=\frac{3}{2}$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}n+1$.

(2)设$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$的前 n 项和为 S_n,由(1)知$\frac{a_n}{2^n}=\frac{n+2}{2^{n+1}}$,则

$S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}+\frac{n+2}{2^{n+1}}$,

$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}+\frac{n+2}{2^{n+2}}$.

两式相减得

$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}$.

所以 $S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

7【解析】(1)由题意 $a_1a_2a_3\cdots a_n=(\sqrt{2})^{b_n}$,$b_3-b_2=6$,

知 $a_3=(\sqrt{2})^{b_3-b_2}=8$.

又由 $a_1=2$,得公比 $q=2$($q=-2$,舍去),

所以数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以,$a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}=(\sqrt{2})^{n(n+1)}$.

故数列$\{b_n\}$的通项为 $b_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)①由(1)知 $c_n=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $S_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

②因为 $c_1=0,c_2>0,c_3>0,c_4>0$;

当 $n\geqslant 5$ 时,

$c_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n(n+1)}{2^n}-1\right]$,

而$\frac{n(n+1)}{2^n}-\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}}>0$,

得$\frac{n(n+1)}{2^n}\leqslant\frac{5\times(5+1)}{2^5}<1$,

所以,当 $n\geqslant 5$ 时,$c_n<0$.

综上,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒有 $S_4\geqslant S_n$,故 $k=4$.

8【解析】(1)由 $S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n,n\in\mathbf{N}^*$,

取 $n=1,2$ 得$\begin{cases}a_1=2a_2-7,\\a_1+a_2=4a_3-20,\end{cases}$①

又 $S_3=15$,$\therefore a_1+a_2+a_3=15$,$\therefore a_3=15-(a_1+a_2)$. ②

联立①②解得 $a_1=3,a_2=5,a_3=7$.

(2)当 $n>1$ 时,由已知得$\begin{cases}S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n,\\S_{n-1}=2(n-1)a_n-3(n-1)^2-4(n-1),\end{cases}$

两式相减得 $2na_{n+1}=(2n-1)a_n+6n+1$,即 $2na_{n+1}-4n^2-6n=(2n-1)a_n-4n^2+1$,

即 $2n[a_{n+1}-(2n+3)]=(2n-1)[a_n-(2n+1)]$,

令 $b_n=a_n-(2n+1)$，则 $2nb_{n+1}=(2n-1)b_n$，③

由(1)知 $b_1=b_2=0$，则由③知 $b_n=0$，$\therefore a_n=2n+1$，且 $n=1$ 时也成立，

故 $a_n=2n+1,n\in\mathbf{N}^*$.

9【解析】(1)由题得，$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 6\\ \dfrac{x}{3}\leqslant 9\leqslant 3x\end{cases}\Rightarrow x\in[3,6]$.

(2)由题得，$\because \dfrac{1}{3}a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 3a_n$，且数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1$，

$\therefore \dfrac{1}{3}q^{n-1}\leqslant q^n\leqslant 3q^{n-1}$，$\therefore \begin{cases}q^{n-1}\left(q-\dfrac{1}{3}\right)\geqslant 0\\ q^{n-1}(q-3)\leqslant 0\end{cases}$，

$\therefore q\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$.

又$\because \dfrac{1}{3}S_n\leqslant S_{n+1}\leqslant 3S_n$，$\therefore$ 当 $q=1$ 时，$\dfrac{n}{3}\leqslant n+1\leqslant 3n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，满足题意.

当 $q\neq 1$ 时，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}\leqslant\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\leqslant 3\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

$\therefore$ ①当 $q\in\left[\dfrac{1}{3},1\right)$时，$\begin{cases}q^n(q-3)\geqslant -2\\ q^n(3q-1)\leqslant 2\end{cases}$，由单调性可得，$\begin{cases}q'(q-3)\geqslant -2\\ q'(3q-1)\leqslant 2\end{cases}$，解得，$q\in\left[\dfrac{1}{3},1\right)$.

②当 $q\in(1,3]$ 时，$\begin{cases}q^n(q-3)\leqslant -2\\ q^n(3q-1)\geqslant 2\end{cases}$，由单调性可得，$\begin{cases}q'(q-3)\leqslant -2\\ q'(3q-1)\geqslant 2\end{cases}$，解得，$q\in(1,2]$.

综上，q 的取值范围为$\left[\dfrac{1}{3},2\right]$.

(3)由题意，$\because \dfrac{1}{3}a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 3a_n$，且数列 a_1，$a_2,\cdots,a_k$ 成等差数列，$a_1=1$，

$\therefore \dfrac{1}{3}[1+(n-1)d]\leqslant 1+nd\leqslant 3[1+(n-1)d]$，

$\therefore \begin{cases}d(2n+1)\geqslant -2\\ d(2n-3)\geqslant -2\end{cases}$，$(n=1,2,\cdots,k-1)$.

所以 $n=1$ 时，$-\dfrac{2}{3}\leqslant d\leqslant 2$，$2\leqslant n\leqslant k-1$ 时，$d\geqslant -\dfrac{2}{2n+1}$，所以 $d\geqslant -\dfrac{2}{2k-1}\geqslant -\dfrac{2}{3}$.

$\therefore d\in\left[-\dfrac{2}{2k-1},2\right]$.

又$\because a_1+a_2+\cdots+a_k=1000$，$\therefore S_k=\dfrac{d}{2}k^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)k=\dfrac{d}{2}k^2+\left(1-\dfrac{d}{2}\right)k=1000$.

$\therefore d=\dfrac{2000-2k}{k^2-k}$，$\therefore \dfrac{2000-2k}{k^2-k}\in\left[-\dfrac{2}{2k-1},2\right]$，解得 $k\in[32,1999]$，$k\in\mathbf{N}^*$

$\therefore k$ 的最大值为 1999，此时公差为 $d=-\dfrac{1}{1999}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**A**	**D**	**B**	**A**	**C**
题号	6				
答案	**A**				

1 **A** 【解析】记等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，其中 $q\neq 1$，依题意有 $-2a_2=-3a_1+a_3$，即 $-2a_1q=-3a_1+a_1q^2$，$\because a_1=1$，$\therefore q^2+2q-3=0$，$(q+3)(q-1)=0$，又 $q\neq 1$，$\therefore q=-3$，$S_4=\dfrac{1\times[1-(-3)^4]}{1+3}=-20$，选 A.

2 **D** 【解析】$\because$ 直线 l 的斜率 $k=f'(1)=2a\times 1=2a$，$f(1)=a-1$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $A(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(a-1)=2a(x-1)$，即 $y=2ax-a-1$，又其与 $8x-y+2=0$ 平行，$\therefore 2a=8$，$a=4$，$\therefore f(x)=4x^2-1$，$\therefore f(n)=4n^2-1$. 即 $\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，根据裂项相消法求和得 $S_{2015}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{4029}-\dfrac{1}{4031}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{4031}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4030}{4031}=\dfrac{2015}{4031}$，故选 D.

3 **B** 【解析】$\dfrac{1}{a_n}=(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}$

$=\sqrt{(n+1)n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$=\sqrt{(n+1)n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$，

$a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

问题等价于在 2,3,4,…,2016 中有多少个数可以开方设 $2\leqslant x^2\leqslant 2016$ 且 $x\in\mathbf{N}$，因为 $44^2=1936$，$45^2=2025$，所以 $2\leqslant x\leqslant 44$ 且 $x\in\mathbf{N}$，共有 43 个. 选 B.

4 **A** 【解析】由已知得 $a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$.

故数列的前 8 项依次为 2008，2009，1，-2008，-2009，-1，2008，2009. 由此可知数列为周期数列，周期为 6，且 $S_6=0$.

$\because 2015=6\times 335+5$，

$\therefore S_{2015}=S_5=1$.

5 **C** 【解析】设每一秒通过的路程依次为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，则数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=2$，公差 $d=2$ 的

等差数列,由求和公式有 $na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=240$,即 $2n+n(n-1)=240$,解得$n=15$.

6 **A** 【解析】$\because F(m)$ 为 $\log_2 m$ 的整数部分,

$\therefore 2^n\leqslant m<2^{n+1}-1$ 时,$F(m)=n$,

$\therefore F(1)+F(2)+\cdots+F(1024)$

$=F(1)+[F(2)+F(3)]+[F(4)+F(5)+F(6)+F(7)]+\cdots+F(1024)$

$=0+2\times1+4\times2+\cdots+2^9\times9+10$.

设 $S=1\times2+2\times2^2+\cdots+9\times2^9$ ①,

则 $2S=1\times2^2+\cdots+8\times2^9+9\times2^{10}$ ②,

①-②得 $-S=2+2^2+\cdots+2^9-9\times2^{10}$

$=\frac{2(1-2^9)}{1-2}-9\times2^{10}=2^{10}-2-9\times2^{10}$

$=-2^{13}-2$,

$\therefore S=2^{13}+2$,

$\therefore F(1)+F(2)+\cdots+F(1024)=2^{13}+12=8204$.

7 $\frac{19}{2}$ 【解析】$x\in[0,1)$ 时,$f(x)=[x[x]]=[x\cdot0]=0$,该段函数值的个数为 1;

$x\in[1,2)$ 时,$f(x)=[x[x]]=[x\cdot1]=[x]=1$,该段函数值的个数为 1;

$x\in[2,3)$ 时,$f(x)=[x[x]]=[x\cdot2]$,$2x\in[4,6)$,该段函数值的个数为 2;

……

$x\in[n-1,n)$ 时,$f(x)=[x[x]]=[x\cdot(n-1)]$,$(n-1)x\in[(n-1)^2,n(n-1))$,所以函数$f(x)=[(n-1)x]$在该段的最小值为$(n-1)^2$,最大值为$n(n-1)-1$,函数值的个数为 $n(n-1)-1-(n-1)^2+1=n-1(n\geqslant2)$,所以 $a_n=1+1+2+\cdots+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}$.

因此$\frac{a_n+49}{n}=\frac{n}{2}+\frac{50}{n}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{n}{2}\times\frac{50}{n}}-\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$($n=10$ 时等号成立).

8 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^n,n\geqslant2\end{cases}$

9 【解析】(1) 由题意,得 $a_1=n-1$,

$a_2=(n-1)+(n-2)-1$,

$a_3=(n-1)+(n-2)+(n-3)-1-2$.

(2) 从第 k 站出发时,放上的邮袋共:

$(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)$个,

而从第二站起,每站放下的邮袋共:

$1+2+3+\cdots+(k-1)$个,

故 $a_k=(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)-[1+2+\cdots+(k-1)]$

$=kn-\frac{1}{2}k(k+1)-\frac{1}{2}k(k-1)$

$=kn-k^2(k=1,2,\cdots,n)$.

即邮政车从第 k 站出发时,车内共有邮袋数 $kn-k^2(k=1,2,\cdots,n)$个.

(3) $\because a_k=kn-k^2$,

$\therefore S_k=(n+2n+\cdots+kn)-(1^2+2^2+\cdots+k^2)$

$=\frac{1}{2}k(n+kn)-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

10 【解析】(1)①$\because a_1=1,d=2$,

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2$,$\frac{S_n+64}{n}=n+\frac{64}{n}\geqslant2\sqrt{n\times\frac{64}{n}}=16$,当且仅当 $n=\frac{64}{n}$,即 $n=8$ 时,上式取等号.

故$\frac{S_n+64}{n}$的最小值是 16.

②证明:由①知 $S_n=n^2$,

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$\frac{n+1}{S_nS_{n+2}}=\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$,

$\frac{2}{S_1S_3}+\frac{3}{S_2S_4}+\cdots+\frac{n+1}{S_nS_{n+2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$,

$\because \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}>0$,

$\therefore \frac{2}{S_1S_3}+\frac{3}{S_2S_4}+\cdots+\frac{n+1}{S_nS_{n+2}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{16}$.

(2) 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,关于 m 的不等式 $a_m=a_1+(m-1)d\geqslant n$ 的最小正整数解为 $c_n=3n-2$,

当 $n=1$ 时,$a_1+(c_1-1)d=a_1\geqslant1$;

当 $n\geqslant2$ 时,恒有$\begin{cases}a_1+(c_n-1)d\geqslant n,\\a_1+(c_n-2)d<n,\end{cases}$

即$\begin{cases}(3d-1)n+(a_1-3d)\geqslant0,\\(3d-1)n+(a_1-4d)<0,\end{cases}$

从而$\begin{cases}3d-1\geqslant0,\\(3d-1)\times2+(a_1-3d)\geqslant0,\\3d-1\leqslant0,\\(3d-1)\times2+(a_1-4d)<0\end{cases}\Leftrightarrow d=\frac{1}{3},1\leqslant a_1<\frac{4}{3}$.

当 $d=\frac{1}{3}$,$1\leqslant a_1<\frac{4}{3}$时,对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\geqslant2$ 时,

当正整数 $m<c_n$ 时,

有 $a_1+\frac{m-1}{3}<a_1+\frac{c_n-1}{3}<n$.

所以存在这样的实数 a_1,且 a_1 的取值范围是 $\left[1,\frac{4}{3}\right)$.

11【解析】(1)由题意得 $\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}n+\frac{11}{2}$,即 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{11}{2}n$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{11}{2}n\right)-\left[\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{11}{2}(n-1)\right]=n+5$,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=6$ 也符合上式,$\therefore a_n=n+5(n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$,得 $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore\{b_n\}$是等差数列.

$\because$ 数列$\{b_n\}$的前 9 项和为 153,$\therefore\frac{9(b_1+b_9)}{2}=9b_5=153$,得 $b_5=17$,

又 $b_3=11$,$\therefore\{b_n\}$的公差 $d=\frac{b_5-b_3}{5-3}=3$,$\therefore b_n=b_3+(n-3)d=3n+2$.

(2)由(1)知 $c_n=\frac{3}{(2a_n-11)(2b_n-1)}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0$,

$\therefore\{T_n\}$是递增数列,$\therefore(T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{3}$.

不等式 $T_n>\frac{k}{57}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,只需 $\frac{1}{3}>\frac{k}{57}$,解得 $k<19$,

故最大正整数 k 的值为 18.

(3)$f(n)=\begin{cases}n+5(n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*),\\3n+2(n=2k,k\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$

①当 m 为奇数时,$m+15$ 为偶数,

此时 $f(m+15)=3(m+15)+2=3m+47$,$5f(m)=5(m+5)=5m+25$,

所以 $3m+47=5m+25$,$m=11$.

②当 m 为偶数时,$m+15$ 为奇数,

此时 $f(m+15)=m+15+5=m+20$,$5f(m)=5(3m+2)=15m+10$,

所以 $m+20=15m+10$,$m=\frac{5}{7}\notin\mathbf{N}^*$(舍去).

综上,存在唯一的正整数 $m=11$,使得 $f(m+15)=5f(m)$成立.

12【解析】(1)由题意知 $f(1)=a=\frac{1}{3}$,

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$,

$\because$ 数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $f(n)-c$,则 $a_1=f(1)-c=\frac{1}{3}-c$,

$a_2=[f(2)-c]-[f(1)-c]=-\frac{2}{9}$,$a_3=[f(3)-c]-[f(2)-c]=-\frac{2}{27}$.

又数列$\{a_n\}$成等比数列,$\therefore a_1=\frac{a_2^2}{a_3}=\frac{\frac{4}{81}}{-\frac{2}{27}}=-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-c$,$\therefore c=1$.

又公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$,$\therefore a_n=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\because S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}(n\geqslant 2)$,$b_n>0$,$\sqrt{S_n}>0$,$\therefore\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$,

$\therefore$ 数列$\{\sqrt{S_n}\}$构成一个首项为 1,公差为 1 的等差数列,

$\therefore\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$,$S_n=n^2$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$;

又 $b_1=c=2\times 1-1=1$ 满足 $b_n=2n-1$.

$\therefore b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because c_n=b_n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,则

$R_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+(2n-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$,①

$\frac{1}{3}R_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+(2n-3)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+(2n-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,②

①-②得,$\frac{2}{3}R_n=\frac{1}{3}+2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-(2n-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=$

$\frac{1}{3}+2\times\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-(2n-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{2}{3}-\frac{2(n+1)}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$,

$\therefore R_n=1-\frac{n+1}{3^n}$.

(3)由(1)知 $T_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}$

$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

由 $T_n=\frac{n}{2n+1}>\frac{1005}{2015}$,得 $n>201$,∴ 满足 $T_n>\frac{1005}{2015}$ 的最小正整数 n 为 202.

专题 26 不等关系与基本不等式 $\left(\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\right)$

5 年高考真题演练

1 D **2** B **3** D **4** B

5 A 【解析】设甲、乙两地的距离为 S,则从甲地到乙地所需时间为 $\frac{s}{a}$,从乙地到甲地所需时间为 $\frac{s}{b}$,又因为 $a<b$,所以全程的平均速度为 $v=\frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}=\frac{2ab}{a+b}<\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$,$\frac{2ab}{a+b}>\frac{2ab}{2b}=a$,即 $a<v<\sqrt{ab}$,故选 A.

6 -1 【解析】要使 $|2a+b|$ 最大,则必须 a,b 同号,因为 $4a^2+b^2+4ab=c+6ab=(2a+b)^2\leqslant c+3\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2$,故有 $(2a+b)^2\leqslant4c$,$c\geqslant\frac{(2a+b)^2}{4}$,当且仅当 $2a=b$ 时取等号,此时 $c=b^2$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=\frac{4}{b}+\frac{4}{b^2}=4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)^2-1\geqslant-1$,故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值为 -1.

7 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 【解析】由 $a+b+c=0$ 得,$a=-b-c$,则 $a^2=(-b-c)^2=b^2+c^2+2bc\leqslant b^2+c^2+b^2+c^2=2(b^2+c^2)$,

又 $a^2+b^2+c^2=1$,所以 $3a^2\leqslant2$,解得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 a 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

8 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 【解析】由正弦定理可得 $a+\sqrt{2}b=2c$,又 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b)^2}{2ab}=\frac{3a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab}{8ab}\geqslant\frac{2\sqrt{6}ab-2\sqrt{2}ab}{8ab}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,当且仅当 $\sqrt{3}a=\sqrt{2}b$ 时取等号,所以 $\cos C$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

9 ①④ 【解析】对于①,若 $a^2-b^2=1$,则 $a^2-1=b^2$,即 $(a+1)(a-1)=b^2$,$\because a+1>a-1$,$\therefore a-1<b$,即 $a-b<1$,①正确. 对于②,取 $a=2$,$b=\frac{2}{3}$,有 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$,此时 $a-b>1$,因此②不正确. 对于③,取 $a=9$,$b=4$,有 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$,但此时 $|a-b|=5>1$,因此③不正确. 对于④,由 $|a^3-b^3|=1$ 得 $|a-b|(a^2+ab+b^2)=1$,$|a-b|(a^2+ab+b^2)>|a-b|(a^2-2ab+b^2)=|a-b|^3$,于是有 $|a-b|^3<1$,$|a-b|<1$,因此④正确.

综上所述,其中的真命题有①④.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	A	B	D	D
题号	6	7	8	9	10
答案	A	B	B	D	A

1 D **2** A **3** B **4** D **5** D **6** A **7** B

8 B 【解析】设截成的两段铁丝的长分别为 x,$16-x$,$16>x>0$,则围成的两个正方形面积之和为 $S=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{16-x}{4}\right)^2\geqslant\frac{\left(\frac{x}{4}+\frac{16-x}{4}\right)^2}{2}=8$,当且仅当 $\frac{x}{4}=\frac{16-x}{4}$,即 $x=8$ 时,等号成立. 故两个正方形面积之和的最小值为 8,故选 B.

9 D 【解析】$\frac{t}{t^2+9}=\frac{1}{t+\frac{9}{t}}$,而 $t+\frac{9}{t}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减,故 $t+\frac{9}{t}\geqslant2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$,$\frac{t}{t^2+9}=\frac{1}{t+\frac{9}{t}}\leqslant\frac{2}{13}$(当且仅当 $t=2$ 时等号成立),$\frac{t+2}{t^2}=\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}=2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$,因为 $\frac{1}{t}\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $\frac{t+2}{t^2}=\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}=2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geqslant1$(当且仅当 $t=2$ 时等号成立),故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{13},1\right]$.

10 **A** 【解析】$\because a,b\in\mathbf{R}^+,1=2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，$\therefore\sqrt{ab}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$（当且仅当 $2a=b$ 时等号成立）. 又 $\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{2a+b}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore 4a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，$-4a^2-b^2\leqslant-\frac{1}{2}$（当且仅当 $2a=b$ 时等号成立），$\therefore s=2\sqrt{ab}-4a^2-b^2\leqslant 2\sqrt{ab}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，当且仅当 $2a=b$ 时等号成立，故选 A.

11 ①②④ **12** ①②③

13 $a\geqslant\frac{1}{5}$ 【解析】$\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{3+x+\frac{1}{x}}$，因为 $x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），则 $\frac{1}{3+x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$，即 $\frac{x}{x^2+3x+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{5}$，故 $a\geqslant\frac{1}{5}$.

14 3 【解析】由 $2x+y-3=0$，可得 $\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=1$，故 $\frac{x+2y}{xy}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{5}{3}\geqslant\frac{2}{3}\times 2+\frac{5}{3}=3$，当且仅当 $x=y=1$ 时，等号成立.

15 18 【解析】已知 $x>0,y>0$，且 $2x+8y-xy=0$，

所以 $2x+8y=xy$，即 $\frac{2}{y}+\frac{8}{x}=1$.

利用基本不等式得 $x+y=(x+y)\cdot\left(\frac{2}{y}+\frac{8}{x}\right)=\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}+10\geqslant 8+10=18$，当且仅当 $x=12,y=6$ 时，等号成立.

所以 $x+y$ 的最小值为 18.

16 $[-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$ 【解析】由 $a+b+c=1$，得 $a+c=1-b$. 又 $b^2=ac$，$\therefore(1-b)^2\geqslant 4b^2$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，等号成立. $\therefore 3b^2+2b-1\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant b\leqslant\frac{1}{3}$. $\because b\neq 0$，$\therefore b\in[-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

▶ 专题 27 一元二次不等式与不等式实际应用

5 年高考真题演练

1 **D** 【解析】因为一元二次不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-1\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right\}$，所以可设 $f(x)=a(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(a<0)$，由 $f(10^x)>0$ 可得 $(10^x+1)\cdot\left(10^x-\frac{1}{2}\right)<0$，即 $10^x<\frac{1}{2}$，$x<-\lg 2$，故选 D.

2 **A** 【解析】由条件知 x_1,x_2 为方程 $x^2-2ax-8a^2=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-8a^2$，故 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a)^2-4\times(-8a^2)=36a^2=15^2$，得 $a=\frac{5}{2}$，故选 A.

3 **A** 【解析】由题意可得 $0\in A$，即 $f(a)<f(0)=0$，所以 $a(1+a|a|)<0$，当 $a>0$ 时无解，所以 $a<0$，此时 $1-a^2>0$，所以 $-1<a<0$. 函数 $f(x)$ 的图象（图略）中两抛物线的对称轴 $x=\frac{1}{2a}$，$x=-\frac{1}{2a}$ 之间的距离大于 1，而 $[x+a,x]$ 的区间长度小于 1，所以不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集是 $\left(\frac{1}{2a}-\frac{a}{2},-\frac{1}{2a}-\frac{a}{2}\right)$，所以 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq\left(\frac{1}{2a}-\frac{a}{2},-\frac{1}{2a}-\frac{a}{2}\right)$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{2a}-\frac{a}{2}<-\frac{1}{2},\\-\frac{1}{2a}-\frac{a}{2}>\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}a^2-a-1<0,\\a^2+a+1>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，又 $-1<a<0$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

4 **D** 【解析】不等式 $2^x(x-a)<1$ 可变形为 $a>x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$，记 $g(x)=x-\left(\frac{1}{2}\right)^x(x>0)$，易知当 x 增大时，$y=x$ 与 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的函数值都增大，故 $g(x)$ 为增函数，又 $g(0)=-1$，所以 $g(x)\in(-1,+\infty)$. 由题意可知 $a>-1$.

5 **A** 【解析】取 $x=-2$，知符合 $x<\frac{1}{x}<x^2$，即 -2 是此不等式的解集中的一个元素，所以可排除选项 B、C、D.

6 **C** **7** **A** **8** **C** **9** **C**

10 $\{x|-3<x<2\text{ 或 }x>3\}$ **11** $\{x|-2<x<1\}$

12 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 【解析】根据题意可得 $(8\sin\alpha)^2-4\times 8\cos 2\alpha\leqslant 0$，即 $2\sin^2\alpha-\cos 2\alpha\leqslant 0$，$2\sin^2\alpha-(1-2\sin^2\alpha)\leqslant 0$，即 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. 因为 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，故 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

13 (1) 1900 (2) 100 【解析】(1) $F=\frac{76\ 000}{v+\frac{20\times 6.05}{v}+18}\leqslant\frac{76\ 000}{2\sqrt{121}+18}=1\ 900$，当且仅当 $v=11$ 时等号成立.

(2) $F=\dfrac{76\ 000}{v+\dfrac{20\times5}{v}+18}\leqslant\dfrac{76\ 000}{2\sqrt{100}+18}=2\ 000$,当且仅当 $v=10$ 时等号成立,$2\ 000-1\ 900=100$.

14【解析】(1)令 $y=0$,得 $kx-\dfrac{1}{20}(1+k^2)x^2=0$,由实际意义和题设条件知 $x>0,k>0$,

故 $x=\dfrac{20k}{1+k^2}=\dfrac{20}{k+\dfrac{1}{k}}\leqslant\dfrac{20}{2}=10$,当且仅当 $k=1$ 时,等号成立.

所以炮的最大射程为 10 千米.

(2)因为 $a>0$,所以炮弹可击中目标等价于存在 $k>0$,使 $3.2=ka-\dfrac{1}{20}(1+k^2)\cdot a^2$ 成立,

即关于 k 的方程 $a^2k^2-20ak+a^2+64=0$ 有正根,

则判别式 $\Delta=(-20a)^2-4a^2(a^2+64)\geqslant0$,

故 $a\leqslant6$.

所以当 a 不超过 6(千米)时,可击中目标.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	B	A	A
题号	6	7	8	9	10
答案	A	B	B	C	A

1 C **2** C **3** B **4** A **5** A **6** A **7** B

8 B **9** C **10** A **11** $[-4,3]$

12 $(-1,3)$ 【解析】由题意知,$f(1)=2+1=3$,$f(f(1))=f(3)=3^2+6a$,若 $f(f(1))>3a^2$,则 $9+6a>3a^2$,即 $a^2-2a-3<0$,解得 $-1<a<3$.

13 5 【解析】设仓库与车站距离为 x 公里,由已知 $y_1=\dfrac{20}{x}$,$y_2=0.8x$,费用之和 $y=y_1+y_2=0.8x+\dfrac{20}{x}\geqslant2\sqrt{0.8x\cdot\dfrac{20}{x}}=8$,当且仅当 $0.8x=\dfrac{20}{x}$,即 $x=5$ 时"="成立.

14 $\left[\dfrac{1}{8},+\infty\right)$ 【解析】因为 $f(x)=\log_2x-2\log_2(x+c)=\log_2x-\log_2(x+c)^2=\log_2\dfrac{x}{(x+c)^2}$,所以由 $f(x)\leqslant1$,得 $\log_2\dfrac{x}{(x+c)^2}\leqslant1$,即 $\dfrac{x}{(x+c)^2}\leqslant2$,所以 $2x^2+(4c-1)x+2c^2\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.设 $g(x)=2x^2+(4c-1)x+2c^2$,因为 $g(0)=2c^2>0$,所以若对称轴 $x=-\dfrac{4c-1}{2\times2}\leqslant0$,则此时满足条件,解得 $c\geqslant\dfrac{1}{4}$;若对称轴 $x=-\dfrac{4c-1}{2\times2}>0$,即 $c<\dfrac{1}{4}$ 时,此时应满足条件 $\Delta=(4c-1)^2-4\times2\times2c^2\leqslant0$,解得 $c\geqslant\dfrac{1}{8}$.所以此时 $\dfrac{1}{8}\leqslant c<\dfrac{1}{4}$.综上满足条件的 c 的取值范围是 $c\geqslant\dfrac{1}{8}$,即 $\left[\dfrac{1}{8},+\infty\right)$.

15 $m\leqslant-\sqrt{2}$ 【解析】由题意,得 $m\leqslant-\sqrt{-x^2-2x}+x+1=-\sqrt{-(x+1)^2+1}+(x+1)$.令 $f(x)=-\sqrt{-(x+1)^2+1}+(x+1)$,再令 $t=x+1$,则 $f(t)=-\sqrt{-t^2+1}+t,t\in[-1,1]$.$f'(t)=1-\dfrac{t}{\sqrt{-t^2+1}}$,所以 $f(t)_{\min}=-\sqrt{2}$,故 $m\leqslant-\sqrt{2}$.

16 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

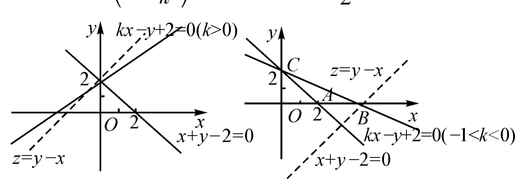
【解析】由题意,得 $\dfrac{x^2}{m^2}-1-4m^2(x^2-1)\leqslant(x-1)^2-1+4(m^2-1)$ 对 $\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 恒成立,即 $\dfrac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1$ 对 $\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 恒成立.设 $g(x)=-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1=-3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$,则 $g(x)$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{5}{3}$.所以 $\dfrac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\dfrac{5}{3}$,即 $(3m^2+1)(4m^2-3)\geqslant0$,解得 $m\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $m\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

专题 28 简单的线性规划

5 年高考真题演练

1 C **2** B **3** C **4** B

5 D 【解析】作出线性约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant0.\\kx-y+2\geqslant0,\\y\geqslant0\end{cases}$ 的可行域.当 $k>0$ 时,如图(1)所示,此时可行域为 y 轴上方,直线 $x+y-2=0$ 的右上方、直线 $kx-y+2=0$ 的右下方的区域,显然此时 $z=y-x$ 无最小值.当 $k<-1$ 时,$z=y-x$ 取得最小值 2;当 $k=-1$ 时,$z=y-x$ 取得最小值 -2,均不符合题意.当 $-1<k<0$ 时,如图(2)所示,此时可行域为点 $A(2,0)$,$B\left(-\dfrac{2}{k},0\right)$,$C(0,2)$ 所围成的三角形区域,当直线 $z=y-x$ 经过点 $B\left(-\dfrac{2}{k},0\right)$ 时,有最小值,即 $-\left(-\dfrac{2}{k}\right)=-4\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$.故选 D.

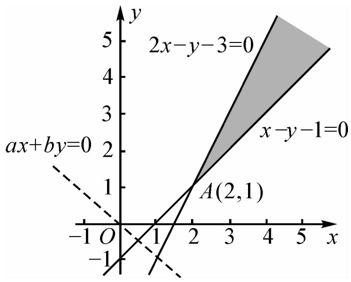


(1) (2)

第 5 题图

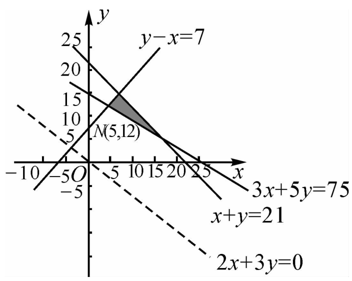
6 **B** 【解析】不等式组表示的平面区域如图中阴影部分表示,根据目标函数的几何意义可知,目标函数在点 $A(2,1)$ 处取得最小值,故 $2a+b=2\sqrt{5}$.

将 $2a+b=2\sqrt{5}$ 看作平面直角坐标系 aOb 中的直线,则 a^2+b^2 的几何意义是直线上的点与坐标原点距离的平方,故其最小值为坐标原点到直线 $2a+b=2\sqrt{5}$ 距离的平方,即 $\left(\frac{|-2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}\right)^2=4$.



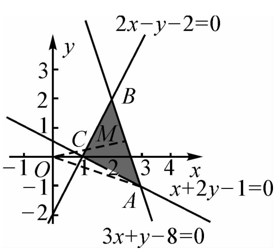
第 6 题图

7 **C** 【解析】设租 A 型车 x 辆,B 型车 y 辆,租金为 z,则 $\begin{cases}36x+60y\geqslant 900,\\ y-x\leqslant 7,\\ y+x\leqslant 21,\\ x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$ 画出可行域(图中阴影区域中的整数点),则目标函数 $z=1\,600x+2\,400y$ 在点 $N(5,12)$ 处取得最小值 36 800,故选 C.



第 7 题图

8 **C** 【解析】已知的不等式组表示的平面区域如图中阴影所示,显然当点 M 与点 A 重合时直线 OM 的斜率最小,由直线方程 $x+2y-1=0$ 和 $3x+y-8=0$,解得 $A(3,-1)$,故 OM 斜率的最小值为 $-\frac{1}{3}$.



第 8 题图

9 4

10 【解析】(1)$\because m=n=\frac{2}{3}$,$\overrightarrow{AB}=(1,2)$,$\overrightarrow{AC}=(2,1)$,

$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(1,2)+\frac{2}{3}(2,1)=(2,2)$,

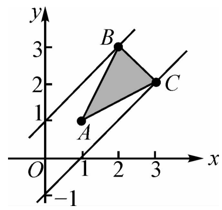
$\therefore |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

(2)$\because \overrightarrow{OP}=m(1,2)+n(2,1)=(m+2n,2m+n)$,

$\therefore \begin{cases}x=m+2n,\\ y=2m+n,\end{cases}$

两式相减,得 $m-n=y-x$.

令 $y-x=t$,由图知,当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时,t 取得最大值 1,故 $m-n$ 的最大值为 1.

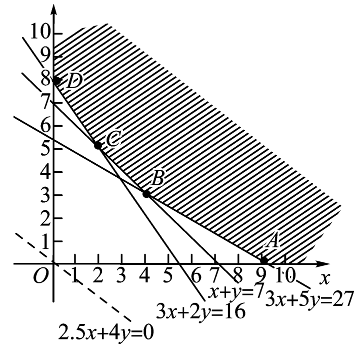


第 10 题图

11 【解析】设需要预订满足要求的午餐和晚餐分别为 x 个单位和 y 个单位,所花的费用为 z 元,则依题意得:$z=2.5x+4y$,且 x,y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 12x+8y\geqslant 64,\\ 6x+6y\geqslant 42,\\ 6x+10y\geqslant 54.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 3x+2y\geqslant 16,\\ x+y\geqslant 7,\\ 3x+5y\geqslant 27.\end{cases}$

让目标函数表示的直线 $2.5x+4y=z$ 在可行域(如图中阴影部分所示)上平移,由此可知 $z=2.5x+4y$ 在 $B(4,3)$ 处取得最小值.

因此,应当为该儿童预订 4 个单位的午餐和 3 个单位的晚餐,就可满足要求.



第 11 题图

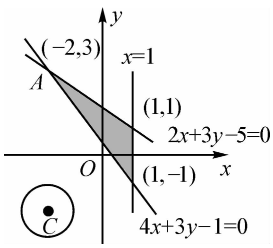
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**C**	**C**	**A**	**D**
题号	6	7			
答案	**B**	**D**			

1 **B** 2 **C** 3 **C** 4 **A**

5 **D** 【解析】依题意可知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上为减函数，在 $(2,+\infty)$ 上为增函数，由 $f(2x+y)\leqslant 1$，$f(1)=f(3)=1$，得 $1\leqslant 2x+y\leqslant 3$，从而变量 x,y 满足 $\begin{cases}-2\leqslant x-2y\leqslant \frac{1}{2},\\ 1\leqslant 2x+y\leqslant 3,\end{cases}$ 不等式组所表示的平面区域是一个矩形，且其面积 $S=1$.

6 **B** 【解析】可行域如图阴影部分，设 $|PQ|=d$，则由图知圆心 $C(-2,-2)$ 到直线 $4x+3y-1=0$ 的距离最小，到点 A 距离最大.



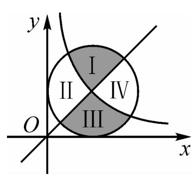
第 6 题图

由 $\begin{cases}2x+3y-5=0,\\ 4x+3y-1=0,\end{cases}$ 得 $A(-2,3)$.

$\therefore d_{\max}=|CA|+1=5+1=6$，

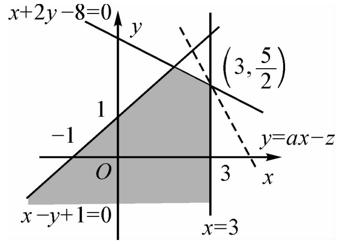
$d_{\min}=\dfrac{|-8-6-1|}{5}-1=2$.

7 **D** 【解析】平面点集 A 表示的平面区域就是不等式组 $\begin{cases}y-x\geqslant 0,\\ y-\frac{1}{x}\geqslant 0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}y-x\leqslant 0,\\ y-\frac{1}{x}\leqslant 0\end{cases}$ 表示的两块平面区域，而平面点集 B 表示的平面区域为以点 $(1,1)$ 为圆心，以 1 为半径的圆及圆的内部，作出它们所示的平面区域，如图所示，图中的阴影部分就是 $A\cap B$ 所表示的平面图形. 由于圆和曲线 $y=\frac{1}{x}$ 关于直线 $y=x$ 对称，因此阴影部分所表示的图形面积为圆面积的 $\frac{1}{2}$，即为 $\frac{\pi}{2}$.



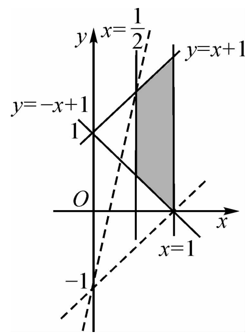
第 7 题图

8 $a<-\frac{1}{2}$ 【解析】记 $z=ax-y$，注意到当 $x=0$ 时，$y=-z$，即直线 $z=ax-y$ 在 y 轴上的截距是 $-z$. 在坐标平面内画出题中的不等式组表示的平面区域，如图所示，结合图形可知，满足题意的实数 a 的取值范围为 $a<-\frac{1}{2}$.

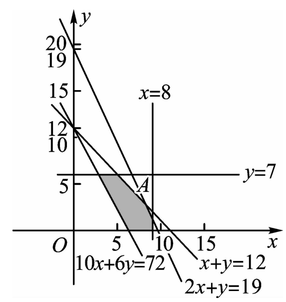


第 8 题图

9 $[1,5]$ 【解析】由题意可知 $\frac{y+1}{x}=\frac{y-(-1)}{x-0}$，即求不等式组所表示的平面区域内的点与点 $(0,-1)$ 的连线斜率 k 的取值范围，由图可知 $k\in[1,5]$，即 $\frac{y+1}{x}$ 的取值范围是 $[1,5]$.



第 9 题图



第 10 题图

10 4 900 【解析】设派用甲型卡车 x 辆，乙型卡车 y 辆，则 $\begin{cases}10x+6y\geqslant 72,\\ x+y\leqslant 12,\\ 2x+y\leqslant 19,\\ 0\leqslant x\leqslant 8,\\ 0\leqslant y\leqslant 7,\end{cases}$

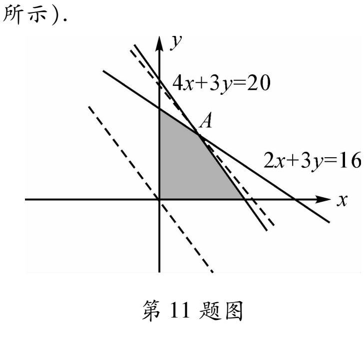
目标函数 $z=450x+350y$，画出可行域如图，当目标函数经过 $A(7,5)$ 时，利润 z 最大，为 4 900 元.

11 自筹资金 2 份，银行贷款 4 份 【解析】设自筹资金的份数为 x，银行贷款的份数为 y，获得的总利润为 z 万元，于是，问题中包含的约束条件为

$\begin{cases}20x+30y\leqslant 160,\\ 40x+30y\leqslant 200,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 16,\\ 4x+3y\leqslant 20,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0.\end{cases}$

目标函数为 $z=12x+10y$，

因此，作出不等式组表示的平面区域，即可行域(如图所示).



第 11 题图

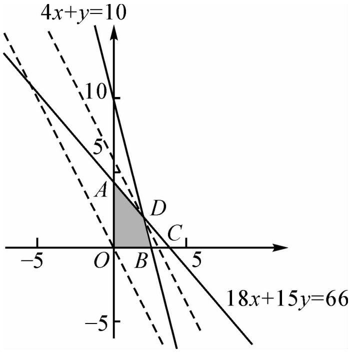
解方程组$\begin{cases}2x+3y=16,\\4x+3y=20,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$

即$A(2,4)$，作出直线$12x+10y=z$，由图可知，当直线$12x+10y=z$经过可行域的点A时，z取得最大值，$z_{max}=12\times2+10\times4=64$(万元).

即自筹资金2份，银行贷款4份，获得总利润最大.

12 30 000 【解析】设生产甲种肥料x车皮，生产乙种肥料y车皮，则$z=10\ 000x+5\ 000y$，

$\begin{cases}4x+y\leqslant10,\\18x+15y\leqslant66,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$画出图形可知，在$D(2,2)$处有最大值，且$z_{max}=10\ 000\times2+5000\times2=30\ 000$(元).



第12题图

▶ 专题29 推理

5年高考真题演练

1 C 【解析】事实上本题的“∧”和“∨”运算就是取最小值和最大值运算，而$ab\geqslant4$，则a,b中至少有一个大于或等于2，否则$ab<4$，$\therefore a\vee b\geqslant2$；同理$c+d\leqslant4$，则$c,d$中至少有一个小于或等于2，$\therefore c\wedge d\leqslant2$，故选C.

2 B 【解析】题目中$x<y<z,y<z<x,z<x<y$恰有一个成立说明x,y,z是互不相等的三个正整数，可用特殊值法求解，不妨取$x=1,y=2,z=3,w=4$满足题意，且$(2,3,4)\in S,(1,2,4)\in S$，从而$(y,z,w)\in S,(x,y,w)\in S$成立.

3 B 【解析】由特殊到一般，先分别计算$|x|+|y|$的值为1,2,3时，对应的(x,y)的不同整数解的个数，再猜想$|x|+|y|=n$时，对应的不同整数解的个数. 通过观察可以发现$|x|+|y|$的值为1,2,3时，对应的(x,y)的不同整数解的个数为4,8,12，可推出当$|x|+|y|=n$时，对应的不同整数解(x,y)的个数为$4n$，所以$|x|+|y|=20$的不同整数解(x,y)的个数为80. 故选B.

4 A 【解析】根据甲和丙的回答推测乙没去过B城市，又知乙没去过C城市，故乙去过A城市.

5 $\sqrt{x}$ x 【解析】过点$(a,f(a)),(b,-f(b))$的直线方程为$y-f(a)=\dfrac{f(a)+f(b)}{a-b}(x-a)$，令$y=0$得$x=c=\dfrac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}$.

(1)令几何平均数$\sqrt{ab}=\dfrac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}\Rightarrow$ $\sqrt{ab}f(a)+\sqrt{ab}f(b)=bf(a)+af(b)$，可取$f(x)=\sqrt{x}(x>0)$；

(2)令调和平均数$\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}\Rightarrow$ $\dfrac{ab+ba}{a+b}=\dfrac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}$，可取$f(x)=x(x>0)$.

6 $\dfrac{1}{4}$ 【解析】直接递推归纳；等腰直角$\triangle ABC$中，斜边$BC=2\sqrt{2}$，所以$AB=AC=a_1=2,AA_1=a_2=\sqrt{2}$，$A_1A_2=a_3=1,\cdots\cdots,A_5A_6=a_7=a_1\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^6=\dfrac{1}{4}$.

7 $F+V-E=2$ 【解析】三棱柱中$5+6-9=2$；五棱锥中$6+6-10=2$；立方体中$6+8-12=2$，由此归纳可得$F+V-E=2$.

8 3,1,6 79 【解析】(1)由定义知，四边形$DEFG$由一个等腰直角三角形和一个平行四边形构成，其内部格点有1个，边界上格点有6个，$S_{四边形DEFG}=3$.

(2)由待定系数法可得，$\begin{cases}\dfrac{1}{2}=a\cdot0+b\cdot3+c,\\1=a\cdot0+b\cdot4+c,\\3=a\cdot1+b\cdot6+c,\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a=1,\\b=\dfrac{1}{2},\\c=-1,\end{cases}$当$N=71,L=18$时，$S=1\times71+\dfrac{1}{2}\times18-1=79$.

9 1 000 【解析】$N(n,k)=a_kn^2+b_kn(k\geqslant3)$，其中数列$\{a_k\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列；数列$\{b_k\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，$-\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列；所以$N(n,24)=11n^2-10n$，当$n=10$时，$N(10,24)=11\times10^2-10\times10=1\ 000$.

10 2 17 【解析】(1)由已知，可得子集$\{a_1,a_3,a_5\}$的“特征数列”为:1,0,1,0,1,0,⋯,0，故其前3项和为2.

(2)由已知，可得子集P为$\{a_1,a_3,\cdots,a_{99}\}$，子集$Q$为$\{a_1,a_4,a_7,\cdots,a_{97}\}$，则两个子集的公共元素为$a_1$和100以内项数被6除余1的数对应的项，即$a_1,a_7,\cdots,a_{97}$，共17项.

11 【解析】(1)选择②式，计算如下：

$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin15^\circ\cos15^\circ=1-\dfrac{1}{2}\sin30^\circ=$

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)解法一:三角恒等式为

$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

证明如下:

$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	A	C	C	B
题号	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	A	A

1 **D** 【解析】正四面体的内切球与外接球的半径之比为 1∶3,故$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{27}$.

2 **A** 【解析】选项 A 由一些特殊事例得出一般性结论,且注意到数列$\{a_n\}$是等差数列,其前 n 项和等于 $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$,选项 D 中的推理属于归纳推理,但结论不正确. 因此选 A.

3 **C** 【解析】特值验证法. $n=2$ 时,$2n-1=3$,$3n-1=5$,都不是 4,故只有 $3n-2=4$,故选 C.

4 **C** 【解析】①②正确,③错误. 因为两个复数如果不全是实数,不能比较大小.

5 **B** 【解析】①②正确;③④⑤⑥错误.

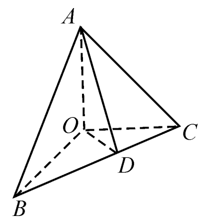
6 **D** 【解析】由所给函数及其导数知,偶函数的导函数为奇函数,因此当$f(x)$是偶函数时,其导函数应为奇函数,故 $g(-x)=-g(x)$.

7 **C** 【解析】此题需要观察归纳数的排列规律,根据每个数是它下一行左右相邻两数的和的计算方法,由$\frac{1}{7}=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$,得第 8 行前两个数为$\frac{1}{8}$,$\frac{1}{56}$,由$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$,$\frac{1}{56}=\frac{1}{72}+\frac{1}{252}$,得第 9 行前三个数为$\frac{1}{9}$,$\frac{1}{72}$,$\frac{1}{252}$,又由$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{90}$,$\frac{1}{72}=\frac{1}{90}+\frac{1}{360}$,$\frac{1}{252}=\frac{1}{360}+\frac{1}{840}$,第 10 行前四个数为$\frac{1}{10}$,$\frac{1}{90}$,$\frac{1}{360}$,$\frac{1}{840}$,因此第 10 行第 4 个数为$\frac{1}{840}$.

8 **B** 【解析】由特殊到一般的推理过程,符合归纳推理的定义;由特殊到与它类似的另一个特殊的推理过程,符合类比推理的定义;由一般到特殊的推理符合演绎推理的定义. A 是演绎推理,C,D 为类比推理,只有 B,从 S_1,S_2,S_3 猜想出数列的前 n 项和 S_n 是从特殊到一般的推理,所以 B 是归纳推理.

9 **A** 【解析】$\because x\in(0,+\infty)$时可得到不等式 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$,$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\left(\frac{2}{x}\right)^2\geqslant3$,$\therefore$ 在 p 位置出现的数恰好是不等式左边分母 x^n 的指数 n 的指数次方,即 $p=n^n$.

10 **A** 【解析】如图,作 $OD\perp BC$,垂足为 D,连接 AD,由立体几何知识知,$AD\perp BC$,从而 $S^2=\left(\frac{1}{2}BC\cdot AD\right)^2=\frac{1}{4}BC^2\cdot AD^2=\frac{1}{4}BC^2\cdot(OA^2+OD^2)=\frac{1}{4}(OB^2+OC^2)\cdot OA^2+\frac{1}{4}BC^2\cdot OD^2=\left(\frac{1}{2}OB\cdot OA\right)^2+\left(\frac{1}{2}OC\cdot OA^2\right)+\left(\frac{1}{2}BC\cdot OD\right)^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.



第 10 题图

11 $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m(a>0,b>0,a\neq b,m>0,n>0)$

【解析】依题意得,推广的不等式为 $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m(a>0,b>0,a\neq b,m>0,n>0)$.

12 $V_{O-BCD}\cdot\overrightarrow{OA}+V_{O-ACD}\cdot\overrightarrow{OB}+V_{O-ABD}\cdot\overrightarrow{OC}+V_{O-ABC}\cdot\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$

13 (1)3　(2)2　【解析】(1)$2=1\times2^1+0\times2^0$,$b_2=1$;$4=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$,$b_4=1$;$6=1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$,$b_6=0$;$8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$,$b_8=1$;故 $b_2+b_4+b_6+b_8=3$.

(2)设 b_n 中第 m 个为 0 的项为 b_i,即 $b_i=0$,构造二进制数$(i)_{10}=(a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0)$,则 $a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0$ 中 1 的个数为偶数,当 $a_2a_1a_0=000$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=1$,$b_{i+3}=0$,$c_m=2$;当 $a_2a_1a_0=001$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=0$,$c_m=1$;当 $a_2a_1a_0=010$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=0$,$c_m=1$;当 $a_2a_1a_0=011$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=0$,$c_m=1$;当 $a_2a_1a_0=100$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=1$,$b_{i+3}=0$,$c_m=2$;当 $a_2a_1a_0=101$ 时,$b_{i+1}=0$,$c_m=0$;当 $a_2a_1a_0=110$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=1$,$b_{i+3}=0$,$c_m=2$;当 $a_2a_1a_0=111$ 时,$b_{i+1}=1$,$b_{i+2}=0$,$c_m=1$. 故 c_m 的最大值为 2.

14 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

【解析】根据题意,由于"解方程$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$"有如下思路;设$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$,则$f(x)$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(2)=1$，故原方程有唯一解 $x=2$，那么对于不等式 $x^6-(x+2)>(x+2)^3-x^2$ 而言，由于 $g(x)=x^6-(x+2)^3-(x+2)+x^2=[-(x+2)+x^2][(x+2)^2+x^4+(x+2)x^2+1]>0$，当 $x=2,x=-1$ 时函数值为零，并且可以判定函数是先减后增再减的，因此可知满足不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

专题 30　证明

5 年高考真题演练

1 **A** 【解析】至少有一个实根的否定是没有实根，故做的假设是"方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根".

2 【解析】(1) 当 $q=2,n=3$ 时，$M=\{0,1\}$，$A=\{x|x=x_1+x_2\cdot 2+x_3\cdot 2^2,x_i\in M,i=1,2,3\}$.

可得 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

(2) 由 $s,t\in A$，$s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$，$t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，$a_i,b_i\in M,i=1,2,\cdots,n$ 及 $a_n<b_n$，可得

$s-t=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})q^{n-2}+(a_n-b_n)q^{n-1}$

$\leqslant(q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}-q^{n-1}$

$=\dfrac{(q-1)(1-q^{n-1})}{1-q}-q^{n-1}$

$=-1<0$.

所以 $s<t$.

3 【解析】(1) 由已知，当 $n\geqslant1$ 时，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2^{n+1}-2^n=2^n$. 于是对任意的正整数 n，总存在正整数 $m=n+1$，使得 $S_n=2^n=a_m$.

所以 $\{a_n\}$ 是"H 数列".

(2) 由已知，得 $S_2=2a_1+d=2+d$. 因为 $\{a_n\}$ 是"H 数列"，所以存在正整数 m，使得 $S_2=a_m$，即 $2+d=1+(m-1)d$，于是 $(m-2)d=1$.

因为 $d<0$，所以 $m-2<0$，故 $m=1$. 从而 $d=-1$.

当 $d=-1$ 时，$a_n=2-n$，$S_n=\dfrac{n(3-n)}{2}$ 是小于 2 的整数，$n\in\mathbf{N}_+$. 于是对任意的正整数 n，总存在正整数 $m=2-S_n=2-\dfrac{n(3-n)}{2}$，使得 $S_n=2-m=a_m$，所以 $\{a_n\}$ 是"H 数列". 因此 d 的值为 -1.

(3) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d=na_1+(n-1)(d-a_1)(n\in\mathbf{N}_+)$.

令 $b_n=na_1$，$c_n=(n-1)(d-a_1)$，则 $a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

下证 $\{b_n\}$ 是"H 数列".

设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}a_1(n\in\mathbf{N}_+)$. 于是对任意的正整数 n，总存在正整数 $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$，使得 $T_n=b_m$，所以 $\{b_n\}$ 是"H 数列".

同理可证 $\{c_n\}$ 也是"H 数列"，所以，对任意的等差数列 $\{a_n\}$，总存在两个"H 数列" $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}_+)$ 成立.

4 【解析】(1) 反证法. 假设 l_1 与 l_2 不相交，则 l_1 与 l_2 平行，有 $k_1=k_2$. 代入 $k_1k_2+2=0$，得 $k_1^2+2=0$，此结论与 k_1 为实数的事实相矛盾. 从而 $k_1\neq k_2$，即 l_1 与 l_2 相交.

(2) l_1 与 l_2 的交点 P 的坐标 (x,y) 满足 $\begin{cases}y-1=k_1x,\\y+1=k_2x,\end{cases}$

故知 $x\neq0$，从而 $\begin{cases}k_1=\dfrac{y-1}{x},\\k_2=\dfrac{y+1}{x}.\end{cases}$

代入 $k_1k_2+2=0$，得 $\dfrac{y-1}{x}\cdot\dfrac{y+1}{x}+2=0$，

整理后，得 $2x^2+y^2=1$，

所以交点 P 在椭圆 $2x^2+y^2=1$ 上.

5 【解析】(1) 对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，当 $x>0$ 时，$f'_n(x)=1+\dfrac{x}{2}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{n}>0$，故 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

由于 $f_1(1)=0$，当 $n\geqslant2$ 时，$f_n(1)=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>0$，故 $f_n(1)\geqslant0$.

又 $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)=-1+\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^k}{k^2}\leqslant-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}<0$，

所以存在唯一的 $x_n\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$，满足 $f_n(x_n)=0$.

(2) 当 $x>0$ 时，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}>f_n(x)$，故 $f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=0$.

由 $f_{n+1}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增知，$x_{n+1}<x_n$，故 $\{x_n\}$ 为单调递减数列，从而对任意 $n,p\in\mathbf{N}_+$，$x_{n+p}<x_n$.

对任意 $p\in\mathbf{N}_+$，由于

$f_n(x_n)=-1+x_n+\dfrac{x_n^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{x_n^n}{n^2}=0$，　①

$f_{n+p}(x_{n+p})=-1+x_{n+p}+\dfrac{x_{n+p}^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{x_{n+p}^n}{n^2}+\dfrac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}=0$，　②

①式减去②式并移项，利用 $0<x_{n+p}<x_n\leqslant1$，得

$x_n - x_{n+p} = \sum_{k=2}^{n}\frac{x_{n+p}^k - x_n^k}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$.

因此,对任意 $p \in \mathbf{N}_+$,都有 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.

高考试题专项预测

1【解析】(1)若 $k=-2$,$f(x)=-2e^x-x^2$,则 $f'(x)=-2e^x-2x$,

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)=-2e^x-2x<0$,

故函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是单调递减的.

(2)函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,则 x_1,x_2 是 $f'(x)=ke^x-2x=0$ 的两个根,

即方程 $k=\frac{2x}{e^x}$有两个根,设 $\varphi(x)=\frac{2x}{e^x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$,

当 $x<0$ 时,$\varphi'(x)>0$,函数 $\varphi(x)$单调递增且$\varphi(x)<0$;

当 $0<x<1$ 时,$\varphi'(x)>0$,函数 $\varphi(x)$ 单调递增且 $\varphi(x)>0$;

当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)<0$,函数 $\varphi(x)$单调递减且$\varphi(x)>0$.

要使 $k=\frac{2x}{e^x}$有两个根,只需 $0<k<\varphi(1)=\frac{2}{e}$,

故实数 k 的取值范围是$\left(0,\frac{2}{e}\right)$.

(3)由(2)可知,函数 $f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 满足 $0<x_1<1<x_2$,

由$f'(x_1)=ke^{x_1}-2x_1=0$,得 $k=\frac{2x_1}{e^{x_1}}$,

所以 $f(x_1)=ke^{x_1}-x_1^2=\frac{2x_1}{e^{x_1}}e^{x_1}-x_1^2=x_1(2-x_1)=-x_1^2+2x_1=-(x_1-1)^2+1$,

由于 $x_1\in(0,1)$,故 $0<-(x_1-1)^2+1<1$,

所以 $0<f(x_1)<1$.

2【解析】(1)设 $g(x)=xe^x+1$,则 $g'(x)=(x+1)e^x$.

当 $x\in(-\infty,-1)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;

当 $x\in(-1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

所以 $g(x)\geqslant g(-1)=1-e^{-1}>0$.

又 $e^x>0$,故 $f(x)>0$.

$f'(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(xe^x+1)^2}$,

当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

所以 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

综上,有 $0<f(x)\leqslant 1$.

(2)①若 $a=0$,则当 $x>0$ 时,$f(x)<1=\frac{1}{ax^2+1}$,不等式不成立.

②若 $a<0$,则当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{-a}}$时,$\frac{1}{ax^2+1}>1$,不等式不成立.

③若 $a>0$,则 $f(x)>\frac{1}{ax^2+1}$等价于$(ax^2-x+1)e^x-1>0$.(*)

设 $h(x)=(ax^2-x+1)e^x-1$,则 $h'(x)=x(ax+2a-1)e^x$.

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$,则当 $x\in(0,+\infty)$,

$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,$h(x)>h(0)=0$.

若 $0<a<\frac{1}{2}$,则当 $x\in\left(0,\frac{1-2a}{a}\right)$,$h'(x)<0$,

$h(x)$单调递减,$h(x)<h(0)=0$.

于是,若 $a>0$,(*)式成立当且仅当 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

综上,a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3【解析】(1)设 $g(x)=\ln x-x+1(x>1)$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<0(x>1)$,

故 $g(x)$单调递减,$g(x)<g(1)$,即

$\ln x-x+1<0$.

所以 $\ln x<x-1$.

(2)由(1)可知 $\ln x<x-1$,所以只需要证明 $2(x-1)<\frac{5(x^2-1)}{x+4}$.

因为 $x>1$,所以可以约掉$(x-1)$,即证 $2<\frac{5(x+1)}{x+4}$.

即证 $2(x+4)<5(x+1)$,

即证 $3x-3>0$.

因为 $x>1$,所以 $3x-3>0$ 显然成立.

所以 $\ln x+x-1<\frac{5(x^2-1)}{x+4}$.

4【解析】假设 a,b,c,d 都是非负实数.

因为 $a+b=c+d=1$,

所以 $a,b,c,d\in[0,1]$. 所以 $ac\leqslant\sqrt{ac}\leqslant\frac{a+c}{2}$,$bd\leqslant\sqrt{bd}\leqslant\frac{b+d}{2}$,

所以 $ac+bd\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}=1$,当且仅当 $a=c$,$b=d$ 时,等号成立,

这与已知 $ac+bd>1$ 相矛盾,所以假设不成立,即证得 a,b,c,d 中至少有一个是负数.

5【解析】(1)因为底面 $ABCD$ 是菱形,所以$AC\perp BD$.

因为 $AC\perp PD$,$PD\cap BD=D$,所以 $AC\perp$平面 PBD.

(2)由(1)知 $AC\perp BD$.

因为平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$,

$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $BD\perp$平面 PAC.

因为 $PO\subset$ 平面 PAC,所以 $BD\perp PO$.
因为底面 $ABCD$ 是菱形,所以 $BO=DO$,
所以 $PB=PD$.

6【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a(x+1)-a(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2ax}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+(2-2a)x+1}{x(x+1)^2}$.
因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数,
所以 $f'(x)\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.
即 $x^2+(2-2a)x+1\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.
当 $x\in(0,+\infty)$ 时,由 $x^2+(2-2a)x+1\geqslant0$,
得 $2a-2\leqslant x+\frac{1}{x}$.
设 $g(x)=x+\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
$g(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,
当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时取等号,
即 $g(x)$ 的最小值为 2,则 $2a-2\leqslant2$,即 $a\leqslant2$.
故 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.
(2)要证 $\frac{m-n}{\ln m-\ln n}<\frac{m+n}{2}$,只需证 $\frac{\frac{m}{n}-1}{\ln\frac{m}{n}}<\frac{\frac{m}{n}+1}{2}$,
即证 $\ln\frac{m}{n}>\frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}$,则只需证 $\ln\frac{m}{n}-\frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}>0$.
设 $h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.
由(1)知,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增函数,又 $\frac{m}{n}>1$,
所以 $h\left(\frac{m}{n}\right)>h(1)=0$.
即 $\ln\frac{m}{n}-\frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}>0$ 成立.
所以 $\frac{m-n}{\ln m-\ln n}<\frac{m+n}{2}$.

7【解析】(1) $\because f(x)$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点,
$\therefore f(x)=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2.
$\because f(c)=0,\therefore x_1=c$ 是 $f(x)=0$ 的根.
又 $x_1x_2=\frac{c}{a}$,
$\therefore x_2=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\neq c\right)$,
$\therefore \frac{1}{a}$ 是 $f(x)=0$ 的一个根.
即 $\frac{1}{a}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点.
(2)假设 $\frac{1}{a}<c$,
$\because \frac{1}{a}>0$,
$\therefore$ 由 $0<x<c$ 时,$f(x)>0$,知 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$,
这与 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$ 矛盾,$\therefore \frac{1}{a}\geqslant c$.
又 $\because \frac{1}{a}\neq c,\therefore \frac{1}{a}>c$.

8【解析】(1) $f_1(\theta),f_3(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上均为单调递增的函数.
对于函数 $f_1(\theta)=\sin\theta-\cos\theta$,设 $\theta_1<\theta_2,\theta_1,\theta_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,则
$f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)=(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$,
$\because \sin\theta_1<\sin\theta_2,\cos\theta_2<\cos\theta_1$,
$\therefore f_1(\theta_1)<f_1(\theta_2)$,函数 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增.
(2)原式左边 $=2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)=1-\sin^22\theta=\cos^22\theta$.
原式右边 $=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2=\cos^22\theta$.
$\therefore 2f_6(\theta)-f_4(\theta)=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.
(3)当 $n=1$ 时,函数 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增,
$\therefore f_1(\theta)$ 的最大值为 $f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,最小值为 $f_1(0)=-1$.
当 $n=2$ 时,$f_2(\theta)=1$,$\therefore$ 函数 $f_2(\theta)$ 的最大值、最小值均为 1.
当 $n=3$ 时,函数 $f_3(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增.
$\therefore f_3(\theta)$ 的最大值为 $f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,最小值为 $f_3(0)=-1$.
当 $n=4$ 时,函数 $f_4(\theta)=1-\frac{1}{2}\sin^22\theta$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,
$\therefore f_4(\theta)$ 的最大值为 $f_4(0)=1$,最小值为 $f_4\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.
下面讨论正整数 $n\geqslant5$ 的情形:

当 n 为奇数时,对任意 θ_1、$\theta_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$且 $\theta_1<\theta_2$,

$\because f_n(\theta_1)-f_n(\theta_2)=(\sin^n\theta_1-\sin^n\theta_2)+(\cos^n\theta_2-\cos^n\theta_1)$,

以及 $0\leqslant\sin\theta_1<\sin\theta_2<1,0<\cos\theta_2<\cos\theta_1\leqslant1$,

$\therefore\ \sin^n\theta_1<\sin^n\theta_2,\cos^n\theta_2<\cos^n\theta_1$,从而 $f_n(\theta_1)<f_n(\theta_2)$.

$\therefore f_n(\theta)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增,则 $f_n(\theta)$ 的最大值为$f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,最小值为 $f_n(0)=-1$.

当 n 为偶数时,一方面有 $f_n(\theta)=\sin^n\theta+\cos^n\theta\leqslant\sin^2\theta+\cos^2\theta=1=f_n(0)$. 另一方面,由于对任意正整数 $l\geqslant2$,有

$2f_{2l}(\theta)-f_{2l-2}(\theta)=(\cos^{2l-2}\theta-\sin^{2l-2}\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\geqslant0$,

故$f_n(\theta)\geqslant\frac{1}{2}f_{n-2}(\theta)\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}f_2(\theta)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}=f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore$ 函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 $f_n(0)=1$,最小值 $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

综上所述,当 n 为奇数时,函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 0,最小值为 -1.

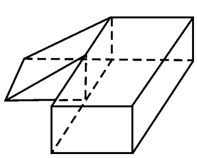
当 n 为偶数时,函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 1,最小值为 $2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

▶专题 31　简单几何体的结构、直观图与三视图、空间直角坐标系

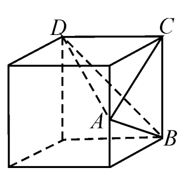
5 年高考真题演练

1 **B**　【解析】此几何体为一直三棱柱,底面是边长为 6,8,10 的直角三角形,侧棱为 12,故其最大球的半径为底面直角三角形内切圆的半径,故其半径为 $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\times\frac{1}{2}\times6\times8}{6+8+10}=2$,故选 B.

2 **D**　【解析】由三视图画出几何体的直观图,如图所示,则此几何体的表面积 $S=S_1-S_{正方形}+S_2+2S_3+S_{斜面}$,其中 S_1 是长方体的表面积,S_2 是三棱柱的水平放置的一个侧面的面积,S_3 是三棱柱的一个底面的面积,则 $S=(4\times6+3\times6+3\times4)\times2-3\times3+3\times4+2\times\frac{1}{2}\times4\times3+5\times3=138(\mathrm{cm}^2)$,选 D.



第 2 题图

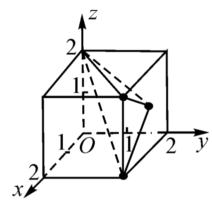


第 3 题图

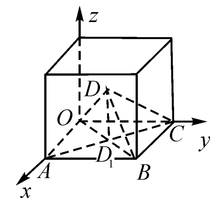
3 **C**　【解析】如图,设辅助正方体的棱长为 4,三视图对应的多面体为三棱锥 $A-BCD$,最长的棱为 $AD=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$,选 C.

4 **C**　【解析】此几何体是由一个三棱柱截去一个三棱锥得到的,三棱柱和三棱锥的底面都是直角三角形,两直角边长分别为 3 和 4,其面积为 6,三棱柱的高为 5,三棱锥的高为 3,所以该几何体的体积为 $6\times5-\frac{1}{3}\times6\times3=24$,选择 C.

5 **B**　【解析】由题知,该几何体的三视图为一个三角形,两个四边形,经分析可知该几何体为三棱柱,故选 B.



第 6 题图



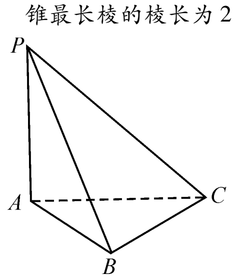
第 7 题图

6 **D**　【解析】在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中作出棱长为 2 的正方体,在该正方体中作出四面体,如图所示,由图可知,该四面体的正视图为④,俯视图为②. 选 D.

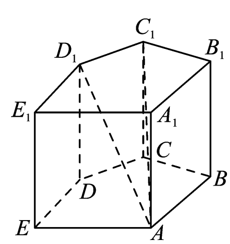
7 **D**　【解析】根据题目条件,在空间直角坐标系 $O-xyz$中作出该三棱锥 $D-ABC$,显然 $S_1=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2,S_2=S_3=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 故选 D.

8 $\frac{20\pi}{3}$　【解析】由三视图可得该几何体是组合体,上面是底面圆的半径为 2 m、高为 2 m 的圆锥,下面是底面圆的半径为 1 m、高为 4 m 的圆柱,所以该几何体的体积是$\frac{1}{3}\times4\pi\times2+4\pi=\frac{20\pi}{3}(\mathrm{m}^3)$.

9 $2\sqrt{2}$　【解析】三视图所表示的几何体的直观图如图所示. 结合三视图知,$PA\perp$平面 ABC,$PA=2$,$AB=BC=\sqrt{2}$,$AC=2$. 所以 $PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$,$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2\sqrt{2}$,所以该三棱锥最长棱的棱长为 $2\sqrt{2}$.



第 9 题图



第 10 题图

10 **D**　【解析】如图,在正五棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$ 中,从顶点 A 出发的对角线有两条:AC_1,AD_1,同理从 B,C,D,E 点出发的对角线也有

两条，共 $2\times5=10$ 条.

11 **C** 【解析】设球的球心为 O，球心 O 与顶点 S 在底面 $ABCD$ 上的射影分别是 O_1，E，连接 OA，OB，OC，OD，OS，则有 $OA=OB=OC=OD=OS=1$，点 O_1 是底面正方形 $ABCD$ 的中心，$OO_1/\!/SE$，且 $OO_1=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt2}{2}$，$SE=\frac{\sqrt2}{4}$. 在直角梯形 OO_1ES 中，作 $SF\perp OO_1$ 于点 F，则四边形 SFO_1E 是矩形，$O_1F=SE=\frac{\sqrt2}{4}$，$OF=OO_1-O_1F=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle SOF$ 中，$SF^2=OS^2-OF^2=1-\left(\frac{\sqrt2}{4}\right)^2=\frac{14}{16}$. 在矩形 SFO_1E 中，$SO_1=\sqrt{SE^2+SF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt2}{4}\right)^2+\frac{14}{16}}=1$，选 C.

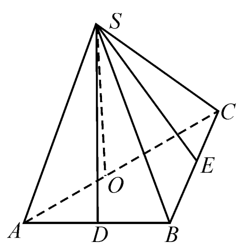
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**A**	**C**	**C**
题号	6				
答案	**B**				

1 **B** 【解析】由于球与侧棱不相交，因此截面图中截面圆不可能与三角形的三条边都相切，排除 A，D，又圆锥的高一定过球心，因此在截面图中三角形的高一定过截面圆的圆心，排除 C，故选 B.

2 **D** 【解析】当几何体是一个长方体，其中一个侧面为正方形时，A 可能；当几何体是横放的一个圆柱时，B 可能；当几何体是横放的三棱柱（底面是等腰直角三角形）时，C 可能. 只有 D 不可能. 故选 D.

3 **A** 【解析】对于①，存在斜高与底边长相等的正四棱锥，其正视图与侧视图是全等的正三角形；对于②，存在如图所示的三棱锥 $S-ABC$，底面为等腰三角形，其底边 AB 的中点为 D，BC 的中点为 E，$\triangle SAB$ 边 AB 上的高为 SD，且 $CB=AB=SD=SE$，顶点 S 在底面上的射影为 AC 的中点 O，则此三棱锥的正视图与侧视图是全等的正三角形；对于③，存在底面直径与母线长相等的圆锥，其正视图与侧视图是全等的正三角形，所以选 A.



第 3 题图

4 **C** 【解析】因为正视图和侧视图是等边三角形，俯视图是正方形，所以该几何体是正四棱锥，还原几何体并结合其中四个顶点的坐标，建立空间直角坐标系，设 $O(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，所求的第五个顶点的坐标为 $S(1,1,z)$. 正视图为等边三角形，且边长为 2，故其高为 $\sqrt{4-1}=\sqrt3$，又正四棱锥的高与正视图的高相等，故 $z=\pm\sqrt3$，故第五个顶点的坐标可能为 $(1,1,\sqrt3)$.

5 **C** 【解析】本题构造长方体，体对角线长为 $\sqrt7$，其在侧视图中为侧面对角线 a，在俯视图中为底面对角线 b，设长方体底面宽为 1，则 $b^2-1+a^2-1=6$，即 $a^2+b^2=8$，利用不等式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=4$，则 $a+b\leqslant4$，故选 C.

6 **B** 【解析】如题图所示，设正方体的棱长为 a，则三棱锥 $P-ABC$ 的主视图与左视图都是三角形，且面积都是 $\frac12a^2$，故选 B.

7 等腰直角三角形 【解析】$|AB|=\sqrt{(-4+10)^2+(-1-1)^2+(-9+6)^2}=\sqrt{49}=7$，

$|BC|=\sqrt{(-10+2)^2+(1+4)^2+(-6+3)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt2$，

$|AC|=\sqrt{(-4+2)^2+(-1+4)^2+(-9+3)^2}=\sqrt{49}=7$，

则 $|AB|=|AC|$，又 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

8 $(-2,-1,-4)$　$(-2,1,-4)$　$(4,-1,0)$

【解析】前两空根据对称规律"关于谁对称，谁保持不变，其余坐标相反"来解决，第三空利用中点坐标公式求解.

于是：点 P 关于 x 轴对称后，它在 x 轴的分量不变，在 y 轴，z 轴的分量变为原来的相反数，所以点 P 关于 x 轴的对称点 P_1 的坐标为 $(-2,-1,-4)$.

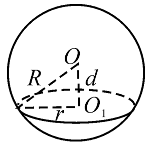
点 P 关于 xOy 平面对称后，它在 x 轴，y 轴的分量均不变，在 z 轴的分量变为原来的相反数，所以点 P 关于 xOy 平面的对称点 P_2 的坐标为 $(-2,1,-4)$.

设点 P 关于点 A 的对称点的坐标为 $P_3(x,y,z)$，由中点坐标公式可得

$$\begin{cases}\frac{-2+x}{2}=1,\\ \frac{1+y}{2}=0,\\ \frac{4+z}{2}=2,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=4,\\ y=-1,\\ z=0.\end{cases}$$

故点 P 关于点 $A(1,0,2)$ 对称的点 P_3 的坐标为 $(4,-1,0)$.

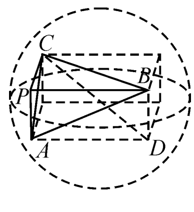
9 $2\sqrt3$ 【解析】如图，$d=OO_1=2$，$R=4$，小球 O_1 的半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt3$.



第 9 题图

10 32 【解析】将三棱锥补成如图所示的长方体,易知长方体的体对角线 CD 即为球的直径,所以 $CD=8$. 设 $PA=a,PB=b,PC=c$,则 $a^2+b^2+c^2=64$,而三棱锥的侧面积为$\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$.

因为$\begin{cases}\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant ab,\\ \frac{1}{2}(b^2+c^2)\geqslant bc,\\ \frac{1}{2}(c^2+a^2)\geqslant ca,\end{cases}$



第 10 题图

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,当且仅当 $a=b=c=\frac{8\sqrt{3}}{3}$时,等号成立. 所以$\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\leqslant\frac{1}{2}\times 64=32$,即三棱锥的侧面积的最大值为 32.

11 $\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})m$ 【解析】由 $PD\perp$底面 $ABCD$,得 $PD\perp AD$. 又 $PD=m,PA=\sqrt{2}m$,则 $AD=m$. 设内切球的球心为 O,半径为 R,连接 OA,OB,OC,OD,OP,易知 $V_{P-ABCD}=V_{O-ABCD}+V_{O-PAD}+V_{O-PAB}+V_{O-PBC}+V_{O-PCD}$,即$\frac{1}{3}\cdot m^2\cdot m=\frac{1}{3}\cdot m^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot m^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}m^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}m^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot m^2\cdot R$,解得 $R=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})m$,所以此球的最大半径是$\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})m$.

12 $(2+\sqrt{2})R$ 【解析】由题意知,小球要分两层放置且每层两个. 设下层两小球的球心分别是 A,B,上层两小球的球心分别是 C,D. 此时,圆柱的底面半径 = 两小球半径的和,恰好使两小球外切,且与圆柱的母线相切. 圆柱的高 = 上层小球的上方半径 + AB 与 CD 间的距离 + 下层小球的下方半径 = $2R$ + AB 与 CD 间的距离. 设 AB,CD 的中点分别为 E,F. 很明显,四面体 $ABCD$ 每条棱的长都是 $2R$,容易求出 $EC=ED,FA=FB$. 由 $EC=ED,CF=DF$,得 $EF\perp CD$. 由 $FA=FB,AE=BE$,得 $EF\perp AB$. $\therefore EF$是 AB 与 CD 间的距离,圆柱的高 $=2R+EF$. 由勾股定理,有 $CE^2+AE^2=AC^2,CE^2=EF^2+CF^2$. 两式相减,消去 CE,得 $AE^2=AC^2-EF^2-CF^2$, $\therefore EF^2=AC^2-AE^2-CF^2=(2R)^2-R^2-R^2=2R^2$, $\therefore EF=\sqrt{2}R$. $\therefore$ 圆柱的高 $=2R+\sqrt{2}R=(2+\sqrt{2})R$.

专题 32 空间几何体的表面积与体积

5 年高考真题演练

1 **A** 【解析】设球半径为 R cm,根据已知条件知正方体的上底面与球相交所得截面圆的半径为 4 cm,球心到截面的距离为$(R-2)$cm,所以由$4^2+(R-2)^2=R^2$,得 $R=5$,所以球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500\pi}{3}$ cm^3,选 A.

2 **B** 【解析】由题意可知该四棱锥为正四棱锥,底面边长为 2,高为 2,侧面上的斜高为 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,所以 $S_{侧}=4\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}$, $V=\frac{1}{3}\times 2^2\times 2=\frac{8}{3}$.

3 **C** 【解析】由几何体的形成过程知所得几何体为圆柱,底面半径为 1,高为 1,其侧面积 $S=2\pi rh=2\pi\times 1\times 1=2\pi$.

4 **A** 【解析】所得圆柱体的底面半径为 1,母线长为 1,所以其侧面积 $S=2\pi\times 1\times 1=2\pi$,故选 A.

5 **C** 【解析】由三视图可知该零件是一个底面半径为 2、高为 4 的圆柱和一个底面半径为 3、高为 2 的圆柱的组合体,所以该组合体的体积 $V_1=\pi\cdot 2^2\cdot 4+\pi\cdot 3^2\cdot 2=34\pi$,原来的圆柱体毛坯的体积为 $V=\pi\cdot 3^2\cdot 6=54\pi$,则切削掉部分的体积为 $V_2=54\pi-34\pi=20\pi$,所以切削掉部分的体积与原来的圆柱体毛坯体积的比值为$\frac{20\pi}{54\pi}=\frac{10}{27}$. 故选 C.

6 **B** 【解析】$V\approx\frac{2}{75}L^2h=\frac{1}{3}\pi r^2h\Rightarrow\frac{2}{75}L^2=\frac{1}{3}\pi r^2$,而 $L=2\pi r$,则 $\pi=\frac{25}{8}$. 选 B.

7 **C** 【解析】由题意可知 $AD\perp BC$,由面面垂直的性质定理可得 $AD\perp$平面 DB_1C_1,又 $AD=2\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$,所以 $V_{A-B_1DC_1}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle B_1DC_1}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=1$,故选 C.

8 **A** 【解析】如图,正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面中心为 H.

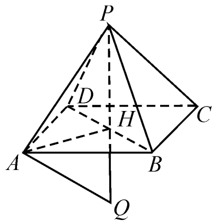
在底面正方形 $ABCD$ 中,$AH=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$,又 $PH=4$,故在 Rt $\triangle PAH$ 中,$PA=\sqrt{PH^2+AH^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$.

则由正四棱锥的性质可得,其外接球的球心 O 在 PH 所在的直线上,设其外接球的直径为 $PQ=2r$.

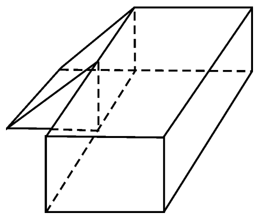
又 A 在正四棱锥外接球的表面上,所以 $AP\perp AQ$.

又 $AH\perp PH$,由射影定理可得 $PA^2=PH\times PQ$,故

$2r=PQ=\dfrac{PA^2}{PH}=\dfrac{(3\sqrt{2})^2}{4}=\dfrac{9}{2}$，所以 $r=\dfrac{9}{4}$. 故该球的表面积为 $S=4\pi r^2=4\pi\left(\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{81\pi}{4}$，故选 A.

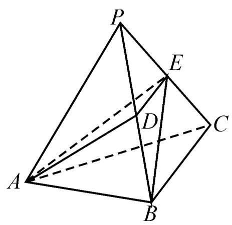


第 8 题图


第 9 题图

9 **B** 【解析】由三视图可知，该几何体的直观图如图所示，则该几何体的体积 $V=V_{四棱柱}+V_{三棱柱}=4\times6\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times3\times3=90(\mathrm{cm}^3)$.

10 $\dfrac{1}{4}$ 【解析】如图，设点 C 到平面 PAB 的距离为 h，三角形 PAB 的面积为 S，则 $V_2=\dfrac{1}{3}Sh$，$V_1=V_{E-ADB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{1}{2}h=\dfrac{1}{12}Sh$，所以$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{4}$.



第 10 题图

11 $\dfrac{3}{2}$ 【解析】设甲、乙两个圆柱的底面半径分别是 r_1,r_2，母线长分别是 l_1,l_2. 则由$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{4}$可得$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3}{2}$. 又两个圆柱的侧面积相等，即 $2\pi r_1l_1=2\pi r_2l_2$，则$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{2}{3}$，所以$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{S_1l_1}{S_2l_2}=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{2}$.

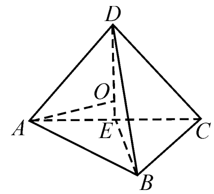
高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**C**	**B**	**B**	**C**
题号	6	7	8		
答案	**A**	**D**	**C**		

1 **D** 【解析】设球的半径为 R，其内接正方体的棱长为 a，则易知 $R^2=\dfrac{3}{4}a^2$，则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi R^2}{6\times\left(\dfrac{4}{3}R^2\right)}=\dfrac{\pi}{2}$，故选 D.

2 **C** 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=1$，$\angle ABC=120°$，由余弦定理有 $AC=\sqrt{3}$，直三棱柱外接球的球心 O 位于上、下底外心 O_1,O_2 连线的中点处，在 $\triangle ABC$ 中，设其外接圆的半径为 r，则$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin120°}=2r$，即 $r=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2B$ 中，$OO_2=\sqrt{3}$，所以$(OB)^2=OO_2^2+r^2=(\sqrt{3})^2+1=4$，即球的半径 $R=2$，所以球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$，故选 C.

3 **B** 【解析】根据三视图知，原几何体为一个如图所示的三棱锥 $D-ABC$，其中平面 $ADC\perp$平面 ABC，$\triangle ADC$ 为等边三角形. 取 AC 的中点 E，连接 DE,BE，则 $DE\perp AC$，所以 $DE\perp$平面 ABC，所以 $DE\perp EB$. 由题意知 $AE=EC=EB=1$，$DE=\sqrt{3}$，所以 $AD=2$. 设此三棱锥的外接球的球心为 O，则它落在高线 DE 上，连接 OA，则有 $AO^2=AE^2+OE^2=1+OE^2$，$AO=DO=DE-OE=\sqrt{3}-OE$，所以 $AO=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故球 O 的半径为$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故该几何体的外接球的表面积 $S=4\pi\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{16\pi}{3}$，故选 B.

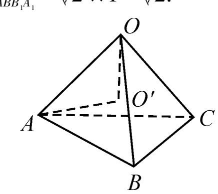


第 3 题图

4 **B** 【解析】由平面 $ABC\perp$平面 ACD，且 O 为 AC 的中点可知 $BO\perp$平面 ACD，易知 $BO=2$，故三棱锥 $N-AMC$ 的高为 $ON=2-x$，$S_{\triangle AMC}=\dfrac{1}{2}\cdot MC\cdot AD=\sqrt{2}x$，故三棱锥 $N-AMC$ 的体积为 $y=f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot(2-x)\cdot\sqrt{2}x=\dfrac{1}{3}(-\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x)(0<x<2)$，函数 $f(x)$ 的图象为开口向下的抛物线的一部分，故选 B.

5 **C** 【解析】由题意知，球心在侧面 BCC_1B_1 的中心 O 上，BC 为截面圆的直径，$\therefore\angle BAC=90°$，$\triangle ABC$ 的外接圆圆心 N 位于 BC 的中点，同理$\triangle A_1B_1C_1$ 的外心 M 是 B_1C_1 的中点. 设正方形 BCC_1B_1 边长为 x，在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC_1$ 中，$OM=\dfrac{x}{2}$，$MC_1=\dfrac{x}{2}$，$OC_1=R=1$(R 为球的半径)，$\therefore\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=1$，即 $x=\sqrt{2}$，则 $AB=AC=1$，$\therefore S_{矩形ABB_1A_1}=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$.

6 **A** 【解析】如图，球心 O 在截面 ABC 的射影为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心 O'. 由题意知 $OO'=\dfrac{R}{2}$，$OA=R$，其中 R 为球 O 的半径. 在$\triangle ABC$ 中，



第 6 题图

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos120°}$$

$$=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}$$

$=2\sqrt{3}$.

设$\triangle ABC$的外接圆半径为r,则$2r=\dfrac{AC}{\sin 120°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$,

得$r=2$,即$O'A=2$.在$Rt\triangle OO'A$中,$OO'^2+O'A^2=OA^2$,即$\dfrac{R^2}{4}+4=R^2$,解得$R^2=\dfrac{16}{3}$,故球O的表面积$S=4\pi R^2=\dfrac{64\pi}{3}$,故选A.

7 D 【解析】由三视图知,该几何体为一个长方体里面挖去一个半球,长方体的体积为$2\times2\times1=4$,半球的体积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi\times1^3=\dfrac{2}{3}\pi$,所以该几何体的体积为$4-\dfrac{2\pi}{3}$.

8 C 【解析】因为在$\triangle ABC$中,$AB=BC=\sqrt{2}$,$AC=2$,所以$AC^2=AB^2+BC^2$,截面小圆半径$r=\dfrac{1}{2}AC=1$.因为四面体$ABCD$体积的最大值为$\dfrac{2}{3}$,所以$V_{D-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times h=\dfrac{2}{3}$,解得$h=2$.设球的半径为$R$,球心为$O$,$O$到截面的距离为$d$,当$D$到底面$ABC$距离最远,即$h=R+d$时,四面体$ABCD$体积最大.因为$d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-1}$,所以$\sqrt{R^2-1}+R=2$,即$\sqrt{R^2-1}=2-R$,解得$R=\dfrac{5}{4}$,所以这个球的表面积为$4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{25}{16}=\dfrac{25}{4}\pi$.

9 43π 【解析】依题意得,该三棱锥的三组对棱分别相等,因此可将该三棱锥补形成一个长方体,设该长方体的长、宽、高分别为a、b、c,且其外接球的半径为R,则$\begin{cases}a^2+b^2=6^2,\\b^2+c^2=5^2,\\c^2+a^2=5^2,\end{cases}$得$a^2+b^2+c^2=43$,所以$(2R)^2=a^2+b^2+c^2=43$,
所以该三棱锥的外接球的表面积为$4\pi R^2=43\pi$.

10 $\dfrac{500}{3}\pi$ 【解析】设球的半径为R cm,则由题意得$(R-2)^2+4^2=R^2$,解得$R=5$,所以球的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi\times5^3=\dfrac{500}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

11 $\dfrac{2c}{3}\sqrt{a^2-c^2-1}$ 【解析】根据条件作出与AD垂直的截面,再利用锥体的体积公式求解.过点B在平面BAD中作$BE\perp AD$,垂足为E,连接CE,因为$BC\perp AD$,所以$AD\perp$平面BCE,所以四面体$ABCD$的体积为$\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot AD$,当$\triangle BCE$的面积最大时,四面体$ABCD$的体积最大.因为$AB+BD=AC+CD=2a$,所以点$B$、$C$在一个椭圆上运动,由椭圆知识可知当$AB=BD=AC=CD=a$时,$BE=CE=\sqrt{a^2-c^2}$为最大值,此时截面$\triangle BCE$面积最大,为$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{a^2-c^2-1}=\sqrt{a^2-c^2-1}$,此时四面体$ABCD$的体积最大,为$\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot AD=\dfrac{2c}{3}\cdot\sqrt{a^2-c^2-1}$.

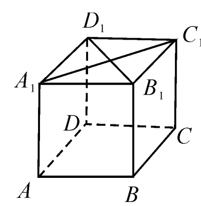
专题33 平面的基本性质、空间两条直线

5年高考真题演练

1 A 【解析】取CD的中点G,连接EG,FG,则易证$CD\perp EG$,$CD\perp FG$,所以$CD\perp$平面EFG.又$AB\parallel CD$,所以$AB\perp$平面EFG,所以$AB\perp EF$,所以正方体中上、下、前、后四个面所在平面与EF相交(左、右两个面所在平面与EF平行),即$n=4$.由CE在正方体的下底面所在平面内,知CE与上底面所在平面平行,故正方体中前、后、左、右四个面所在平面与CE相交,即$m=4$.所以$m+n=8$.

2 A **3** B

4 C 【解析】解法一:直接法:如图,在上底面中选B_1D_1,四个侧面中的面对角线都与它成$60°$,共8对,同样A_1C_1对应的也有8对,下底面也有16对,这共有32对;左右侧面与前后侧面中共有16对.所以全部共有48对.



第4题图

解法二:间接法:正方体的12条面对角线中,任意两条垂直、平行或所成角为$60°$,所以所成角为$60°$的共有$C_{12}^2-12-6=48$.

5 B 【解析】解法一:设正四面体的棱长为2.
如图(1),取AD的中点F,连接EF、CF.
在$\triangle ABD$中,由$AE=EB$,$AF=FD$,得$EF\parallel BD$,且$EF=\dfrac{1}{2}BD=1$.

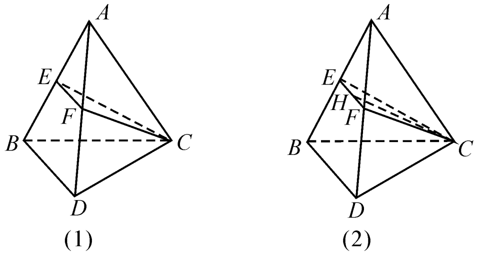
故$\angle CEF$为直线CE与BD所成的角或其补角.

在$\triangle ABC$中,$CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$;

在$\triangle ADC$中,$CF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}$.

在$\triangle CEF$中,$\cos\angle CEF=\dfrac{CE^2+EF^2-CF^2}{2CE\cdot EF}=\dfrac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

所以直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.



第 5 题图

解法二：设正四面体的棱长为 2.

如图(2)，取 AD 的中点 F，连接 EF、CF.

在$\triangle ABD$ 中，由 $AE=EB, AF=FD$，得 $EF/\!/BD$，

且 $EF=\frac{1}{2}BD=1$.

故$\angle CEF$ 为直线 CE 与 BD 所成的角或其补角.

在$\triangle ABC$ 中，$CE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$；

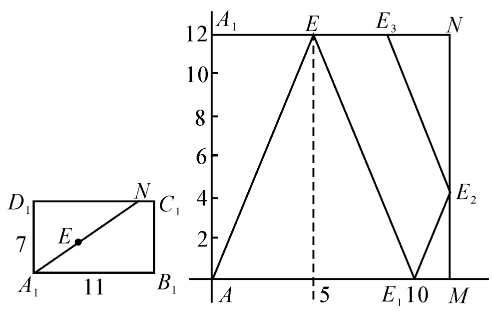
在$\triangle ADC$ 中，$CF=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}$.

取 EF 的中点 H，连接 CH，则 $EH=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}$，且 $CH\perp EF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CEH$ 中，$\cos\angle CEF=\frac{EH}{CE}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

所以直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

6 **C** 【解析】根据反射的对称性，质点是在过 A, E, A_1 的平面内运动. 因为$\frac{7}{11}<\frac{3}{4}$，所以过 A, E, A_1 作长方体的截面 AA_1NM 如图所示.



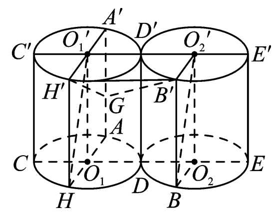
第 6 题图

设点 A 关于平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的对称点为 A'，易知它在 z 轴上，且 $A'A_1=AA_1=12$，连接 $A'E$ 并延长交平面 $ABCD$ 于点 E_1，因为 $A_1E=5$，所以 $AE_1=10$，且 E_1 到 AB, AD 的距离分别为 6，8，即 $E_1(8,6,0)$，而它在线段 AM 上，从而知 $L_1=AE=EE_1=L_2$；事实上，只需要在 AA_1NM 内，过 E_1 作 AE 的平行线交 MN 于点 E_2，再过 E_2 作 E_1E 的平行线交 A_1N 于点 E_3，可知 $EE_1>E_2E_3=L_4>E_1E_2=L_3$，故 $L_1=L_2>L_4>L_3$，故选 C.

7 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 【解析】将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补充成为四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其中四边形 $ABCD$ 为菱形. 因为 $BC_1/\!/AD_1$，所以异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角为 $\angle B_1AD_1$. 设棱长为 a，则由题中条件可知 $AB_1=\sqrt{3}a, B_1D_1=\sqrt{3}a, AD_1=\sqrt{2}a$，则由余弦定理可得 $\cos\angle B_1AD_1=\frac{3a^2+2a^2-3a^2}{2\sqrt{6}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

8 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】点 P 到直线 CC_1 的距离等于点 P 在平面$ABCD$上的射影到点 C 的最小值为 $P'C$ 的长度的最小值. 当 $P'C\perp DE$ 时，$P'C$ 的长度最小，此时 $P'C=\frac{2\times 1}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

9 【解析】(1) 如图，将两个半圆柱补充为两个圆柱，延长 $A'O_1'$交圆 O_1'于点 H'，延长 AO_1 交圆 O_1 于点 H，由题知 $O_1'H'$ 平移到 $O_2'B'$，O_1H 平移到 O_2B，于是



第 9 题图

$O_2'B'/\!/O_1'H'$. 又 B、B' 分别是$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{D'E'}$的中点，

$\therefore BO_2/\!/B'O_2'$，即 $BO_2/\!/H'O_1'$，$\therefore BO_2/\!/O_1'A'$，故 O_1'、A'、O_2、B 四点共面.

(2) 由点 B' 是$\overset{\frown}{D'E'}$的中点得 $D'E'\perp B'O_2'$. 又 $D'E'\perp O_2'O_2$，$B'O_2'\cap O_2'O_2=O_2'$，$\therefore D'E'\perp$ 平面 $B'O_2'O_2B$，而 $BO_2'\subset$ 平面 $B'O_2'O_2B$，$\therefore D'E'\perp BO_2'$. 又 $H'B'/\!/D'E'$，$\therefore BO_2'\perp H'B'$，

另一方面，可得 $BO_2'/\!/HO_1'$，

在正方形 $HAA'H'$ 中，点 G、O_1'分别是 AA'、$A'H'$ 的中点，

$\therefore HO_1'\perp H'G$，于是 $BO_2'\perp H'G$.

又$\because H'B'\cap H'G=H'$，$\therefore BO_2'\perp$ 平面 $H'B'G$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	A	C	A	D
题号	6	7			
答案	B	D			

1 **D** **2** **A** **3** **C**

4 **A** 【解析】只有第四个图中的四点不共面.

5 **D** 【解析】连接 AC 交 BD 于点 O，连接 VO，因为四棱锥 $V-ABCD$ 是正四棱锥，所以 $VO\perp$ 平面 $ABCD$，故 $BD\perp VO$. 又四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BD\perp AC$，所以 $BD\perp$ 平面 VAC，所以 $BD\perp VA$，即异面直线 VA 与 BD 所成角的大小为$\frac{\pi}{2}$，选 D.

6 **B** 【解析】因为四边形 $ABCD$ 为正方形,故 $CD/\!/AB$,则 CD 与 PA 所成的角即为 AB 与 PA 所成的角,即为 $\angle PAB$. 在 $\triangle PAB$ 内,$PB=PA=\sqrt{5}$,$AB=2$,利用余弦定理可知 $\cos\angle PAB=\dfrac{PA^2+AB^2-PB^2}{2\times PA\times AB}=\dfrac{5+4-5}{2\times\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,故选 B.

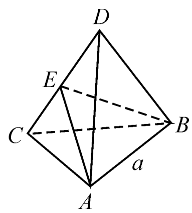
7 **D** 【解析】设四棱锥的两组不相邻的侧面的交线为 m,n,直线 m,n 确定了一个平面 β,作与 β 平行的平面 α,与四棱锥的各个侧面相截,则截得的四边形必为平行四边形,而这样的平面 α 有无数多个.

8 $60°$ 【解析】在平面 ABC 内,过 A 作 DB 的平行线 AE,过 B 作 $BH\perp AE$ 于 H,连接 B_1H,则在 $\text{Rt}\triangle AHB_1$ 中,$\angle B_1AH$ 为 AB_1 与 BD 所成角. 设 $AB=1$,则 $A_1A=\sqrt{2}$,$\therefore B_1A=\sqrt{3}$,$AH=BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \cos\angle B_1AH=\dfrac{AH}{AB_1}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \angle B_1AH=60°$.

9 $(0,\sqrt{2})$ 【解析】如图所示的四面体 $ABCD$ 中,设 $AB=a$,则由题意可得 $CD=\sqrt{2}$,其他边的长都为 1,故三角形 ACD 及三角形 BCD 都是以 CD 为斜边的等腰直角三角形,显然 $a>0$. 取 CD 中点 E,连接 AE,BE,则 $AE\perp CD$,$BE\perp CD$ 且 $AE=BE=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,显然 A,B,E 三点能构成三角形,应满足任意两边之和大于第三边,可得 $2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}>a$,解得 $0<a<\sqrt{2}$.



第 9 题图

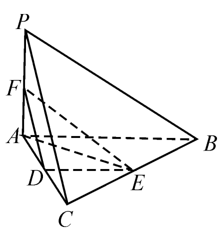
10 $60°$ 【解析】如图所示,分别取 PA,AC,CB 的中点 F,D,E,连接 FD,DE,EF,AE,则 $\angle FDE$ 是直线 PC 与 AB 所成角或其补角.

设 $PA=AC=BC=2a$,在 $\triangle FDE$ 中,易求得 $FD=\sqrt{2}a$,$DE=\sqrt{2}a$,$FE=\sqrt{6}a$,

根据余弦定理,得 $\cos\angle FDE=\dfrac{2a^2+2a^2-6a^2}{2\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $\angle FDE=120°$.

所以直线 PC 与 AB 所成角的大小是 $60°$.



第 10 题图

11 $60°$ 【解析】先通过平移将两条异面直线平移到同一个起点 B,得到的锐角 $\angle A_1BD$ 就是异面直线 MN 与 PQ 所成的角,在 $\triangle A_1BD$ 中求出此角即可. 连接 A_1B,BD,A_1D,则 $A_1B=BD=A_1D$,且 $MN/\!/BD$,$PQ/\!/A_1B$,所以异面直线 MN 与 PQ 所成的角等于 $60°$.

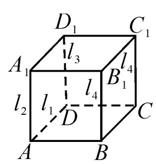
12 $\dfrac{1}{2}$ 【解析】过 F 点作 $HF/\!/BE$,过 A 点作 EF 的垂线 AG,垂足为 G. 连接 HG,HE,AH. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2,$\because$ 面 $AEF\perp$ 面 $BCDFE$,且 $AG\perp EF$,$\therefore AG\perp$ 面 $BCDFE$. $\because BE=BH=AE=AF=1$,$\therefore EH=EF=\sqrt{2}$. $\because G$ 为 EF 的中点,$\therefore EG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$AG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又$\because HF=2$,$\therefore \angle HEG=90°$,$\therefore$ 在 $\triangle EHG$ 中,$HG=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AGH$ 中,$AH=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$. $\because HF/\!/BE$,$\therefore AF$ 与 BE 所成的角即为 $\angle AFH$. 在 $\triangle AHF$ 中,$AF=1$,$HF=2$,$AH=\sqrt{3}$,$\therefore \angle HAF=90°$. $\therefore \cos\angle AFH=\dfrac{AF}{HF}=\dfrac{1}{2}$.

专题 34 直线、平面平行的判定与性质

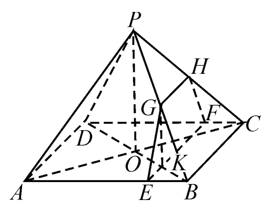
5 年高考真题演练

1 **C** **2** **D**

3 **D** 【解析】构造如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,取 l_1 为 AD,l_2 为 AA_1,l_3 为 A_1B_1,当取 l_4 为 B_1C_1 时,$l_1/\!/l_4$,当取 l_4 为 BB_1 时,$l_1\perp l_4$,故排除 A、B、C,选 D.



第 3 题图



第 4 题图

4 【解析】(1)因为 $BC/\!/$平面 $GEFH$,$BC\subset$平面 PBC,且平面 $PBC\cap$平面 $GEFH=GH$,所以 $GH/\!/BC$.

同理可证 $EF/\!/BC$,

因此 $GH/\!/EF$.

(2)连接 AC,BD 交于点 O,BD 交 EF 于点 K,连接 OP,GK.

因为 $PA=PC$,O 是 AC 的中点,所以 $PO\perp AC$,同理可得 $PO\perp BD$.

又 $BD\cap AC=O$,且 AC,BD 都在底面内,所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$.

又因为平面 $GEFH\perp$平面 $ABCD$,

且 $PO\not\subset$平面 $GEFH$,所以 $PO/\!/$平面 $GEFH$.

因为平面 $PBD\cap$平面 $GEFH=GK$,

所以 $PO/\!/GK$,且 $GK\perp$底面 $ABCD$,

从而 $GK\perp EF$.

所以 GK 是梯形 $GEFH$ 的高.

由 $AB=8,EB=2$ 得 $EB:AB=KB:DB=1:4$,

从而 $KB=\frac{1}{4}DB=\frac{1}{2}OB$,即 K 为 OB 的中点.

再由 $PO\parallel GK$ 得 $GK=\frac{1}{2}PO$,即 G 是 PB 的中点,

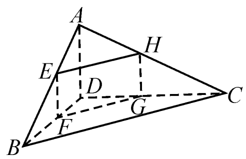
且 $GH=\frac{1}{2}BC=4$.

由已知可得 $OB=4\sqrt{2}$, $PO=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{68-32}=6$,

所以 $GK=3$.

故四边形 $GEFH$ 的面积 $S=\frac{GH+EF}{2}\cdot GK=\frac{4+8}{2}\times 3=18$.

5【解析】(1)由该四面体的三视图可知, $BD\perp DC$, $BD\perp AD$, $AD\perp DC$, $BD=CD=2$, $AD=1$,



第 5 题图

$\therefore AD\perp$ 平面 BDC,

$\therefore$ 四面体体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 1=\frac{2}{3}$.

(2) $\because BC\parallel$ 平面 $EFGH$,

平面 $EFGH\cap$ 平面 $BDC=FG$,平面 $EFGH\cap$ 平面 $ABC=EH$,

$\therefore BC\parallel FG$, $BC\parallel EH$, $\therefore FG\parallel EH$.

同理 $EF\parallel AD$, $HG\parallel AD$, $\therefore EF\parallel HG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

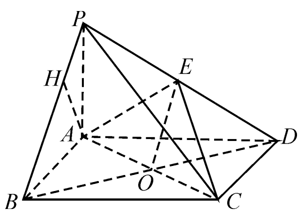
又 $\because AD\perp$ 平面 BDC,

$\therefore AD\perp BC$, $\therefore EF\perp FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

6【解析】(1)设 BD 与 AC 的交点为 O,连接 EO.

因为 $ABCD$ 为矩形,所以 O 为 BD 的中点. 又 E 为 PD 的中点,所以 $EO\parallel PB$. $EO\subset$ 平面 AEC, $PB\not\subset$ 平面 AEC,所以 $PB\parallel$ 平面 AEC.



第 6 题图

(2) $V=\frac{1}{6}PA\cdot AB\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{6}AB$.

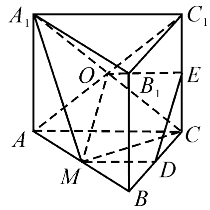
由 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$,可得 $AB=\frac{3}{2}$.

作 $AH\perp PB$ 交 PB 于 H.

由题设知 $BC\perp$ 平面 PAB,所以 $BC\perp AH$,故 $AH\perp$ 平面 PBC. 又 $AH=\frac{PA\cdot AB}{PB}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

所以 A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

7【解析】(1)因为四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都是矩形,



第 7 题图

所以 $AA_1\perp AB$, $AA_1\perp AC$.

因为 AB, AC 为平面 ABC 内两条相交直线,

所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC.

因为直线 $BC\subset$ 平面 ABC,

所以 $AA_1\perp BC$.

又由已知, $AC\perp BC$, AA_1, AC 为平面 ACC_1A_1 内两条相交直线,

所以直线 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

(2)取线段 AB 的中点 M,连接 A_1M, MC, A_1C, AC_1,设 O 为 A_1C, AC_1 的交点.

由已知, O 为 AC_1 的中点.

连接 MD, OE,则 MD, OE 分别为 $\triangle ABC$, $\triangle ACC_1$ 的中位线,

所以, $MD \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$, $OE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$,

因此 $MD \mathrel{\underline{\parallel}} OE$.

连接 OM,从而四边形 $MDEO$ 为平行四边形,则 $DE\parallel MO$.

因为直线 $DE\not\subset$ 平面 A_1MC, $MO\subset$ 平面 A_1MC,

所以直线 $DE\parallel$ 平面 A_1MC.

即线段 AB 上存在一点 M(线段 AB 的中点),使直线 $DE\parallel$ 平面 A_1MC.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**B**	**B**	**C**	**D**
题号	6				
答案	**B**				

1 **D** 【解析】因为 a 与 B 确定一个平面,该平面与 β 的交线即为符合条件的直线.

2 **B** 【解析】A 中 a 可能在 α 内,C 中 a、b 可能异面,D 中 a、b 可能异面也可能相交,B 中 $\alpha\parallel\beta$, $a\subset\alpha$,则 α 与 β 无公共点, $\therefore a\parallel\beta$.

3 **B** 【解析】对于 A 选项, $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$ 时, α、β 可以平行,也可以相交(也可以参照教室的一角), $\therefore$ A 错;对于 B,当 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$ 时,根据直线与平面垂直的性质定理知 $m\parallel n$,故 B 正确. 对于 C 选项, $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$ 时, m、n 可以平行,也可以相交,也可以异面, $\therefore$ C 错. 对于 D 选项, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$ 时, α、β 可以平行,也可以相交,如 m 平行于 α、β 的交线

时，α、β便相交，$\therefore$ D 错.

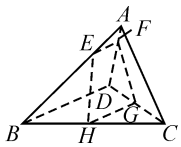
4 **C** 【解析】由平行公理可知①正确；②不正确，若三条直线在同一平面内，则 $a /\!/ c$；③不正确，a 与 b 有可能平行，也有可能异面或相交；由线面垂直的性质可知④正确.

5 **D** 【解析】由 $m\subset\alpha$，$n /\!/ \alpha$ 可知 m 与 n 不相交，又 m 与 n 共面，故 $m /\!/ n$.

6 **B** 【解析】如图所示，由题意知，$EF /\!/ BD$，

且 $EF=\frac{1}{5}BD$，$HG /\!/ BD$，

且 $HG=\frac{1}{2}BD$.



第 6 题图

$\therefore EF /\!/ HG$，且 $EF\neq HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

又 $EF /\!/$ 平面 BCD，而 EH 与平面 ADC 不平行. 故选 B.

7 $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ 【解析】$\because$ 平面 $ABCD /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

$\therefore MN /\!/ PQ$.

$\because M$、N 分别是 A_1B_1、B_1C_1 的中点，$AP=\frac{a}{3}$，

$\therefore CQ=\frac{a}{3}$，从而 $DP=DQ=\frac{2a}{3}$，$\therefore PQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

8 $M\in$ 线段 HF 【解析】由题意，得 $HN /\!/$ 面 B_1BDD_1，$FH /\!/$ 面 B_1BDD_1.

$\because HN\cap FH=H$，$\therefore$ 面 $NHF /\!/$ 面 B_1BDD_1.

$\therefore$ 当 M 在线段 HF 上运动时，有 $MN /\!/$ 面 B_1BDD_1.

9 【解析】(1)在梯形 $ABCD$ 中，过点 C 作 $CE\perp AB$，垂足为 E.

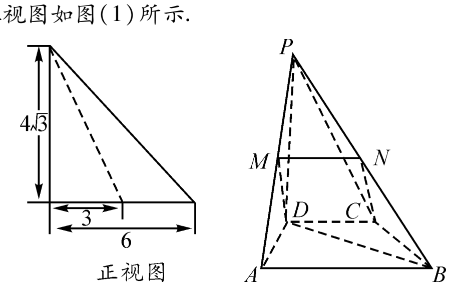
由已知得，四边形 $ADCE$ 为矩形，$AE=CD=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中，由 $BC=5$，$CE=4$，勾股定理得 $BE=3$，从而 $AB=6$. 又由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 得 $PD\perp AD$.

从而在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 中，由 $AD=4$，$\angle PAD=60°$.

得 $PD=4\sqrt{3}$.

正视图如图(1)所示.



(1) (2)

第 9 题图

(2)证明：如图(2)，取 PB 的中点 N，连接 MN，CN.

在 $\triangle PAB$ 中，M 是 PA 的中点，所以 $MN /\!/ AB$，

$MN=\frac{1}{2}AB=3$.

又 $CD /\!/ AB$，$CD=3$，所以 $MN /\!/ CD$，$MN=CD$.

所以四边形 $MNCD$ 为平行四边形，

所以 $DM /\!/ CN$.

又 $DM\not\subset$ 平面 PBC，$CN\subset$ 平面 PBC，

所以 $DM /\!/$ 平面 PBC.

(3)解：$V_{D-PBC}=V_{P-DBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}\cdot PD$，又 $S_{\triangle DBC}=6$，$PD=4\sqrt{3}$，所以 $V_{D-PBC}=8\sqrt{3}$.

10 【解析】(1)证明：设线段 B_1D_1 的中点为 O_1，

$\because BD$ 和 B_1D_1 是四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 两底面上对应的线段，$\therefore BD /\!/ B_1D_1$.

同理，$\because AO$ 和 A_1O_1 是四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 两底面上对应的线段，$\therefore AO /\!/ A_1O_1\Rightarrow A_1O_1 /\!/ OC$，又 $A_1O_1=OC$，$\therefore$ 四边形 A_1OCO_1 为平行四边形.

$\Rightarrow A_1O /\!/ O_1C$，又 $A_1O\cap BD=O$，$O_1C\cap B_1D_1=O_1$，

$\therefore$ 面 $A_1BD /\!/$ 面 CD_1B_1.

(2)解：$\because A_1O\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore A_1O$ 是三棱柱 $A_1B_1D_1-ABD$ 的高.

在正方形 $ABCD$ 中，$AO=1$，$\because AA_1=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OA$ 中，$A_1O=\sqrt{AA_1^2-OA^2}=1$.

三棱柱 $A_1B_1D_1-ABD$ 的体积为 $V_{A_1B_1D_1-ABD}=S_{\triangle ABD}\cdot A_1O=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1=1$.

11 【解析】(1)$BC /\!/ l$.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore BC /\!/ AD$.

又 $BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，$\therefore BC /\!/$ 平面 PAD.

又 $BC\subset$ 平面 PBC，平面 $PBC\cap$ 平面 $PAD=l$.

$\therefore BC /\!/ l$.

(2)$MN /\!/$ 平面 PAD.

证明：取 CD 的中点 E，连接 ME、NE，

$\because M$、N 分别为 AB、PC 的中点，

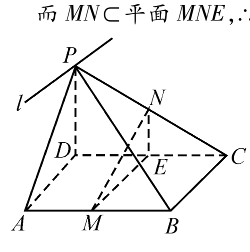
$\therefore ME /\!/ AD$，$NE /\!/ PD$.

又 $ME\not\subset$ 平面 PAD，$NE\not\subset$ 平面 PAD，

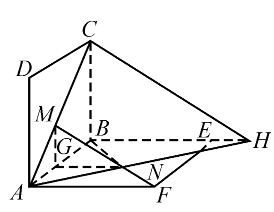
$\therefore ME /\!/$ 平面 PAD，$NE /\!/$ 平面 PAD，

又 $ME\cap NE=E$. $\therefore$ 平面 $MNE /\!/$ 平面 PAD.

而 $MN\subset$ 平面 MNE，$\therefore MN /\!/$ 平面 PAD.



第 11 题图



第 12 题图

12 【解析】(1)如图，设直线 AN 与 BE 交于点 H，连接 CH，

$\because \triangle ANF \backsim \triangle HNB$,

$\therefore \dfrac{FN}{NB}=\dfrac{AN}{NH}$，又$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{FN}{NB}$，

$\therefore \dfrac{AN}{NH}=\dfrac{AM}{MC}$，$\therefore MN /\!/ CH$. 又 $MN \not\subset$ 平面 CBE，$CH \subset$ 平面 CBE，

$\therefore MN /\!/$ 平面 CBE.

(2)存在，过 M 作 $MG \perp AB$，垂足为 G，连接 GN，

则 $MG /\!/ BC$，$\therefore MG /\!/$ 平面 CBE，

又 $MN /\!/$ 平面 CBE，$MG \cap MN = M$，

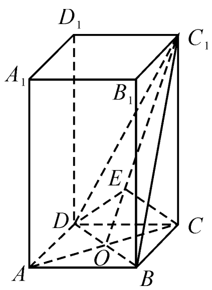
$\therefore$ 平面 $MGN /\!/$ 平面 CBE.

即点 G 在 AB 上，且 $AG:GB=AM:MC=2:3$.

专题 35　直线、平面垂直的判定与性质

5 年高考真题演练

1 **A**　【解析】如图，连接 AC 与 BD 交于点 O，连接 OC_1，过 C 作 $CE \perp OC_1$，垂足为 E，连接 DE，则 $\angle CDE$ 就是 CD 与平面 BDC_1 所成的角，设 $AB=1$，则 $AA_1=CC_1=2$，$OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$OC_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，因为 $\dfrac{1}{2}OC_1 \cdot CE=\dfrac{1}{2}OC \cdot CC_1$，所以 $CE=\dfrac{2}{3}$，所以 $\sin\angle CDE=\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{2}{3}$，故选 A.



第 1 题图

2 **A**　【解析】简化问题，不妨取点 $P \in \alpha$，根据题意，A 中不妨取正方体的一组相邻面，检验可能成立；B 中取正方体的一个底面及与其成 45°的一个体对角面，则 $PQ_1=1$ 时，$PQ_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，不成立；C 中取正方体的一组相对的面，明显有 $PQ_1=1$，$PQ_2=0$，不成立；D 中与 B 类似有 $PQ_1=\sqrt{3}$时，$PQ_2=\dfrac{3}{2}$，不成立，故选 A. 也可以通过折纸的方法很快解决.

3 **D**　【解析】A 中 m,n 可能为平行、垂直、异面直线；B 中 m,n 可能为异面直线；C 中 m 应与 β 中两条相交直线垂直时结论才成立.

4 **B**　【解析】设三棱柱的高为 h，则$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}^{\,2}\times h=\dfrac{9}{4}$，解得$h=\sqrt{3}$. 设三棱柱中底面 ABC 的中心为 Q，则 $PQ=\sqrt{3}$，$AQ=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle APQ$ 中，$\angle PAQ$ 即为直线 PA 与平面 ABC 所成的角，且 $\tan\angle PAQ=\sqrt{3}$，所以 $\angle PAQ=\dfrac{\pi}{3}$.

5 **C**　【解析】选项 A、B、D 中 m 均可能与平面 α 平行、垂直、斜交或在平面 α 内，故选 C.

6 **B**　【解析】对于选项 A，若 $m /\!/ \alpha$，$n /\!/ \alpha$，则 m 与 n 可能相交、平行或异面，A 错误；显然选项 B 正确；对于选项 C，若 $m \perp \alpha$，$m \perp n$，则 $n \subset \alpha$ 或 $n /\!/ \alpha$，C 错误；对于选项 D，若 $m /\!/ \alpha$，$m \perp n$，则 $n /\!/ \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ 或 n 与 α 相交，D 错误. 故选 B.

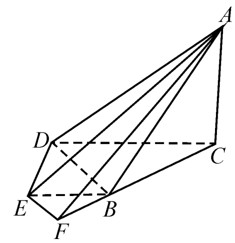
7 【解析】(1)连接 BD，在直角梯形 $BCDE$ 中，

由 $DE=BE=1$，$CD=2$，得 $BD=BC=\sqrt{2}$，

由 $AC=\sqrt{2}$，$AB=2$，得 $AB^2=AC^2+BC^2$，即 $AC \perp BC$.

又平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$，

从而 $AC \perp$ 平面 $BCDE$.



第 7 题图

(2)在直角梯形 $BCDE$ 中，由 $BD=BC=\sqrt{2}$，$DC=2$.

得 $BD \perp BC$，又平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$，

所以 $BD \perp$ 平面 ABC.

作 $EF /\!/ BD$，与 CB 延长线交于 F，连接 AF，则$EF \perp$ 平面 ABC.

所以$\angle EAF$ 是直线 AE 与平面 ABC 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中，由 $EB=1$，$\angle EBF=\dfrac{\pi}{4}$，得 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，由 $AC=\sqrt{2}$，$CF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，得$AF=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，由 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AF=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，得 $\tan\angle EAF=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

所以，直线 AE 与平面 ABC 所成的角的正切值是$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

8 【解析】(1)连接 AD_1，由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，知 $AD_1 /\!/ BC_1$，因为 F,P 分别是 AD，DD_1 的中点，所以 $FP /\!/ AD_1$，从而 $BC_1 /\!/ FP$.

而 $FP \subset$ 平面 $EFPQ$，且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EFPQ$，故直线 $BC_1 /\!/$ 平面 $EFPQ$.

(2)如图，连接 AC，BD，则 $AC \perp BD$.

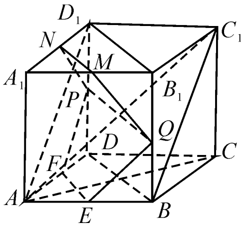
由 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，可得 $CC_1 \perp BD$.

又 $AC \cap CC_1 = C$，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1.

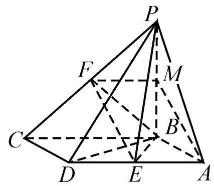
而 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1，所以 $BD \perp AC_1$.

连接 B_1D_1，因为 M,N 分别是 A_1B_1，A_1D_1 的中点，所以 $MN /\!/ B_1D_1$，故 $MN /\!/ BD$，从而 $MN \perp AC_1$. 同理可证 $PN \perp AC_1$. 又 $PN \cap MN = N$，所以直线 $AC_1 \perp$

平面 $PQMN$.



第 8 题图



第 9 题图

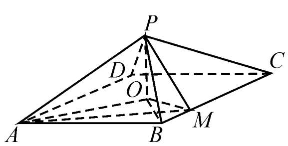
9【解析】(1) 如图, 取 PB 中点 M, 连接 MF, AM. 因为 F 为 PC 中点, 故 $MF /\!/ BC$ 且 $MF=\frac{1}{2}BC$. 由已知有 $BC /\!/ AD$, $BC=AD$. 又由于 E 为 AD 中点, 因而 $MF /\!/ AE$ 且 $MF=AE$, 故四边形 $AMFE$ 为平行四边形, 所以 $EF /\!/ AM$. 又 $AM \subset$ 平面 PAB, 而 $EF \not\subset$ 平面 PAB, 所以 $EF /\!/$ 平面 PAB.

(2)(i) 连接 PE, BE. 因为 $PA=PD$, $BA=BD$, 而 E 为 AD 中点, 故 $PE \perp AD$, $BE \perp AD$, 所以 $\angle PEB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角. 在 $\triangle PAD$ 中, 由 $PA=PD=\sqrt{5}$, $AD=2$, 可解得 $PE=2$. 在 $\triangle ABD$ 中, 由 $BA=BD=\sqrt{2}$, $AD=2$, 可解得 $BE=1$. 在 $\triangle PEB$ 中, $PE=2$, $BE=1$, $\angle PEB=60°$, 由余弦定理, 可解得 $PB=\sqrt{3}$, 从而 $\angle PBE=90°$, 即 $BE \perp PB$. 又 $BC /\!/ AD$, $BE \perp AD$, 从而 $BE \perp BC$, 因此 $BE \perp$ 平面 PBC. 又 $BE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以, 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$.

(ii) 连接 BF. 由(i)知, $BE \perp$ 平面 PBC, 所以 $\angle EFB$ 为直线 EF 与平面 PBC 所成的角. 由 $PB=\sqrt{3}$ 及已知, 得 $\angle ABP$ 为直角. 而 $MB=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $AM=\frac{\sqrt{11}}{2}$. 故 $EF=\frac{\sqrt{11}}{2}$. 又 $BE=1$, 故在直角三角形 EBF 中, $\sin\angle EFB=\frac{BE}{EF}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

所以, 直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

10【解析】(1) 如图, 因 $ABCD$ 为菱形, O 为菱形中心, 连接 OB, 则 $AO \perp OB$. 因 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$, 故



第 10 题图

$OB=AB\cdot\sin\angle OAB=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,

又因 $BM=\frac{1}{2}$, 且 $\angle OBM=\frac{\pi}{3}$, 在 $\triangle OBM$ 中,

$OM^2=OB^2+BM^2-2OB\cdot BM\cdot\cos\angle OBM=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$.

所以 $OB^2=OM^2+BM^2$, 故 $OM \perp BM$.

又 $PO \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PO \perp BC$. 从而 BC 与平面 POM 内两条相交直线 OM, PO 都垂直,

所以 $BC \perp$ 平面 POM.

(2) 由(1)可得, $OA=AB\cdot\cos\angle OAB=2\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

设 $PO=a$, 由 $PO \perp$ 底面 $ABCD$ 知, $\triangle POA$ 为直角三角形, 故

$PA^2=PO^2+OA^2=a^2+3$.

由 $\triangle POM$ 也是直角三角形, 故 $PM^2=PO^2+OM^2=a^2+\frac{3}{4}$.

连接 AM, 在 $\triangle ABM$ 中, $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\angle ABM=2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times2\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{21}{4}$.

由已知 $MP \perp AP$, 故 $\triangle APM$ 为直角三角形, 则

$PA^2+PM^2=AM^2$, 即 $a^2+3+a^2+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$, 得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$(舍去),

即 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

此时 $S_{四边形ABMO}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle OMB}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB+\frac{1}{2}\cdot BM\cdot OM=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$.

所以四棱锥 $P-ABMO$ 的体积

$V_{P-ABMO}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形ABMO}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{16}$.

11【解析】(1) 由 $AA_1 \perp BC$ 知 $BB_1 \perp BC$, 又 $BB_1 \perp A_1B$, 故 $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1, 即 $BB_1 \perp A_1C$,

又 $BB_1 /\!/ CC_1$, 所以 $A_1C \perp CC_1$.

(2) 解法一: 设 $AA_1=x$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BB_1$ 中, $A_1B=\sqrt{A_1B_1^2-BB_1^2}=\sqrt{4-x^2}$.

同理, $A_1C=\sqrt{A_1C_1^2-CC_1^2}=\sqrt{3-x^2}$. 在 $\triangle A_1BC$ 中, $\cos\angle BA_1C=\frac{A_1B^2+A_1C^2-BC^2}{2A_1B\cdot A_1C}$

$=-\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)(3-x^2)}}$, $\sin\angle BA_1C=\sqrt{\frac{12-7x^2}{(4-x^2)(3-x^2)}}$,

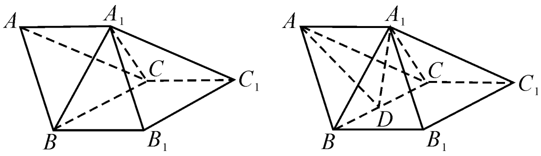
所以 $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1C\cdot\sin\angle BA_1C$

$=\frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$.

从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=S_{直}\cdot l=S_{\triangle A_1BC}\cdot AA_1=\frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2}$.

因 $x\sqrt{12-7x^2}=\sqrt{12x^2-7x^4}=\sqrt{-7\left(x^2-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{36}{7}}$,

故当 $x=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$,即 $AA_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$时,体积 V 取到最大值$\frac{3\sqrt{7}}{7}$.



(1)　　　　(2)

第 11 题图

解法二:如图(2),过 A_1 作 BC 的垂线,垂足为 D,连接 AD.

由 $AA_1\perp BC$,$A_1D\perp BC$,故 $BC\perp$ 平面 AA_1D,$BC\perp AD$,又 $\angle BAC=90°$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot AC$ 得 $AD=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

设 $AA_1=x$,在 $\text{Rt}\triangle AA_1D$ 中,

$A_1D=\sqrt{AD^2-AA_1^2}=\sqrt{\frac{12}{7}-x^2}$,

$S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}A_1D\cdot BC=\frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$.

从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=S_{直}\cdot l=S_{\triangle A_1BC}\cdot AA_1=\frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2}$.

因 $x\sqrt{12-7x^2}=\sqrt{12x^2-7x^4}$

$=\sqrt{-7\left(x^2-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{36}{7}}$,

故当 $x=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$,

即 $AA_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$时,体积 V 取到最大值$\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**C**	**D**	**B**

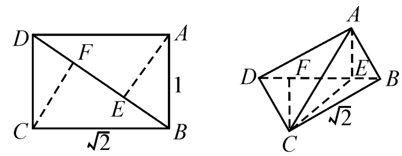
1 **B** 【解析】设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,连接 AE,过 F 作 BD 的垂线 FH 交 BD 于 H,连接 EH,则 $FH\perp$ 平面 BDD_1B_1,所以直线 EF 和平面 BDD_1B_1 所成的角为 $\angle FEH$,因为 $FH=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AF=1$,$AE=\sqrt{5}$,$EF=\sqrt{6}$,故 $\sin\angle FEH=\frac{FH}{EF}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,故选 B.

2 **D** 【解析】对于 A,垂直于平面 β 的平面与平面 α 平行或相交,故 A 错;对于 B,垂直于直线 l 的直线与平面 α 垂直、斜交、平行或在平面 α 内,故 B 错;对于 C,垂直于平面 β 的平面与直线 l 平行或相交,故 C 错;易知 D 正确.

3 **C** 【解析】对于 A,由 $l/\!/m$,$l\perp\alpha$,知 $m\perp\alpha$,与已知矛盾;对于 B,由 $l\perp m$,$l\perp\alpha$,可知 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$,与已知矛盾;对于 D,由 $l/\!/m$,$l/\!/\alpha$ 可知 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$,与已知矛盾.由此排除 A,B,D,故选 C.

4 **D** 【解析】取 PB 的中点 M,连接 AM,CM,则 $AM\perp PB$,$CM\perp PB$,$\angle AMC$ 是二面角 $A-PB-C$ 的平面角.由已知易知 $AM=CM=\sqrt{3}a$,所以 $\triangle AMC$ 是正三角形,所以 $\angle AMC=60°$,选 D.

5 **B** 【解析】找出图形在翻折过程中变化的量与不变的量.



(1)　　　　(2)

第 5 题图

对于选项 A,过点 A 作 $AE\perp BD$,垂足为 E,过点 C 作 $CF\perp BD$,垂足为 F,

在图(1)中,由边 AB,BC 不相等可知点 E,F 不重合.

在图(2)中,连接 CE,若直线 AC 与直线 BD 垂直,

又$\because AC\cap AE=A$,$\therefore BD\perp$ 面 ACE,

$\therefore BD\perp CE$,与点 E,F 不重合相矛盾,故 A 错误.

对于选项 B,若 $AB\perp CD$,

又$\because AB\perp AD$,$AD\cap CD=D$,$\therefore AB\perp$ 面 ADC,

$\therefore AB\perp AC$,由 $AB<BC$ 可知存在这样的等腰直角三角形,使得直线 AB 与直线 CD 垂直,故 B 正确.

对于选项 C,若 $AD\perp BC$,

又$\because DC\perp BC$,$AD\cap DC=D$,$\therefore BC\perp$ 面 ADC,

$\therefore BC\perp AC$.已知 $BC=\sqrt{2}$,$AB=1$,$BC>AB$,

$\therefore$ 不存在这样的直角三角形,$\therefore$ C 错误.

由上可知 D 错误,故选 B.

6 ①②③ 【解析】由题意知 $PA\perp$ 平面 ABC,

$\therefore PA\perp BC$.

又 $AC\perp BC$,$PA\cap AC=A$,$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.

$\therefore BC\perp AF$.$\because AF\perp PC$,$BC\cap PC=C$,

$\therefore AF\perp$ 平面 PBC,$\therefore AF\perp PB$,$AF\perp BC$.

又 $AE\perp PB$,$AE\cap AF=A$,$\therefore PB\perp$ 平面 AEF.

$\therefore PB\perp EF$.故①②③正确.

7 3 【解析】如图所示,

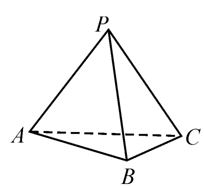
$\because PA\perp PC$、$PA\perp PB$,

$PC\cap PB=P$,

$\therefore PA\perp$ 平面 PBC.

又$\because BC\subset$ 平面 PBC,

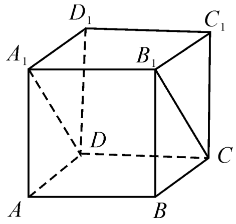
$\therefore PA\perp BC$.



第 7 题图

同理 $PB\perp AC$、$PC\perp AB$. 但 AB 不一定垂直于 BC.

8 ②③ 【解析】①如图,在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中,可令平面 A_1B_1CD 为 α,平面 DCC_1D_1 为 β,平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为 γ,又平面 $A_1B_1CD\cap$ 平面 $DCC_1D_1=CD$,平面 $A_1B_1C_1D_1\cap$ 平面 $DCC_1D_1=C_1D_1$,则 CD 与 C_1D_1 所在的直线分别表示 a,b,因为 $CD/\!/C_1D_1$,但平面 A_1B_1CD 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 不平行,即 α 与 γ 不平行,故①错误. ②因为 a、b 相交,假设其确定的平面为 γ,根据 $a/\!/\alpha$,$b/\!/\alpha$,可得 $\gamma/\!/\alpha$. 同理可得 $\gamma/\!/\beta$,因此 $\alpha/\!/\beta$,②正确. ③由两平面垂直,在一个平面内垂直于交线的直线和另一个平面垂直,易知③正确. ④当 $a/\!/b$ 时,l 垂直于平面 α 内两条不相交直线,不可得出 $l\perp\alpha$,④错误.

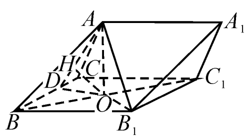


第 8 题图

9【解析】(1)连接 BC_1,则 O 为 B_1C 与 BC_1 的交点. 因为侧面 BB_1C_1C 为菱形,所以 $B_1C\perp BC_1$.

又 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C,所以 $B_1C\perp AO$,又 $AO\cap BC_1=O$,所以 $B_1C\perp$ 平面 ABO.

由于 $AB\subset$ 平面 ABO,故 $B_1C\perp AB$.



第 9 题图

(2)作 $OD\perp BC$,垂足为 D,连接 AD. 作 $OH\perp AD$,垂足为 H. 由于 $BC\perp AO$,$BC\perp OD$,$AO\cap OD=O$,故 $BC\perp$ 平面 AOD,所以 $OH\perp BC$. 又 $OH\perp AD$,$BC\cap AD=D$,所以 $OH\perp$ 平面 ABC.

因为 $\angle CBB_1=60^\circ$,所以 $\triangle CBB_1$ 为等边三角形,

又 $BC=1$,可得 $OD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

由于 $AC\perp AB_1$,所以 $OA=\dfrac{1}{2}B_1C=\dfrac{1}{2}$.

由 $OH\cdot AD=OD\cdot OA$,且 $AD=\sqrt{OD^2+OA^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$,

得 $OH=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

又 O 为 B_1C 的中点,所以点 B_1 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. 故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

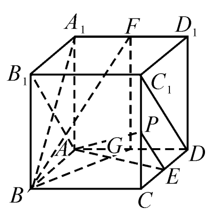
10【解析】(1)证明:连接 A_1B,则 $AB_1\perp A_1B$,

又 $\because AB_1\perp A_1F$,且 $A_1B\cap A_1F=A_1$,

$\therefore AB_1\perp$ 平面 A_1BF.

又 $BF\subset$ 平面 A_1BF,

$\therefore AB_1\perp BF$.



第 10 题图

(2)证明:取 AD 的中点 G,连接 FG,BG,则 $FG\perp AE$,

又$\because \triangle BAG\cong\triangle ADE$,

$\therefore \angle ABG=\angle DAE$.

$\therefore AE\perp BG$.

又$\because BG\cap FG=G$,$\therefore AE\perp$ 平面 BFG.

又 $BF\subset$ 平面 BFG,$\therefore AE\perp BF$.

(3)存在. 取 CC_1 的中点 P,即为所求. 连接 EP,AP,C_1D,

$\because EP/\!/C_1D$,$C_1D/\!/AB_1$,$\therefore EP/\!/AB_1$.

由(1)知 $AB_1\perp BF$,$\therefore BF\perp EP$.

又由(2)知 $AE\perp BF$,且 $AE\cap EP=E$,

$\therefore BF\perp$ 平面 AEP.

11【解析】(1)作 $DH\perp EF$,交 EF 于点 H,连接 BH,GH.

$\because$ 平面 $AEFD\perp$ 平面 $EBCF$,交线为 EF,$DH\subset$ 平面 $AEFD$,

$\therefore DH\perp$ 平面 $EBCF$,又 $EG\subset$ 平面 $EBCF$,

故 $EG\perp DH$.

$\because EH=AD=\dfrac{1}{2}BC=BG=BE=2$,$EF/\!/BC$,

$\angle EBC=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore$ 四边形 $BGHE$ 为正方形,故 $EG\perp BH$.

又 BH,$DH\subset$ 平面 DBH,且 $DH\cap BH=H$,故 $EG\perp$ 平面 DBH.

又 $BD\subset$ 平面 DBH,故 $EG\perp BD$.

(2)$\because AE\perp EF$,平面 $AEFD\perp$ 平面 $EBCF$,交线为 EF,$AE\subset$ 平面 $AEFD$.

$\therefore AE\perp$ 平面 $EBCF$. 又由(1)知 $DH\perp$ 平面 $EBCF$,故 $AE/\!/DH$,$\therefore$ 四边形 $AEHD$ 是矩形,$DH=AE$,故以 F、B、C、D 为顶点的三棱锥 $D-BCF$ 的高 $DH=AE=x$.

又 $S_{\triangle BCF}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BE=\dfrac{1}{2}\times4\times(4-x)=8-2x$.

$\therefore$ 三棱锥 $D-BCF$ 的体积 $V_{D-BCF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCF}\cdot DH=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCF}\cdot AE=\dfrac{1}{3}(8-2x)x=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x=-\dfrac{2}{3}(x-2)^2+\dfrac{8}{3}(0<x<4)$,

当 $x=2$ 时,取最大值,故三棱锥 $D-BCF$ 体积的最大值为 $\dfrac{8}{3}$.

12【解析】(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\because EF/\!/BC$,

$\therefore EF\perp AB$.

$\therefore EF\perp EB$,$EF\perp EP$,又 $EB\cap EP=E$,$\therefore EF\perp$ 平面 PEB.

又 $PB\subset$ 平面 PEB,$\therefore EF\perp PB$.

(2)当点 E 在线段 AB 上移动时,二面角 $P-FC-$

B 的平面角的余弦值为定值.

过 P 作 $PQ\perp BE$ 于点 Q,垂足为 Q;过 Q 作 $QH\perp FC$,垂足为 H,则 $\angle PHQ$ 即为所求二面角的平面角.

设 $PE=x$,则 $EQ=\frac{1}{2}x$,$PQ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,$QH=(PE+EQ)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}x$,

故 $\tan\angle PHQ=\frac{PQ}{QH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\cos\angle PHQ=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

即二面角 $P-FC-B$ 的平面角的余弦值为定值 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

专题 36　直线方程

5 年高考真题演练

1 **A** 【解析】设 $P(x,y)$,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$c>0$,则 $||F_1F_2||=2c$,依题意,得 $||PF_1||+||PF_2||=2d$(d 为常数且 $d>c$),所以 $|x+c|+|y-0|+|x-c|+|y-0|=2d$,即 $|x+c|+|x-c|+2|y|=2d$.

①当 $-c\leqslant x\leqslant c$ 时,$(x+c)+c-x+2|y|=2d$,即 $y=\pm(d-c)$;

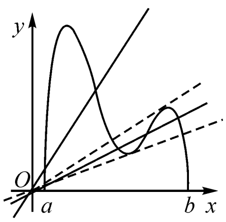
②当 $x<-c$ 时,$-(x+c)+c-x+2|y|=2d$,即 $x\pm y+d=0$;

③当 $x>c$ 时,$(x+c)+x-c+2|y|=2d$,即 $x\pm y-d=0$.

画出以上三种情形的图象,即可知选项 A 正确,故选 A.

2 **B** 【解析】由 $\begin{cases}x+y=1,\\y=ax+b\end{cases}$ 消去 x,得 $y=\frac{a+b}{a+1}$,当 $a>0$ 时,直线 $y=ax+b$ 与 x 轴交于点 $\left(-\frac{b}{a},0\right)$,结合图形知 $\frac{1}{2}\times\frac{a+b}{a+1}\times\left(1+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}$,化简得 $(a+b)^2=a(a+1)$,则 $a=\frac{b^2}{1-2b}$.$\because a>0$,$\therefore\frac{b^2}{1-2b}>0$,解得 $b<\frac{1}{2}$.考虑极限位置,即 $a=0$,此时易得 $b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故答案为 B.

3 **B** 【解析】$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$ 的几何意义是指曲线上存在 n 个点与坐标原点连线的斜率相等,即 n 为过原点的直线与曲线的交点个数,由图可得 n 的取值为 2,3,4,故选 B.



第 3 题图

4 2 【解析】利用法向量求出直线 l 的斜率.直线 l 的一个方向向量是 $(1,2)$,所以直线 l 的斜率是 2.

5 ①③⑤ 【解析】①正确,比如直线 $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$,当 x 取整数时,y 始终是一个无理数;②错误,直线 $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ 中 k 与 b 都是无理数,但直线经过整点 $(1,0)$;③正确,当直线经过两个整点时,它经过无穷多个整点;④错误,当 $k=0$,$b=\frac{1}{2}$ 时,直线 $y=\frac{1}{2}$ 不通过任何整点;⑤正确,比如直线 $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ 只经过一个整点 $(1,0)$.

高考试题专项预测

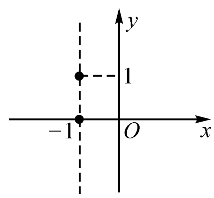
题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**C**	**C**	**B**
题号	6	7	8	9	
答案	**C**	**C**	**C**	**D**	

1 **B**　**2** **D**　**3** **C**　**4** **C**　**5** **B**

6 **C** 【解析】将圆的方程 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 整理为 $(x-2)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2$,$\therefore$ 圆心坐标为 $(2,2)$,半径为 $3\sqrt{2}$,要求圆上至多有三个不同点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则圆心到直线 l 的距离应大于等于 $\sqrt{2}$,$\therefore\frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\geqslant\sqrt{2}$,$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^2+4\left(\frac{a}{b}\right)+1\geqslant0$,$\therefore\frac{a}{b}\leqslant-2-\sqrt{3}$ 或 $\frac{a}{b}\geqslant-2+\sqrt{3}$,又直线 l 的斜率 $k=-\frac{a}{b}$,$\therefore k\leqslant2-\sqrt{3}$ 或 $k\geqslant2+\sqrt{3}$,选 C.

7 **C** 【解析】由题意得点 $A(a,1)$ 与点 $B(-1,a)$ 位于直线 $x+y+1=0$ 的两侧的充要条件是 $(a+1+1)(-1+a+1)<0$,即 $-2<a<0$.因此结合各选项知,选 C.

8 **C** 【解析】由 $ax+y+a-1=0$,得 $a(x+1)+y-1=0$,故直线 l 过定点 $(-1,1)$,又直线 l 的斜率存在,故其倾斜角不等于 $\frac{\pi}{2}$.当直线为第二、四象限角的平分线时,其倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,直线不经过第一象限,结合图形可知,直线 l 倾斜角的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.



第 8 题图

9 **D** 【解析】易知 $A(2,1)$,$B(4,2)$,原点 $O(0,0)$,$\therefore k_{OA}=k_{OB}=\frac{1}{2}$.$\therefore$ 直线 AB 过原点.

同理 $C(2,\lg2)$,$D(4,2\lg2)$,$k_{OC}=k_{OD}=\frac{\lg2}{2}\neq\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 直线 CD 过原点,且与 AB 相交,故选 D.

10 $x-3y-2=0$

11 $2x+3y-12=0$　【解析】设 $A(a,0)$,$B(0,b)$,其中 $a>0$,$b>0$,则直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,所以 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$,且 $\frac{1}{2}ab=12$,解得 $a=6$,$b=4$. 所以所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$,即 $2x+3y-12=0$.

12 $x-2y-z+3=0$　**13** 3　**14** $(-2,1)$

15 16　【解析】根据 $A(a,0)$、$B(0,b)$ 确定直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,又 $C(-2,-2)$ 在该直线上,故 $\frac{-2}{a}+\frac{-2}{b}=1$,所以 $-2(a+b)=ab$. 又 $ab>0$,故 $a<0$,$b<0$. 根据基本不等式 $ab=-2(a+b)\geqslant 4\sqrt{ab}$,从而 $\sqrt{ab}\leqslant 0$(舍去)或 $\sqrt{ab}\geqslant 4$,故 $ab\geqslant 16$,当且仅当 $a=b=-4$ 时取等号,即 ab 的最小值为 16.

专题 37　两直线的位置关系

5 年高考真题演练

1 D　**2** C

3 D　【解析】以 AB、AC 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$C(0,4)$,得△ABC 的重心 $D\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$,设 $AP=x$,从而 $P(x,0)$,$x\in(0,4)$,由光的几何性质可知点 P 关于直线 BC、AC 的对称点 $P_1(4,4-x)$,$P_2(-x,0)$ 与△ABC 的重心 $D\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ 共线,所以 $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+x}=\dfrac{\frac{4}{3}-(4-x)}{\frac{4}{3}-4}$,求得 $x=\frac{4}{3}$.

4 A　【解析】与直线 $x-2y-2=0$ 平行的直线方程可设为:$x-2y+c=0$,将点 $(1,0)$ 代入 $x-2y+c=0$,解得 $c=-1$,故直线方程为 $x-2y-1=0$.

5 C　【解析】$\because l_1/\!/l_2$,$\therefore -2(k-3)-2(k-3)(4-k)=0$,$(k-3)(5-k)=0$,$\therefore k=3$ 或 5.

6 1　【解析】根据题意知,当 $m=0$ 时,两直线不会垂直,故 $m\neq 0$. 因直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 的斜率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{2}{m}$,由垂直条件得 $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{m}\right)=-1$,故 $m=1$.

7 $(2,4)$　【解析】取四边形 $ABCD$ 对角线的交点,这个交点到四点的距离之和就是最小值. 可证明如下:

假设在四边形 $ABCD$ 中任取一点 P,在△APC 中,有 $AP+PC>AC$,在△BPD 中,有 $PB+PD>BD$,而如果 P 在线段 AC 上,那么 $AP+PC=AC$;同理,如果 P 在线段 BD 上,那么 $BP+PD=BD$.

如果同时取等号,那么意味着距离之和最小,此时 P 就只能是 AC 与 BD 的交点.

易求得 $P(2,4)$.

8 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$　【解析】①若 $m<0$,则符合题意的条件是:直线 $x+y=2m+1$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=m^2$ 有交点,从而 $\frac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$,解得 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{2}$,与 $m<0$ 矛盾;

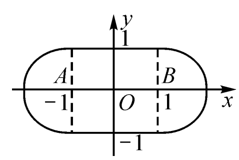
②若 $m=0$,代入验证,可知不符合题意;

③若 $m>0$,则当 $\frac{m}{2}\leqslant m^2$,即 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时,集合 A 表示一个环形区域,集合 B 表示一个带形区域,从而当直线 $x+y=2m+1$ 与 $x+y=2m$ 中至少有一条与圆 $(x-2)^2+y^2=m^2$ 有交点,即符合题意,从而有 $\frac{|2-2m|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$ 或 $\frac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}\leqslant|m|$,解得 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$,由于 $\frac{1}{2}>\frac{2-\sqrt{2}}{2}$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$.

综上所述,m 的取值范围是 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{2}$.

9 【解析】(1)设 $Q(x,x-3)$ 是线段 l:$x-y-3=0(3\leqslant x\leqslant 5)$ 上一点,则 $|PQ|=\sqrt{(x-1)^2+(x-4)^2}=\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}(3\leqslant x\leqslant 5)$,当 $x=3$ 时,$d(P,l)=|PQ|_{\min}=\sqrt{5}$.

(2)设线段 l 的端点分别为 A,B,以直线 AB 为 x 轴,线段 AB 的中点为原点建立直角坐标系,如图①.



①

则 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,点集 D 由如下曲线围成:

l_1:$y=1(|x|\leqslant 1)$,l_2:$y=-1(|x|\leqslant 1)$,

C_1:$(x+1)^2+y^2=1(x\leqslant -1)$,$C_2$:$(x-1)^2+y^2=1(x\geqslant 1)$,

其面积为 $S=4+\pi$.

(3)①选择 $A(1,3)$,$B(1,0)$,$C(-1,3)$,$D(-1,0)$,

$\Omega=\{(x,y)|x=0\}$,如图②.

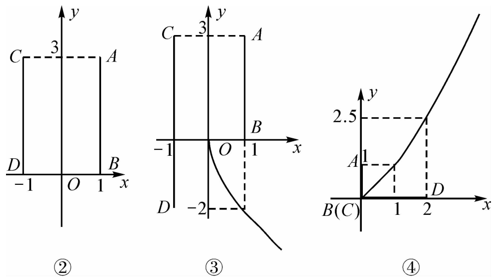
②选择 $A(1,3)$,$B(1,0)$,$C(-1,3)$,$D(-1,-2)$.

$\Omega=\{(x,y)|x=0,y\geqslant 0\}\cup\{(x,y)|y^2=4x,-2\leqslant$

$y<0\}\cup\{(x,y)\mid x+y+1=0,y<-2\}$，如图③.

③选择 $A(0,1)$，$B(0,0)$，$C(0,0)$，$D(2,0)$.

$\Omega=\{(x,y)\mid x\leqslant 0,y\leqslant 0\}\cup\{(x,y)\mid y=x,0<x\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid x^2=2y-1,1<x\leqslant 2\}\cup\{(x,y)\mid 4x-2y-3=0,x>2\}$，如图④.



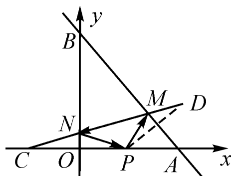
第 9 题图

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**C**	**B**	**A**	**B**
题号	6	7	8	9	10
答案	**D**	**A**	**A**	**D**	**B**

1 **B**　**2** **C**　**3** **B**　**4** **A**　**5** **B**　**6** **D**　**7** **A**

8 **A**　【解析】如图，设点 P 关于直线 AB，y 轴的对称点分别为 D，C，易求得 $D(4,2)$，$C(-2,0)$，则 $\triangle PMN$ 的周长 $=|PM|+|MN|+|NP|=|DM|+|MN|+|NC|$. 由对称性知，$D$、$M$、$N$、$C$ 共线，$\therefore |CD|$ 即为所求，由两点间的距离公式得 $|CD|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

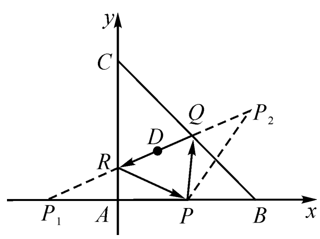


第 8 题图

9 **D**　【解析】以 A 为原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴建立直角坐标系如图所示.

则 $A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(0,4)$.

设 $\triangle ABC$ 的重心为 D，



第 9 题图

则 D 点坐标为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

设 P 点坐标为 $(m,0)$，则 P 点关于 y 轴的对称点 P_1 为 $(-m,0)$，因为直线 BC 方程为 $x+y-4=0$，所以 P 点关于 BC 的对称点 P_2 为 $(4,4-m)$，根据光线反射原理，P_1，P_2 均在 QR 所在直线上，

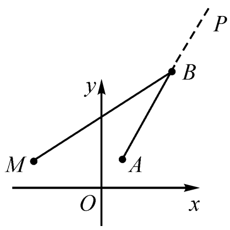
$\therefore k_{P_1D}=k_{P_2D}$，即 $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+m}=\dfrac{\frac{4}{3}-4+m}{\frac{4}{3}-4}$，解得 $m=\frac{4}{3}$ 或 $m=0$.

当 $m=0$ 时，P 点与 A 点重合，故舍去.

$\therefore m=\frac{4}{3}$.

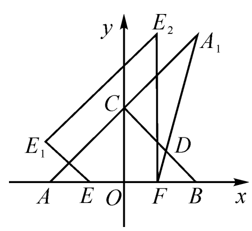
10 **B**　【解析】易知当且仅当 $\frac{a}{b}\neq\frac{1}{2}$ 时两条直线相交，而 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ 的情况有三种：①$a=1$，$b=2$（此时两条直线重合），②$a=2$，$b=4$（此时两条直线平行），③$a=3$，$b=6$（此时两条直线平行），而投掷两次的所有情况有 $6\times 6=36$ 种，所以两条直线相交的概率 $P_2=1-\frac{3}{36}=\frac{11}{12}$，两条直线平行的概率 $P_1=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$，则 $P_1+P_2\mathrm{i}$ 所对应的点 P 为 $\left(\frac{1}{18},\frac{11}{12}\right)$，易判断点 $\left(\frac{1}{18},\frac{11}{12}\right)$ 在直线 $l_2:x+2y=2$ 的左下方，选 B.

11 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　【解析】若设 $A(1,2)$，$B(4,6)$，则依题意有 $|PA|-|PB|=5$，而 $|AB|=5$，即有 $|PA|-|PB|=|AB|$，因此 P 点在线段 AB 的延长线上，而 $\frac{y-2}{x+4}$ 表示经过两点 $M(-4,2)$ 和 $P(x,y)$ 的直线的斜率，$k_{MB}=\frac{1}{2}$. 由图可知，$\frac{y-2}{x+4}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.



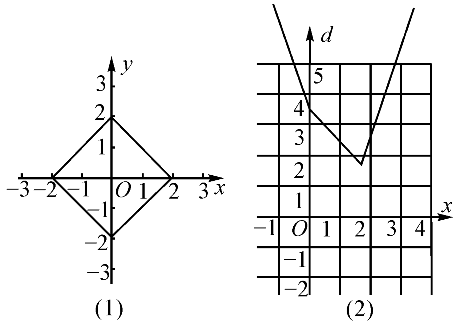
第 11 题图

12 $(4,+\infty)$　【解析】从特殊位置考虑. 如图，$\because$ 点 $A(-2,0)$ 关于直线 $BC:x+y=2$ 的对称点为 $A_1(2,4)$，$\therefore k_{A_1F}=4$. 又点 $E(-1,0)$ 关于直线 $AC:y=x+2$ 的对称点为 $E_1(-2,1)$，点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 $BC:x+y=2$ 的对称点为 $E_2(1,4)$，此时直线 E_2F 的斜率不存在，$\therefore k_{FD}>k_{A_1F}$，即 $k_{FD}\in(4,+\infty)$.



第 12 题图

13 (1)8　【解析】根据定义可知，所构成的平面图形如图(1)，则该平面图形的面积为 $4\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=8$.



第 13 题图

(2)$\sqrt{3}$ 【解析】直线 $2x-y-2\sqrt{3}=0$ 与两坐标轴的交点分别为 $A(0,-2\sqrt{3})$,$B(\sqrt{3},0)$,设直线上任意一点 $P(x,y)$,则 $y=2x-2\sqrt{3}$,所以 OP 的折线距离为 $d=|x|+|y|=|x|+2|x-\sqrt{3}|=\begin{cases}-3x+2\sqrt{3},x<0,\\-x+2\sqrt{3},0\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\\3x-2\sqrt{3},x>\sqrt{3}.\end{cases}$作出分段函数的图象如图(2),由函数的单调性可知当 $x=\sqrt{3}$时,函数有最小值为 $d=|\sqrt{3}|+2|\sqrt{3}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$.

▶ 专题 38 圆的方程

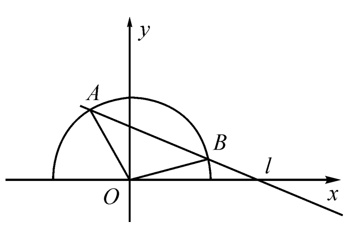
5 年高考真题演练

1 **B** 【解析】易知直线 $x+my=0$ 过定点 $A(0,0)$,直线 $mx-y-m+3=0$ 过定点 $B(1,3)$,且两条直线相互垂直,故点 P 在以 AB 为直径的圆上运动,故 $|PA|+|PB|=|AB|\cos\angle PAB+|AB|\sin\angle PAB=\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\angle PAB+\frac{\pi}{4}\right)\in[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$,故选 B.

2 **B** 【解析】$|PQ|$的最小值为圆心到直线的距离减去半径. 因为圆的圆心为$(3,-1)$,半径为 2,所以$|PQ|$的最小值 $d=3-(-3)-2=4$.

3 **A** 【解析】两圆的圆心均在第一象限,先求$|PC_1|+|PC_2|$的最小值,作点 C_1 关于 x 轴的对称点 $C'_1(2,-3)$,则$(|PC_1|+|PC_2|)_{\min}=|C'_1C_2|=5\sqrt{2}$,所以$(|PM|+|PN|)_{\min}=5\sqrt{2}-(1+3)=5\sqrt{2}-4$.

4 **B** 【解析】由 $y=\sqrt{1-x^2}$得 $x^2+y^2=1(y\geqslant0)$,即该曲线表示圆心在原点,半径为 1 的半圆,如图所示.



第 4 题图

故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sin\angle AOB$,所以当 $\sin\angle AOB=1$,即 $OA\perp OB$ 时,$S_{\triangle AOB}$取得最大值,此时点 O 到直线 l 的距离 $d=|OA|\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设此时直线 l 的斜率为 k,则方程为$y=k(x-\sqrt{2})$,即 $kx-y-\sqrt{2}k=0$,则有$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|0-0-\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,由图可知直线 l 的倾斜角为钝角,故取 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5 **D** 【解析】设圆心 $O(a,0)(a<0)$,则$\sqrt{5}=\frac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}\Rightarrow|a|=5$,得 $a=-5$,$\therefore$ 圆 O 的方程为$(x+5)^2+y^2=5$.

6 **D** 【解析】数形结合,画出图象,可知集合 B 表示的是一个圆面,集合 A 表示的图形在圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 内的部分正好是圆的一半,因此 $A\cap B$ 所表示的平面图形的面积是$\frac{\pi}{2}$,选 D.

7 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 【解析】依题意,设圆心的坐标为$(2b,b)$(其中 $b>0$),则圆 C 的半径为 $2b$,圆心到 x 轴的距离为 b,所以 $2\sqrt{4b^2-b^2}=2\sqrt{3}$,$b>0$,解得 $b=1$,故所求圆 C 的标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

8 $(x-2)^2+y^2=10$ 【解析】依题意设所求圆的方程为:$(x-a)^2+y^2=r^2$,把所给两点坐标代入方程得$\begin{cases}(5-a)^2+1=r^2,\\(1-a)^2+9=r^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\r^2=10,\end{cases}$所以所求圆的方程为$(x-2)^2+y^2=10$.

9 $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ 【解析】因为圆过原点,所以可设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$. 因为圆过点$(4,0)$,将点$(4,0)$代入圆的方程得 $D=-4$,即圆的方程为 $x^2+y^2-4x+Ey=0$. 又圆与直线 $y=1$ 相切,将其代入圆的方程得 $x^2+1-4x+E=0$,又方程只有一个解,所以 $\Delta=4^2-4(1+E)=0$,解得 $E=3$. 故所求圆的方程为 $x^2+y^2-4x+3y=0$,即$(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

10 【解析】(1)曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点为$(0,1)$,$(3\pm2\sqrt{2},0)$. 故可设圆的圆心坐标为$(3,t)$,

则有 $3^2+(t-1)^2=(2\sqrt{2})^2+t^2$,解得:$t=1$.

则圆的半径为 $\sqrt{3^2+(t-1)^2}=3$,

所以圆的方程为:$(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,其坐标满足方程组

$\begin{cases}x-y+a=0,\\(x-3)^2+(y-1)^2=9,\end{cases}$

消去 y 得到方程：$2x^2+(2a-8)x+a^2-2a+1=0$，

由已知可得到判别式 $\Delta=(2a-8)^2-4\times2(a^2-2a+1)=56-16a-4a^2>0$，

由根与系数的关系可得：$x_1+x_2=4-a, x_1x_2=\frac{a^2-2a+1}{2}$，①

由 $OA\perp OB$ 可得：$x_1x_2+y_1y_2=0$.

又 $y_1=x_1+a, y_2=x_2+a$，所以 $2x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2=0$，②

由①②可得 $a=-1$，满足 $\Delta>0$，故 $a=-1$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	B	A	A
题号	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	A	B

1 **B** 【解析】将圆的一般方程化成标准方程为 $(x+a)^2+(y+1)^2=2a$，因为 $0<a<1$，所以 $(0+a)^2+(0+1)^2-2a=(a-1)^2>0$，即 $\sqrt{(0+a)^2+(0+1)^2}>\sqrt{2a}$，所以原点在圆外.

2 **C** 【解析】直线 $y+3=0$ 为抛物线的准线，由抛物线的定义知点 P 到直线 $y=-3$ 的距离与到点 $F(0,3)$ 的距离相等，因此此圆恒过定点 $(0,3)$.

3 **B** 【解析】双曲线的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$，其右焦点为 $(3,0)$，所求圆半径 $r=\frac{|3|}{\sqrt{1^2+(\pm\sqrt{2})^2}}=\sqrt{3}$，所求圆方程为 $(x-3)^2+y^2=3$.

4 **A** 【解析】由题意，得圆心 $(1,-3)$ 在直线 $y=x+2b$ 上，得 $b=-2$，由圆成立的条件可得 $(-2)^2+6^2-4\times5a>0$，解得 $a<2$，$\therefore a-b<4$，故选 A.

5 **A** 【解析】$l_{AB}: x-y+2=0$，圆心 $(1,0)$ 到 l_{AB} 的距离 $d=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，$\therefore AB$ 边上的高的最小值为 $\frac{3}{\sqrt{2}}-1$，

$\therefore S_{\min}=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)=3-\sqrt{2}$.

6 **B** 【解析】根据切线长、圆的半径和圆心到点 P 的距离的关系，可知 $|PT|=\sqrt{|PC|^2-1}$，故 $|PT|$ 最小时，即 $|PC|$ 最小，此时 PC 垂直于直线 $y=x+2$，则直线 PC 的方程为 $y+2=-(x-4)$，即 $y=-x+2$，联立方程组 $\begin{cases}y=x+2,\\y=-x+2,\end{cases}$ 得点 P 的坐标为 $(0,2)$.

7 **B** 【解析】由题意可知，圆的圆心坐标是 $(1,3)$，半径是 $\sqrt{10}$，且点 $E(0,1)$ 位于该圆内，故过点 $E(0,1)$ 的最短弦长 $|BD|=2\sqrt{10-(1^2+2^2)}=2\sqrt{5}$（注：过圆内一定点的最短弦是以该点为中点的弦），过点 $E(0,1)$ 的最长弦长等于该圆的直径，即 $|AC|=2\sqrt{10}$，且 $AC\perp BD$，因此四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|AC|\times|BD|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times2\sqrt{5}=10\sqrt{2}$.

8 **C** 【解析】圆心 $(-1,-1)$ 到点 M 的距离的最小值为点 $(-1,-1)$ 到直线的距离 $d=\frac{|-3-4-2|}{5}=\frac{9}{5}$，故点 N 到点 M 的距离的最小值为 $d-1=\frac{4}{5}$.

9 **A** 【解析】$r=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4-4k^2}\leqslant1$，当有最大半径时有最大面积，此时 $k=0, r=1$，$\therefore$ 直线方程为 $y=-x+2$.

设倾斜角为 α，则由 $\tan\alpha=-1$ 且 $\alpha\in[0,\pi)$ 得 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，故选 A.

10 **B** 【解析】设 M 点的坐标为 $(-3,y)$，因为 $\triangle FPM$ 要构成等边三角形，所以由抛物线的性质（抛物线上的点到焦点和准线的距离相等）得 P 点的坐标为 $\left(\frac{y^2}{12},y\right)$. 由题意得 $\frac{y^2}{12}+3=\sqrt{36+y^2}$，解得 $y=\pm6\sqrt{3}$. 当 $y=6\sqrt{3}$ 时，$M(-3,6\sqrt{3})$，$P(9,6\sqrt{3})$，$F(3,0)$，其外接圆的圆心坐标为 $\left(\frac{-3+9+3}{3},\frac{6\sqrt{3}+6\sqrt{3}+0}{3}\right)$，即 $(3,4\sqrt{3})$，则 $r^2=(3-3)^2+(4\sqrt{3})^2=48$，所以外接圆的方程为 $(x-3)^2+(y-4\sqrt{3})^2=48$；当 $y=-6\sqrt{3}$ 时，可得圆心坐标为 $(3,-4\sqrt{3})$，$r^2=(3-3)^2+(-4\sqrt{3})^2=48$.

所以外接圆的方程为 $(x-3)^2+(y+4\sqrt{3})^2=48$.

综上可知，$\triangle FPM$ 的外接圆的方程为 $(x-3)^2+(y\pm4\sqrt{3})^2=48$，选 B.

11 $m\geqslant\sqrt{2}$

12 $-\frac{2}{3}$ 【解析】圆是轴对称图形，过圆心的直线都是它的对称轴. 已知圆的圆心为 $(a,3)$，由题设知，直线 $3x+2y-4=0$ 过圆心，则 $3a+2\times3-4=0$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

13 ②④ 【解析】集合 $\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}$ 表示以 (x_0,y_0) 为圆心，r 为半径长的圆内部的点，不含圆周.

由“开集”的定义知，集合 A 是无边界的平面图形. ②表示直线 $x+y+2=0$ 右上方的点（不含这条直线上的点）；④表示以 $(0,\sqrt{2})$ 为圆心，1 为半径长

的圆内的点(不含圆心和圆周). 所以②④都符合“开集”的定义,故填②④.

14 $(x-1)^2+y^2=20$ 【解析】设圆心坐标为 $C(a,0)$,则 $|AC|=|BC|$,即 $\sqrt{(a-5)^2+2^2}=\sqrt{(a+1)^2+4^2}$,解得 $a=1$,所以半径 $r=\sqrt{(1+1)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,所以圆 C 的方程是 $(x-1)^2+y^2=20$.

15 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 【解析】设圆心坐标为 $(a,-a)$,则有 $\frac{|a+a-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{2}}$,解得 $a=1$,则 $r=\frac{|2a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

16 $2\ 031\ 120\pi$　$\frac{x^2}{2\ 014}+\frac{y^2}{2\ 015}=1$ 和 $\frac{x^2}{2\ 015}+\frac{y^2}{2\ 014}=1$

【解析】要满足方程 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 是圆,必须 $a=b$,即 $x^2+y^2=a(a\in\{1,2,3,4,\cdots,2015\})$.

故所有圆面积的和等于 $\pi(1+2+3+\cdots+2015)=\frac{2\ 015(1+2\ 015)}{2}\pi=2\ 031\ 120\pi$.

当 $a>b$ 时,曲线 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{1-\frac{b}{a}}$,当 $a=2\ 015,b=2\ 014$ 时,离心率 e 最小,此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{2\ 015}+\frac{y^2}{2\ 014}=1$;当 $a<b$ 时,曲线 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{1-\frac{a}{b}}$,当 $b=2\ 015,a=2\ 014$ 时,离心率 e 最小,此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{2\ 014}+\frac{y^2}{2\ 015}=1$. 综上,离心率最小的椭圆方程为 $\frac{x^2}{2\ 015}+\frac{y^2}{2\ 014}=1$ 和 $\frac{x^2}{2\ 014}+\frac{y^2}{2\ 015}=1$.

专题 39　直线、圆的位置关系

5 年高考真题演练

1 **C** 【解析】圆 C_1 的圆心是原点 $(0,0)$,半径 $r_1=1$,圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$,圆心 $C_2(3,4)$,半径 $r_2=\sqrt{25-m}$,由两圆相外切,得 $|C_1C_2|=r_1+r_2=1+\sqrt{25-m}=5$,所以 $m=9$.

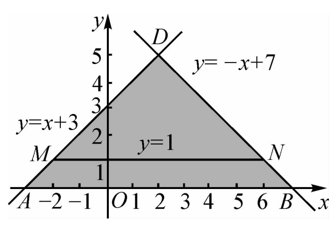
2 **A** 【解析】当点 M 的坐标为 $(1,1)$ 时,圆上存在点 $N(1,0)$,使得 $\angle OMN=45°$,所以 $x_0=1$ 符合题意,故排除 B,D;当点 M 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$ 时,$OM=\sqrt{3}$,过点 M 作圆 O 的一条切线 MN',连接 ON',则在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN'$ 中,$\sin\angle OMN'=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\angle OMN'<45°$,故此时在圆 O 上不存在点 N,使得 $\angle OMN=45°$,即 $x_0=\sqrt{2}$ 不符合题意,排除 C,故选 A.

3 **A** 【解析】解法一:设 $A(a,0),B(0,b)$,圆 C 的圆心坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$,$2r=\sqrt{a^2+b^2}$,由题意知圆心到直线 $2x+y-4=0$ 的距离 $d=\frac{\left|a+\frac{b}{2}-4\right|}{\sqrt{5}}=r$,即 $|2a+b-8|=2\sqrt{5}r$,$2a+b=8\pm2\sqrt{5}r$,由 $(2a+b)^2\leqslant5(a^2+b^2)$,得 $8\pm2\sqrt{5}r\leqslant2\sqrt{5}r\Rightarrow r\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$,即圆 C 的面积 $S=\pi r^2\geqslant\frac{4}{5}\pi$.

解法二:由题意可知以线段 AB 为直径的圆 C 过原点 O,要使圆 C 的面积最小,只需圆 C 的半径或直径最小. 又圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切,所以由平面几何知识,知圆的直径的最小值为点 O 到直线 $2x+y-4=0$ 的距离,此时 $2r=\frac{4}{\sqrt{5}}$,得 $r=\frac{2}{\sqrt{5}}$,圆 C 的面积的最小值为 $S=\pi r^2=\frac{4}{5}\pi$.

4 **B** 【解析】因为圆 C 的圆心为 $(3,4)$,半径为 1,$|OC|=5$,所以以原点为圆心、以 m 为半径与圆 C 有公共点的最大圆的半径为 6,所以 m 的最大值为 6,故选 B.

5 **C** 【解析】平面区域 Ω 为如图所示的阴影部分的 $\triangle ABD$,因圆心 $C(a,b)\in\Omega$,且圆 C 与 x 轴相切,所以点 C 在如图所示的线段 MN 上,线段 MN 的方程为 $y=1(-2\leqslant x\leqslant6)$,由图形得,当点 C 在点 $N(6,1)$ 处时,a^2+b^2 取得最大值 $6^2+1^2=37$,故选 C.



第 5 题图

6 $\frac{2\sqrt{55}}{5}$ 【解析】因为圆心 $(2,-1)$ 到直线 $x+2y-3=0$ 的距离 $d=\frac{|2-2-3|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$,所以直线 $x+2y-3=0$ 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{4-\frac{9}{5}}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

7 0 或 6 【解析】圆 $C:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$,所以圆心为

$C(-1,2)$，半径为 3. 因为 $AC\perp BC$，所以圆心 C 到直线 $x-y+a=0$ 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{|-1-2+a|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=0$ 或 6.

8 $-\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$　【解析】设 $M(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$，$y^2=1-x^2$，

$\lambda^2=\frac{|MB|^2}{|MA|^2}=\frac{(x-b)^2+y^2}{(x+2)^2+y^2}=\frac{x^2-2bx+b^2+1-x^2}{x^2+4x+4+1-x^2}=\frac{b^2+1-2bx}{5+4x}=-\frac{b}{2}+\frac{b^2+\frac{5}{2}b+1}{5+4x}$.

$\because\lambda$ 为常数，$\therefore b^2+\frac{5}{2}b+1=0$，解得 $b=-\frac{1}{2}$或 $b=-2$(舍去). $\therefore\lambda^2=-\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或 $\lambda=-\frac{1}{2}$(舍去).

9 【解析】(1)圆 C 的方程可化为 $x^2+(y-4)^2=16$，所以圆心为 $C(0,4)$，半径为 4.

设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{CM}=(x,y-4)$，$\overrightarrow{MP}=(2-x,2-y)$. 由题设知 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，故 $x(2-x)+(y-4)\cdot(2-y)=0$，即 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

由于点 P 在圆 C 的内部，所以 M 的轨迹方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

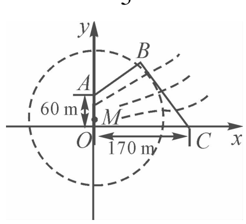
(2)由(1)可知 M 的轨迹是以点 $N(1,3)$ 为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆.

由于 $|OP|=|OM|$，故 O 在线段 PM 的垂直平分线上，又 P 在圆 N 上，从而 $ON\perp PM$.

因为 ON 的斜率为 3，所以 l 的斜率为 $-\frac{1}{3}$，故 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$.

又 $|OM|=|OP|=2\sqrt{2}$，O 到 l 的距离为$\frac{4\sqrt{10}}{5}$，$|PM|=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，所以$\triangle POM$ 的面积为$\frac{16}{5}$.

10 【解析】(1)如图，以 O 为坐标原点，OC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系 xOy.



第 10 题图

由条件知 $A(0,60)$，$C(170,0)$，

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=-\tan\angle BCO=-\frac{4}{3}$.

又因为 $AB\perp BC$，

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{3}{4}$.

设点 B 的坐标为 (a,b)，

则 $k_{BC}=\frac{b-0}{a-170}=-\frac{4}{3}$，$k_{AB}=\frac{b-60}{a-0}=\frac{3}{4}$.

解得 $a=80$，$b=120$.

所以 $BC=\sqrt{(170-80)^2+(0-120)^2}=150$.

因此新桥 BC 的长是 150m.

(2)设保护区的边界圆 M 的半径为 r m，$OM=d$ m $(0\leqslant d\leqslant 60)$.

由条件知，直线 BC 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-170)$，

即 $4x+3y-680=0$.

由于圆 M 与直线 BC 相切，故点 $M(0,d)$ 到直线 BC 的距离是 r，

即 $r=\frac{|3d-680|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{680-3d}{5}$.

因为 O 和 A 到圆 M 上任意一点的距离均不少于 80 m，

所以$\begin{cases}r-d\geqslant 80,\\ r-(60-d)\geqslant 80,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{680-3d}{5}-d\geqslant 80,\\ \frac{680-3d}{5}-(60-d)\geqslant 80.\end{cases}$

解得 $10\leqslant d\leqslant 35$.

故当 $d=10$ 时，$r=\frac{680-3d}{5}$最大，即圆面积最大.

所以当 $OM=10$ m 时，圆形保护区的面积最大.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	A	D	A	D	A
题号	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	B	C
题号	11				
答案	A				

1 **A** 【解析】由题意知，直线 $y=kx+1$ 恒过点 $(0,1)$，而点 $(0,1)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 内，故直线和圆一定相交，选 A.

2 **D** 【解析】由题意知，渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $r=4\times\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$.

3 **A** 【解析】记 PQ 的中点为 A，圆心为 O，则 $OA\perp PQ$，又直线 OA 的斜率为 2，则直线 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，易知直线 PQ 过点 $A(1,2)$，则直线 PQ 的方程为 $x+2y-5=0$.

4 **D** 【解析】由圆的方程得 $x^2+(y-1)^2=1$，所以圆心为 $(0,1)$，半径长 $r=1$，四边形的面积 $S=2S_{\triangle PBC}$，所以若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，则

$S_{\triangle PBC}$的最小值为1，而$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}r|PB|$，即$|PB|$的最小值为2，此时$|PC|$最小，为圆心到直线的距离，即$d=\frac{|5|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，即$k^2=4$，因为$k>0$，所以$k=2$，选D.

5 A 【解析】由题意可知，将直线$2x-y+\lambda=0$沿x轴向左平移1个单位长度后，所得直线l的方程为$2(x+1)-y+\lambda=0$. 由已知条件知圆的圆心为$O(-1,2)$，半径为$\sqrt{5}$.

直线l与圆相切，则圆心到直线l的距离等于圆的半径，

则$\frac{|2\times(-1+1)-2+\lambda|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得$\lambda=-3$或$\lambda=7$.

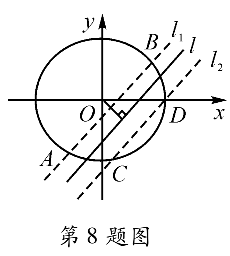
6 A 【解析】由$A=\left\{(x,y)\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant r+\frac{1}{2}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$不难分析，$A$，$B$分别表示两个圆，要满足$A\subseteq B$，即两圆内切或内含.

故圆心距$|O_1O_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant|r_1-r_2|$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\left|r-\sqrt{r+\frac{1}{2}}\right|\Leftrightarrow r^2-2r\sqrt{r+\frac{1}{2}}+r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\geqslant0\Leftrightarrow r\left(r-2\sqrt{r+\frac{1}{2}}+1\right)\geqslant0\Leftrightarrow r-2\sqrt{r+\frac{1}{2}}+1\geqslant0\Leftrightarrow r+1\geqslant2\sqrt{r+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow r^2-2r-1\geqslant0\Leftrightarrow r\geqslant1+\sqrt{2}$.

故选A.

7 B 【解析】因为M，N两点关于直线$x-y-1=0$对称，故圆心$\left(-\frac{k}{2},0\right)$在直线$x-y-1=0$上，则$-\frac{k}{2}-1=0$，解得$k=-2$，则圆的方程为$(x-1)^2+y^2=1$. 又直线$AB$的方程为$x-y+2=0$，所以圆心$(1,0)$到直线$AB$的距离为$d=\frac{|1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以圆上的点到直线$AB$的最远距离为$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故$\triangle PAB$面积的最大值为$S=\frac{1}{2}|AB|\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=3+\sqrt{2}$.

8 A 【解析】计算得圆心到直线l的距离为$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1$，如图. 直线$l:x-y-2=0$与圆相交，$l_1$，$l_2$与$l$平行，且与直线$l$的距离为1，故可以看出，圆的半径应该大于圆心到直线l_2的距离$\sqrt{2}+1$.



第8题图

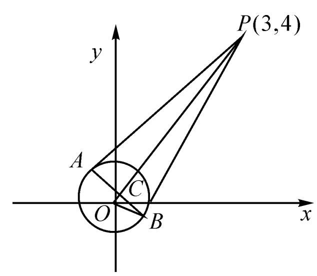
9 B 【解析】由题知$C_1:(x+1)^2+(y+1)^2=4$，则圆心$C_1(-1,-1)$，$C_2:(x-2)^2+(y-1)^2=4$，圆心$C_2(2,1)$，两圆半径均为2，

又$|C_1C_2|=\sqrt{(2+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}<4$，则两圆相交⇒只有两条外公切线.

10 C 【解析】数形结合易知切点在x轴下方，由$y^2=8x$得$y=-2\sqrt{2}\sqrt{x}$，则$y'=-\sqrt{\frac{2}{x}}$. 令$-\sqrt{\frac{2}{x}}=\tan135°$，解得$x=2$. 代入$y=-2\sqrt{2}\sqrt{x}$，得$y=-4$. 所以切点为$(2,-4)$. 故切线方程为$y-(-4)=-(x-2)$，即$x+y+2=0$. 故$A(-2,0)$，$B(0,-2)$. 因为过$A$，$B$两点的最小圆即为以$AB$为直径的圆，即$(x+1)^2+(y+1)^2=2$. 抛物线$y^2=8x$的准线方程是$x=-2$，圆心到准线的距离为$d=1$，所以过$A$，$B$两点的最小圆截抛物线$y^2=8x$的准线所得的弦长为$l=2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

11 A 【解析】设点$M(x_0,y_0)$，定点$P(2,0)$，则$y_0^2=4x_0$. 点$M(x_0,y_0)$到弦AB的距离为x_0，则弦长$|AB|=2\sqrt{|AM|^2-x_0^2}=2\sqrt{|PM|^2-x_0^2}=2\sqrt{y_0^2+(x_0-2)^2-x_0^2}=2\sqrt{4x_0+(x_0-2)^2-x_0^2}=4$.

12 $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ 【解析】如图所示，$|OP|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$|OB|=1$，则$|PB|=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$，从而$|BC|=\frac{|OB|\cdot|PB|}{|OP|}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，$|AB|=2|BC|=\frac{4\sqrt{6}}{5}$.



第12题图

13 $\frac{7}{12}$ 【解析】依题意知，将一颗骰子先后投掷两次得到的点数所形成的数组(a,b)有$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，…，$(6,6)$，共36种，其中满足直线$ax+by=0$与圆$(x-2)^2+y^2=2$有公共点，即$\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$，即$a\leqslant b$. 因为$a\leqslant b$的数组$(a,b)$有$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，…，$(6,6)$，共$1+2+3+4+5+6=21$(种)，所以所求的概率等于$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

14 4 024 【解析】设圆C_1与圆C_2交于A，B两点，则直线AB的方程为$x^2+y^2-4x-4y-(x^2+y^2-2a_nx-2a_{2\,013-n}y)=0$.

化简得$(a_n-2)x+(a_{2\,013-n}-2)y=0$.

又圆C_2平分圆C_1的周长，则直线AB过$C_1(2,2)$，将$C_1(2,2)$代入AB的方程得$a_n+a_{2\,013-n}=4$，

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{2\,012}=(a_1+a_{2\,012})+(a_2+a_{2\,011})+\cdots+(a_{1\,006}+a_{1\,007})=1\,006\times4=4\,024$.

15 $20\sqrt{6}$ 【解析】将圆$x^2+y^2-6x-8y=0$化为标准方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，从而可得最长弦为直径，即$|AC|=10$，最短弦长$|BD|=2\sqrt{5^2-[(3-3)^2+(5-4)^2]}=4\sqrt{6}$，且$AC\perp BD$，所以$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\times10\times4\sqrt{6}=20\sqrt{6}$.

专题 40 椭圆

5 年高考真题演练

1 D 【解析】由题意可设$|PF_2|=m$，结合条件可知$|PF_1|=2m$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}m$，故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sqrt{3}m}{2m+m}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2 B 【解析】由余弦定理得，$|AF|=6$，所以$2a=6+8=14$，又$2c=10$，所以$e=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$.

3 D 【解析】设圆的圆心为C，则$C(0,6)$，半径为$r=\sqrt{2}$，点C到椭圆上的点$Q(\sqrt{10}\cos\alpha,\sin\alpha)$的距离$|CQ|=\sqrt{(\sqrt{10}\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-6)^2}=\sqrt{46-9\sin^2\alpha-12\sin\alpha}=\sqrt{50-9\left(\sin\alpha+\frac{2}{3}\right)^2}\leqslant\sqrt{50}=5\sqrt{2}$，当且仅当$\sin\alpha=-\frac{2}{3}$时取等号，所以$|PQ|\leqslant|CQ|+r=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，即$P,Q$两点间的最大距离是$6\sqrt{2}$，故选D.

4 $x^2+\frac{3y^2}{2}=1$ 【解析】设点A在点B上方，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{1-b^2}$，则可设$A(c,b^2)$，$B(x_0,y_0)$，由$|AF_1|=3|F_1B|$，可得$\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，故$\begin{cases}-2c=3(x_0+c),\\-b^2=3y_0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_0=-\frac{5}{3}c,\\y_0=-\frac{1}{3}b^2,\end{cases}$代入椭圆方程可得$\frac{25(1-b^2)}{9}+\frac{1}{9}b^2=1$，得$b^2=\frac{2}{3}$，故椭圆$E$的方程为$x^2+\frac{3y^2}{2}=1$.

5 【解析】(1)根据$c=\sqrt{a^2-b^2}$及题设知$M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$2b^2=3ac$.

将$b^2=a^2-c^2$代入$2b^2=3ac$，解得$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{c}{a}=-2$(舍去).

故C的离心率为$\frac{1}{2}$.

(2)由题意，原点O为F_1F_2的中点，$MF_2/\!/y$轴，所以直线MF_1与y轴的交点$D(0,2)$是线段MF_1的中点，故$\frac{b^2}{a}=4$，即

$b^2=4a$. ①

由$|MN|=5|F_1N|$得$|DF_1|=2|F_1N|$.

设$N(x_1,y_1)$，由题意知$y_1<0$，则

$\begin{cases}2(-c-x_1)=c,\\-2y_1=2,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}c,\\y_1=-1.\end{cases}$

代入C的方程，得$\frac{9c^2}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. ②

将①及$c=\sqrt{a^2-b^2}$代入②得$\frac{9(a^2-4a)}{4a^2}+\frac{1}{4a}=1$.

解得$a=7$，$b^2=4a=28$，故$a=7$，$b=2\sqrt{7}$.

6 【解析】(1)设椭圆右焦点F_2的坐标为$(c,0)$. 由$|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$，可得$a^2+b^2=3c^2$，又$b^2=a^2-c^2$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}$.

所以，椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由(1)知$a^2=2c^2$，$b^2=c^2$. 故椭圆方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$.

设$P(x_0,y_0)$. 由$F_1(-c,0)$，$B(0,c)$，有$\overrightarrow{F_1P}=(x_0+c,y_0)$，$\overrightarrow{F_1B}=(c,c)$.

由已知，有$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0$，即$(x_0+c)c+y_0c=0$. 又$c\neq0$，故有

$x_0+y_0+c=0$. ①

因为点P在椭圆上，故

$\frac{x_0^2}{2c^2}+\frac{y_0^2}{c^2}=1$. ②

由①和②可得$3x_0^2+4cx_0=0$. 而点P不是椭圆的顶点，故$x_0=-\frac{4}{3}c$，代入①得$y_0=\frac{c}{3}$，即点P的坐标为$\left(-\frac{4c}{3},\frac{c}{3}\right)$.

设圆的圆心为$T(x_1,y_1)$，则$x_1=\frac{-\frac{4}{3}c+0}{2}=-\frac{2}{3}c$，$y_1=\frac{\frac{c}{3}+c}{2}=\frac{2}{3}c$，进而圆的半径$r=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-c)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}c$.

由已知，有$|TF_2|^2=|MF_2|^2+r^2$，又$|MF_2|=2\sqrt{2}$，

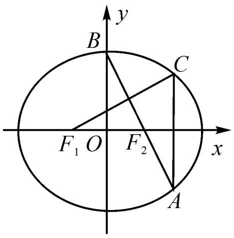
故有

$\left(c+\frac{2}{3}c\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}c\right)^2=8+\frac{5}{9}c^2$,

解得 $c^2=3$.

所以,所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

7【解析】设椭圆的焦距为 $2c$,则 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$.



第 7 题图

(1)因为 $B(0,b)$,所以 $BF_2=\sqrt{b^2+c^2}=a$.

又 $BF_2=\sqrt{2}$,故 $a=\sqrt{2}$.

因为点 $C\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$在椭圆上,所以$\frac{\frac{16}{9}}{a^2}+\frac{\frac{1}{9}}{b^2}=1$.

解得 $b^2=1$.

故所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)因为 $B(0,b)$,$F_2(c,0)$在直线 AB 上,

所以直线 AB 的方程为$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$.

解方程组

$\begin{cases}\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_1=\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\\ y_1=\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=b.\end{cases}$

所以点 A 的坐标为$\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$.

又 AC 垂直于 x 轴,由椭圆的对称性,可得点 C 的坐标为$\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}\right)$.

因为直线 F_1C 的斜率为 $\frac{\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}-0}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2}-(-c)}=\frac{b(a^2-c^2)}{3a^2c+c^3}$,直线 AB 的斜率为 $-\frac{b}{c}$,且 $F_1C\perp AB$,

所以$\frac{b(a^2-c^2)}{3a^2c+c^3}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$.

又 $b^2=a^2-c^2$,整理得 $a^2=5c^2$. 故 $e^2=\frac{1}{5}$. 因此 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8【解析】(1)由题意,椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

所以 $a^2=4$,$b^2=2$,从而 $c^2=a^2-b^2=2$.

因此 $a=2$,$c=\sqrt{2}$. 故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设点 A、B 的坐标分别为$(t,2)$,(x_0,y_0),其中 $x_0\neq0$.

因为 $OA\perp OB$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即 $tx_0+2y_0=0$,解得 $t=-\frac{2y_0}{x_0}$.

又 $x_0^2+2y_0^2=4$,所以

$|AB|^2=(x_0-t)^2+(y_0-2)^2$

$=\left(x_0+\frac{2y_0}{x_0}\right)^2+(y_0-2)^2$

$=x_0^2+y_0^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4$

$=x_0^2+\frac{4-x_0^2}{2}+\frac{2(4-x_0^2)}{x_0^2}+4$

$=\frac{x_0^2}{2}+\frac{8}{x_0^2}+4(0<x_0^2\leqslant4)$.

因为$\frac{x_0^2}{2}+\frac{8}{x_0^2}\geqslant4(0<x_0^2\leqslant4)$,且当 $x_0^2=4$ 时等号成立,所以$|AB|^2\geqslant8$.

故线段 AB 长度的最小值为 $2\sqrt{2}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	A	A	C
题号	6				
答案	C				

1 **C** 【解析】由题意知 $c=5\sqrt{2}$,设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2-50}+\frac{y^2}{a^2}=1$,联立方程得$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2-50}+\frac{y^2}{a^2}=1\\ y=3x-2\end{cases}$,消去 y,整理得$(10a^2-450)x^2-12(a^2-50)x+4(a^2-50)-a^2(a^2-50)=0$,则 $x_1+x_2=\frac{12(a^2-50)}{10a^2-450}=1$,所以 $a^2=75$.

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75}=1$.

2 **C** 【解析】圆 M 的方程可化为$(x+m)^2+y^2=3+m^2(m<0)$,则由题意得 $m^2+3=4$,即 $m^2=1$,$\therefore m=-1$,则圆心 M 的坐标为$(1,0)$. 由题意知直线 l 的方程为 $x=-c$,又直线 l 与圆 M 相切,$\therefore c=1$,$\therefore a^2-3=1$,$\therefore a=2$.

3 **A** 【解析】因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2c$,由 $a^2=b^2+c^2$,得$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$x_1+x_2=-\frac{2b}{a}=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,点 $P(x_1,x_2)$到原点$(0,0)$的距离 $d=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\sqrt{2}$.

4 **A** 【解析】当点 P 为短轴的端点时 $\angle F_1PF_2$ 最大,只要此时 $\angle F_1PF_2\leqslant90°$即可,这时 $|PF_1|=$

$|PF_2|=a,|F_1F_2|=2c$,故 $a^2+a^2\geqslant 4c^2$,解得 $e=\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故选 A.

5 **C** 【解析】若 $a^2=9,b^2=4+k$,则 $c=\sqrt{5-k}$,

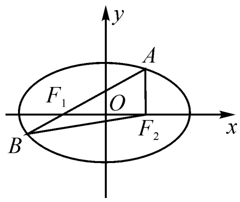
由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$,即 $\dfrac{\sqrt{5-k}}{3}=\dfrac{4}{5}$,得 $k=-\dfrac{19}{25}$;

若 $a^2=4+k,b^2=9$,则 $c=\sqrt{k-5}$,

由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$,即 $\dfrac{\sqrt{k-5}}{\sqrt{4+k}}=\dfrac{4}{5}$,解得 $k=21$.

6 **C** 【解析】根据椭圆定义 $|AF_1|+|AF_2|=2a=2$,$|BF_1|+|BF_2|=2a=2$,两式相加得 $|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4$,即 $(|AF_1|+|BF_1|)+(|AF_2|+|BF_2|)=4$,而 $|AF_1|+|BF_1|=|AB|$,$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$,所以 $3|AB|=4$,即 $|AB|=\dfrac{4}{3}$.

7 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 【解析】设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,因为 AB 过 F_1 且 A、B 在椭圆上,如图,则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=16$,$\therefore a=4$.



第 7 题图

又离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore c=2\sqrt{2}$,$\therefore b^2=a^2-c^2=8$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

8 $8\sqrt{3}$ cm 12 cm $\dfrac{1}{2}$ 【解析】作出经过椭圆长轴的圆柱的轴截面易得:$2a=\dfrac{12}{\cos 30^\circ}=8\sqrt{3}$(cm),短轴长即为底面圆直径 12 cm,

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$,$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

9 【解析】(1)$\because$ 椭圆 C 的焦距为 4,$\therefore c=2$.

又椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore a=2\sqrt{2}$,$b=2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$,

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-4k}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{-6}{1+2k^2}$.

由(1)知椭圆 C 的右焦点 F 的坐标为 $(2,0)$.

$\because$ 右焦点 F 在圆的内部,$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}<0$,

$\therefore (x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2<0$,

即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1<0$,

$\therefore (1+k^2)x_1x_2+(k-2)(x_1+x_2)+5=(1+k^2)\cdot\dfrac{-6}{1+2k^2}+(k-2)\cdot\dfrac{-4k}{1+2k^2}+5=\dfrac{8k-1}{1+2k^2}<0$,

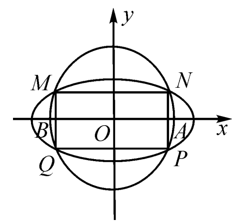
$\therefore k<\dfrac{1}{8}$.

经检验,当 $k<\dfrac{1}{8}$ 时,直线 l 与椭圆 C 相交.

故直线 l 的斜率 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{8}\right)$.

10 【解析】(1)设 $P(x,y)$,则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{1}{4}$,即 $\dfrac{y}{x-2}\cdot\dfrac{y}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$,

$\therefore C_1$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $(x\neq\pm 2)$.



第 10 题图

(2)如图,设椭圆 C_2 的方程为 $\dfrac{y^2}{m^2}+\dfrac{x^2}{n^2}=1(m>n>0)$,$N(x_1,y_1)$,由对称性得四边形 $MNPQ$ 的面积 $S=4x_1y_1$.

$\because \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$,$\therefore S=4\times 2\times\dfrac{x_1}{2}\times y_1\leqslant 8\times\dfrac{\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2}{2}=4$.

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{x_1}{2}=y_1,\\ \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\end{cases}$ 时等号成立,解得 $\begin{cases}x_1=\sqrt{2},\\ y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}}{m^2}+\dfrac{2}{n^2}=1,\\ e=\sqrt{1-\dfrac{n^2}{m^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m^2=3,\\ n^2=\dfrac{12}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆 C_2 的方程为 $\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{\frac{12}{5}}=1$,四边形 $MNPQ$ 的最大面积为 4.

专题 41 双曲线

5 年高考真题演练

1 **D** 【解析】根据已知条件,知 $||PF_1|-|PF_2||=$

$2a$，所以 $4a^2=b^2-3ab$，所以 $b=4a$，双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{17}$，选择 D.

2 **D** 【解析】因为双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$，所以 $e^2=1+\dfrac{3}{a^2}=4$，因此 $a^2=1$，$a=1$. 选 D.

3 **C** 【解析】双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$.

焦点为 $F(\pm c,0)$，故焦点到渐近线的距离 $d=\dfrac{|b\times c\pm a\times 0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\sqrt{3}$，解得 $b=\sqrt{3}$.

而离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$，故 $c=2a$，

又 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，所以 $a=1$.

故 $c=2a=2$，所以双曲线的焦距为 $2c=4$，选 C.

4 **A** 【解析】关于 t 的方程 $t^2\cos\theta+t\sin\theta=0$ 的两个不等实根为 $0,-\tan\theta(\tan\theta\neq 0)$，则过 A,B 两点的直线方程为 $y=-x\tan\theta$，双曲线 $\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 的渐近线为 $y=\pm x\tan\theta$，所以直线 $y=-x\tan\theta$ 与双曲线没有公共点. 故选 A.

5 **A** 【解析】双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{3m}-\dfrac{y^2}{3}=1$，焦点 F 到一条渐近线的距离为 $b=\sqrt{3}$. 选 A.

6 **A** 【解析】假定焦点在 x 轴上，点 P 在第一象限，F_1,F_2 分别为左、右焦点. 设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$，它们的离心率分别为 e_1,e_2，则 $|PF_1|=a+m$，$|PF_2|=a-m$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$4c^2=(a+m)^2+(a-m)^2-2(a+m)(a-m)\cos\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow a^2+3m^2=4c^2\Rightarrow\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+3\left(\dfrac{m}{c}\right)^2=4$，则 $\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+3\left(\dfrac{m}{c}\right)^2\right]\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\geqslant\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{m}{c}\right)^2\Rightarrow\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{m}{c}\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $a=3m$ 时，等号成立，故选 A.

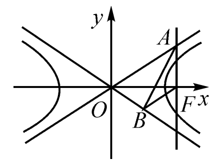
7 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$　$y=\pm 2x$

【解析】$\because$ 与双曲线 $\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$ 有相同渐近线的双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{4}-x^2=k$，将点 $(2,2)$ 代入，得 $k=-3$，$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$，其渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=0$，即 $y=\pm 2x$.

8 $y=\pm x$　【解析】抛物线 $x^2=2py$ 的准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$，与双曲线的方程联立得 $x^2=a^2\left(1+\dfrac{p^2}{4b^2}\right)$，根据已知得 $a^2\left(1+\dfrac{p^2}{4b^2}\right)=c^2$　①. 由 $|AF|=c$，得 $\dfrac{p^2}{4}+a^2=c^2$　②. 由①②可得 $a^2=b^2$，即 $a=b$，所以所求双曲线的渐近线方程是 $y=\pm x$.

9 【解析】(1) 设 $F(c,0)$，因为 $b=1$，所以 $c=\sqrt{a^2+1}$，

直线 OB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{a}x$，直线 BF 的方程为 $y=\dfrac{1}{a}(x-c)$，解得 $B\left(\dfrac{c}{2},-\dfrac{c}{2a}\right)$.



第 9 题图

又直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{1}{a}x$，则 $A\left(c,\dfrac{c}{a}\right)$，$k_{AB}=\dfrac{\dfrac{c}{a}-\left(-\dfrac{c}{2a}\right)}{c-\dfrac{c}{2}}=\dfrac{3}{a}$.

又因为 $AB\perp OB$，所以 $\dfrac{3}{a}\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1$，解得 $a^2=3$，故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2) 由(1)知 $a=\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{3}-y_0y=1(y_0\neq 0)$，即 $y=\dfrac{x_0x-3}{3y_0}$.

因为直线 AF 的方程为 $x=2$，所以直线 l 与 AF 的交点 $M\left(2,\dfrac{2x_0-3}{3y_0}\right)$；

直线 l 与直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 的交点为 $N\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\dfrac{3}{2}x_0-3}{3y_0}\right)$.

则 $\dfrac{|MF|^2}{|NF|^2}=\dfrac{\dfrac{(2x_0-3)^2}{(3y_0)^2}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}x_0-3\right)^2}{(3y_0)^2}}=\dfrac{(2x_0-3)^2}{\dfrac{9y_0^2}{4}+\dfrac{9}{4}(x_0-2)^2}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(2x_0-3)^2}{3y_0^2+3(x_0-2)^2}$，

因为 $P(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，则 $\dfrac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，代入上式得

$\dfrac{|MF|^2}{|NF|^2}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(2x_0-3)^2}{x_0^2-3+3(x_0-2)^2}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(2x_0-3)^2}{4x_0^2-12x_0+9}=\dfrac{4}{3}$，所求定值为 $\dfrac{|MF|}{|NF|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

10【解析】(1)由题设知$\frac{c}{a}=3$,即$\frac{a^2+b^2}{a^2}=9$,

故$b^2=8a^2$.

所以C的方程为$8x^2-y^2=8a^2$.

将$y=2$代入上式,并求得$x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$.

由题设知,$2\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$,解得$a^2=1$.

所以$a=1,b=2\sqrt{2}$.

(2)由(1)知,$F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$,C的方程为$8x^2-y^2=8$. ①

由题意可设l的方程为$y=k(x-3)$,$|k|<2\sqrt{2}$,代入①并化简得$(k^2-8)x^2-6k^2x+9k^2+8=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则

$x_1\leqslant-1,x_2\geqslant1,x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8},x_1\cdot x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$.

于是

$|AF_1|=\sqrt{(x_1+3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+3)^2+8x_1^2-8}=-(3x_1+1)$,

$|BF_1|=\sqrt{(x_2+3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2+3)^2+8x_2^2-8}=3x_2+1$.

由$|AF_1|=|BF_1|$得$-(3x_1+1)=3x_2+1$,即$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$.

故$\frac{6k^2}{k^2-8}=-\frac{2}{3}$,解得$k^2=\frac{4}{5}$,从而$x_1\cdot x_2=-\frac{19}{9}$.

由于$|AF_2|=\sqrt{(x_1-3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-3)^2+8x_1^2-8}=1-3x_1$,

$|BF_2|=\sqrt{(x_2-3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2-3)^2+8x_2^2-8}=3x_2-1$.

故$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=2-3(x_1+x_2)=4$,

$|AF_2|\cdot|BF_2|=3(x_1+x_2)-9x_1x_2-1=16$.

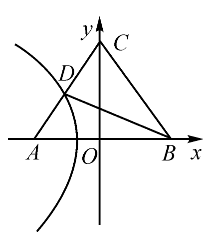
因而$|AF_2|\cdot|BF_2|=|AB|^2$,所以$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**C**	**C**	**B**	**A**	**C**

1 **C**

2 **C** 【解析】如图,设$|AB|=2c$,显然$|AD|=c$,$|BD|=\sqrt{3}c$,即$(\sqrt{3}-1)c=2a$,$\therefore e=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$,故选C.



第2题图

3 **B** 【解析】根据双曲线的性质得,$|OF|=c$,$|FA|=b$,于是$|OA|=a$,由$S_{\triangle OAF}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$及$S_{\triangle OAF}=\frac{1}{2}ab$,易得$b=\sqrt{3}a$,故$c=2a$,因此双曲线的离心率$e=2$,故选B.

4 **A** 【解析】设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c(c>0)$,则$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

在直线方程$x-y-2a=0$中,令$y=0$,得$x=2a$,即直线$x-y-2a=0$与x轴交于点$(2a,0)$,则有$2a=c$,

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$,

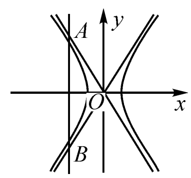
故双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$,

即$y=\pm\sqrt{3}x$.

5 **C** 【解析】由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$得$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,设$|\overrightarrow{PF_1}|=m$,$|\overrightarrow{PF_2}|=n$,不妨设$m>n$,则$m^2+n^2=4c^2$,$m-n=2a$,$\frac{1}{2}mn=9$,$\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$,解得$\begin{cases}a=4,\\c=5,\end{cases}$$\therefore b=3$,$\therefore a+b=7$.

6 2 【解析】如图,由$e=\frac{c}{a}=2$,得$c=2a$,$b=\sqrt{3}a$,所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

又抛物线的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$,



第6题图

所以联立双曲线的渐近线方程和抛物线的准线方程可求得$A\left(-\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$,$B\left(-\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

在$\triangle AOB$中,$|AB|=\sqrt{3}p$,O到AB的距离为$\frac{p}{2}$,因为$S_{\triangle AOB}=\sqrt{3}$,所以$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}p\cdot\frac{p}{2}=\sqrt{3}$,所以$p=2$.

7 $\sqrt{2}$ 【解析】依题意得,圆心$F(c,0)$到渐近线的距离等于$\frac{\sqrt{2}}{2}c$,即有$b=\frac{\sqrt{2}}{2}c$(注:双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于其虚半轴长),$c^2=2b^2=2(c^2-a^2)$,$c^2=2a^2$,$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,即双曲线C的离心率为$\sqrt{2}$.

8【解析】(1)由题意可设所求的双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则有$e=\frac{c}{a}=2$,$c=2$,所以$a=1$,则$b=\sqrt{3}$. 所以所求的双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)因为直线l与y轴相交于M且过焦点$F(-2,$

0),所以 l 的斜率一定存在,设为 k,则 $l:y=k(x+2)$,令 $x=0$,得 $M(0,2k)$,因为 $|\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$,且 M,Q,F 共线于 l,所以 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$ 或 $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$.

当 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$ 时,$x_Q=-\frac{4}{3}$,$y_Q=\frac{2}{3}k$,所以 Q 的坐标为 $\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}k\right)$. 因为 Q 在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上,所以 $\frac{16}{9}-\frac{4k^2}{27}=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$. 所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\pm\sqrt{21}}{2}(x+2)$.

当 $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$ 时,同理求得 $Q(-4,-2k)$ 代入双曲线方程得,$16-\frac{4k^2}{3}=1$,解得 $k=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}(x+2)$.

综上,所求的直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}(x+2)$ 或 $y=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}(x+2)$.

9 【解析】(1) 双曲线 $C:\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1$,左焦点 $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$.

设 $M(x,y)$,则 $|MF|^2=\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+y^2=\left(\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$,

由 M 是右支上一点,知 $x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $|MF|=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\sqrt{2}\right)$.

(2) 左顶点 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

过点 A 与渐近线 $y=\sqrt{2}x$ 平行的直线方程为 $y=\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,即 $y=\sqrt{2}x+1$.

解方程组 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}x,\\ y=\sqrt{2}x+1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4},\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

故所求平行四边形的面积为 $S=|OA|\cdot|y|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) 设直线 PQ 的方程是 $y=kx+b$. 因直线 PQ 与已知圆相切,故 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,即 $b^2=k^2+1$. $(*)$

由 $\begin{cases}y=kx+b,\\ 2x^2-y^2=1\end{cases}$ 得 $(2-k^2)x^2-2kbx-b^2-1=0$.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2kb}{2-k^2},\\ x_1x_2=\frac{-1-b^2}{2-k^2},\end{cases}$

又 $y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)$,

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$

$=(1+k^2)x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$

$=\frac{(1+k^2)(-1-b^2)}{2-k^2}+\frac{2k^2b^2}{2-k^2}+b^2=\frac{-1+b^2-k^2}{2-k^2}$.

由 $(*)$ 知,$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,所以 $OP\perp OQ$.

专题 42 抛物线

5 年高考真题演练

1 A

2 D

3 B 【解析】设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$(不妨假设 $y_1>0,y_2<0$),直线 AB 的方程为 $x=ty+m$,且直线 AB 与 x 轴的交点为 $M(m,0)$. 由 $\begin{cases}x=ty+m,\\ y^2=x\end{cases}$ 消去 x,得 $y^2-ty-m=0$,所以 $y_1y_2=-m$. 又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,所以 $x_1x_2+y_1y_2=2$,$(y_1y_2)^2+y_1y_2-2=0$,因为点 A,B 在抛物线上且位于 x 轴的两侧,所以 $y_1y_2=-2$,故 $m=2$. 又 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$,于是 $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\times2\times(y_1-y_2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times y_1=\frac{9}{8}y_1+\frac{2}{y_1}\geqslant2\sqrt{\frac{9}{8}y_1\times\frac{2}{y_1}}=3$,当且仅当 $\frac{9}{8}y_1=\frac{2}{y_1}$,即 $y_1=\frac{4}{3}$ 时取"=",所以 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 3.

4 C 【解析】由题意知抛物线的焦点 $F(\sqrt{2},0)$,由抛物线定义知 $|PF|=|PM|$,又 $|PF|=4\sqrt{2}$,所以 $x_P=3\sqrt{2}$,代入抛物线方程求得 $y_P=2\sqrt{6}$,所以 $S_{\triangle POF}=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot y_P=2\sqrt{3}$.

5 C 【解析】由已知得抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,设点 $A(0,2)$,抛物线上点 $M(x_0,y_0)$,则 $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{p}{2},-2\right)$,$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0-2\right)$. 由已知得,$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,即 $y_0^2-8y_0+16=0$,因而 $y_0=4$,$M\left(\frac{8}{p},4\right)$. 由 $|MF|=5$ 得,$\sqrt{\left(\frac{8}{p}-\frac{p}{2}\right)^2+16}=5$,又 $p>0$,解得 $p=2$ 或 $p=8$,故选 C.

6 C 【解析】过点 M 作 MM' 垂直于准线 $y=-1$ 于点 M',则由抛物线的定义知 $|MM'|=|FM|$,所以 $\frac{|FM|}{|MN|}=\frac{|MM'|}{|MN|}=\sin\angle MNM'$,而 $\angle MNM'$ 为直线 FA 的倾斜角 α 的补角.

因为直线 FA 过点 $A(2,0)$、$F(0,1)$，所以 $k_{FA}=-\frac{1}{2}=\tan\alpha$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\sin\angle MNM'=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 故 $|FM|:|MN|=1:\sqrt{5}$.

7 $1+\sqrt{2}$ 【解析】由正方形的定义可知 $BC=CD$，结合抛物线的定义得点 D 为抛物线的焦点，所以 $|AD|=p=a$，$D\left(\frac{p}{2},0\right)$，$F\left(\frac{p}{2}+b,b\right)$，将点 F 的坐标代入抛物线的方程得 $b^2=2p\left(\frac{p}{2}+b\right)=a^2+2ab$，变形得 $\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2b}{a}-1=0$，解得 $\frac{b}{a}=1+\sqrt{2}$ 或 $\frac{b}{a}=1-\sqrt{2}$（舍去），所以 $\frac{b}{a}=1+\sqrt{2}$.

8 【解析】(1) 设 $Q(x_0,4)$，代入 $y^2=2px$ 得 $x_0=\frac{8}{p}$.

所以 $|PQ|=\frac{8}{p}$，$|QF|=\frac{p}{2}+x_0=\frac{p}{2}+\frac{8}{p}$.

由题设得 $\frac{p}{2}+\frac{8}{p}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{p}$，解得 $p=-2$（舍去）或 $p=2$.

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 依题意知 l 与坐标轴不垂直，故可设 l 的方程为 $x=my+1(m\neq 0)$.

代入 $y^2=4x$ 得 $y^2-4my-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

故 AB 的中点为 $D(2m^2+1,2m)$，$|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=4(m^2+1)$.

又 l' 的斜率为 $-m$，所以 l' 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2m^2+3$.

将上式代入 $y^2=4x$，并整理得 $y^2+\frac{4}{m}y-4(2m^2+3)=0$.

设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，则 $y_3+y_4=-\frac{4}{m}$，$y_3y_4=-4(2m^2+3)$.

故 MN 的中点为 $E\left(\frac{2}{m^2}+2m^2+3,-\frac{2}{m}\right)$，$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=\frac{4(m^2+1)\sqrt{2m^2+1}}{m^2}$.

由于 MN 垂直平分 AB，故 A、M、B、N 四点在同一圆上等价于 $|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，从而 $\frac{1}{4}|AB|^2+|DE|^2=\frac{1}{4}|MN|^2$，即

$$4(m^2+1)^2+\left(2m+\frac{2}{m}\right)^2+\left(\frac{2}{m^2}+2\right)^2=\frac{4(m^2+1)^2(2m^2+1)}{m^4},$$

化简得 $m^2-1=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-1$.

所求直线 l 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$.

9 【解析】(1) 设直线 l_1,l_2 的方程分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x(k_1,k_2\neq 0)$，则

由 $\begin{cases}y=k_1x,\\ y^2=2p_1x,\end{cases}$ 得 $A_1\left(\frac{2p_1}{k_1^2},\frac{2p_1}{k_1}\right)$，

由 $\begin{cases}y=k_1x,\\ y^2=2p_2x,\end{cases}$ 得 $A_2\left(\frac{2p_2}{k_1^2},\frac{2p_2}{k_1}\right)$.

同理可得 $B_1\left(\frac{2p_1}{k_2^2},\frac{2p_1}{k_2}\right)$，$B_2\left(\frac{2p_2}{k_2^2},\frac{2p_2}{k_2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(\frac{2p_1}{k_2^2}-\frac{2p_1}{k_1^2},\frac{2p_1}{k_2}-\frac{2p_1}{k_1}\right)=2p_1\left(\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_1^2},\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right)$，

$\overrightarrow{A_2B_2}=\left(\frac{2p_2}{k_2^2}-\frac{2p_2}{k_1^2},\frac{2p_2}{k_2}-\frac{2p_2}{k_1}\right)=2p_2\left(\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_1^2},\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right)$.

故 $\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{p_1}{p_2}\overrightarrow{A_2B_2}$，所以 $A_1B_1\parallel A_2B_2$.

(2) 由(1)知 $A_1B_1\parallel A_2B_2$，同理可得 $B_1C_1\parallel B_2C_2$，$C_1A_1\parallel C_2A_2$.

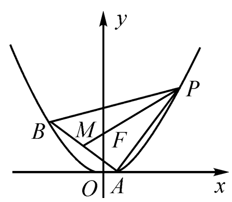
所以 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

因此 $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{A_2B_2}|}\right)^2$.

又由(1)中的 $\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{p_1}{p_2}\overrightarrow{A_2B_2}$ 知 $\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{A_2B_2}|}=\frac{p_1}{p_2}$.

故 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{p_1^2}{p_2^2}$.

10 【解析】(1) 由题意知焦点 $F(0,1)$，准线方程为 $y=-1$.



第 10 题图

设 $P(x_0,y_0)$，由抛物线定义知 $|PF|=y_0+1$，得到 $y_0=2$，所以 $P(2\sqrt{2},2)$ 或 $P(-2\sqrt{2},2)$.

由 $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$，分别得 $M\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3}\right)$ 或 $M\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3}\right)$.

(2) 设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2=4y\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4m=0$.

于是 $\Delta=16k^2+16m>0$，$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4m$，

所以 AB 中点 M 的坐标为 $(2k,2k^2+m)$.

由 $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$，得 $(-x_0,1-y_0)=3(2k,2k^2+m-1)$，

所以 $\begin{cases}x_0=-6k,\\y_0=4-6k^2-3m.\end{cases}$ 由 $x_0^2=4y_0$ 得 $k^2=-\frac{1}{5}m+\frac{4}{15}$.

由 $\Delta>0,k^2\geqslant0$,得 $-\frac{1}{3}<m\leqslant\frac{4}{3}$.

又因为 $|AB|=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+m}$,

点 $F(0,1)$ 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|m-1|}{\sqrt{1+k^2}}$.

所以 $S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle ABF}=8|m-1|\sqrt{k^2+m}=\frac{16}{\sqrt{15}}\sqrt{3m^3-5m^2+m+1}$.

记 $f(m)=3m^3-5m^2+m+1\left(-\frac{1}{3}<m\leqslant\frac{4}{3}\right)$.

令 $f'(m)=9m^2-10m+1=0$,解得 $m_1=\frac{1}{9}$,$m_2=1$.

可得 $f(m)$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$ 上是增函数,在 $\left(\frac{1}{9},1\right)$ 上是减函数,在 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 上是增函数. 又 $f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{256}{243}>f\left(\frac{4}{3}\right)$.

所以,当 $m=\frac{1}{9}$ 时,$f(m)$ 取到最大值 $\frac{256}{243}$,此时 $k=\pm\frac{\sqrt{55}}{15}$.

所以,$\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\frac{256\sqrt{5}}{135}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**D**	**B**	**C**
题号	6	7			
答案	**D**	**C**			

1 **B**

2 **D**

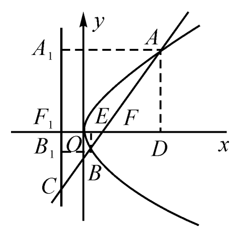
3 **D** 【解析】由题意知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. ∵ 双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点为点 $(4,0)$,∴ $\frac{p}{2}=4$,$p=8$,∴ 抛物线方程为 $y^2=16x$,$K(-4,0)$. 设 $A(x,y)$,由 $|AK|=\sqrt{2}|AF|$,得 $(x+4)^2+y^2=2(x-4)^2+2y^2$,即 $x^2+y^2-24x+16=0$,与 $y^2=16x$ 联立,解得 $x=4$,$y=\pm8$,∴ $\triangle AFK$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times8\times8=32$.

4 **B** 【解析】依题意得,$\triangle OFM$ 的外接圆半径为 3,$\triangle OFM$ 的外接圆圆心应位于线段 OF 的垂直平分线 $x=\frac{p}{4}$ 上,圆心到准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离等于 3,即有 $\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=3$,由此解得 $p=4$,选 B.

5 **C** 【解析】依题意,设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$,又焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,$x_1+x_2+x_3=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)+\left(x_2+\frac{1}{2}\right)+\left(x_3+\frac{1}{2}\right)=(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$,选 C.

6 **D** 【解析】设点 $D(a,b)$,则由 $OD\perp AB$ 于 D,得 $\begin{cases}\frac{b}{a}=-\frac{1}{k},\\b=k(a-m),\end{cases}$ 则 $b=-\frac{km}{1+k^2}$,$a=-bk$;又动点 D 的坐标满足方程 $x^2+y^2-4x=0$,即 $a^2+b^2-4a=0$,将 $a=-bk$ 代入上式,得 $b^2k^2+b^2+4bk=0$,即 $bk^2+b+4k=0$,$-\frac{k^3m}{1+k^2}-\frac{km}{1+k^2}+4k=0$,又 $k\neq0$,则 $(1+k^2)(4-m)=0$,因此 $m=4$.

7 **C** 【解析】过点 B 作准线的垂线,垂足为 B_1,记准线与 x 轴的交点为 F_1,则依题意得 $\frac{|BB_1|}{|FF_1|}=\frac{|BC|}{|CF|}=\frac{2}{3}$.



第 7 题图

所以 $|BB_1|=\frac{2}{3}|FF_1|=\frac{2p}{3}$,

由抛物线的定义得 $|BF|=|BB_1|=\frac{2p}{3}$. 过 A,B 作 x 轴的垂线,垂足分别为 D,E,由 $\triangle BEF\backsim\triangle ADF$ 得 $\frac{\frac{2}{3}p}{3}=\frac{p-\frac{2p}{3}}{3-p}$,解得 $p=\frac{3}{2}$. 所以此抛物线的方程是 $y^2=3x$.

8 $\frac{5}{2}$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由抛物线的定义可知 $|AF|+|BF|=\frac{p}{2}+x_1+\frac{p}{2}+x_2=x_1+x_2+p=6$,∵ $p=1$,∴ $x_1+x_2=5$,∴ 线段 AB 的中点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{2}$,∴ 线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{2}$.

9 3 【解析】由抛物线 $y^2=4x$ 可得准线 l 的方程为:$x=-1$,过点 P 作 $PN\perp l$,垂足为 N. 由抛物线定义

知,$|PN|=|PF|$. 当且仅当点 Q,N,P 共线时,$|PF|+|PQ|$ 取得最小值 $|QN|$,最小值为 $|2-(-1)|=3$.

10【解析】(1)直线 AB 的方程是 $y=2\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{p}{2}\right)$,与 $y^2=2px$ 联立,从而有 $4x^2-5px+p^2=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{5p}{4}$,由抛物线定义得:$|AB|=x_1+x_2+p=9$,所以 $p=4$,从而抛物线方程是 $y^2=8x$.

(2)由 $p=4$,$4x^2-5px+p^2=0$ 可化简为 $x^2-5x+4=0$,从而 $x_1=1,x_2=4,y_1=-2\sqrt{2},y_2=4\sqrt{2}$,从而 $A(1,-2\sqrt{2}),B(4,4\sqrt{2})$;

设 $\overrightarrow{OC}=(x_3,y_3)=(1,-2\sqrt{2})+\lambda(4,4\sqrt{2})=(4\lambda+1,4\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2})$,又 $y_3^2=8x_3$,即 $[2\sqrt{2}(2\lambda-1)]^2=8(4\lambda+1)$,即 $(2\lambda-1)^2=4\lambda+1$,解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

11【解析】(1)因为抛物线 $C_1:x^2=4y$ 上任意一点 (x,y) 的切线斜率为 $y'=\frac{x}{2}$,且切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,所以 A 点坐标为 $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$,故切线 MA 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}$. 因为点 $M(1-\sqrt{2},y_0)$ 在切线 MA 及抛物线 C_2 上,

于是 $y_0=-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})+\frac{1}{4}=-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$,①

$y_0=-\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2p}=-\frac{3-2\sqrt{2}}{2p}$,②

由①②得 $p=2$.

(2)设 $N(x,y)$,$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,$x_1\neq x_2$.

由 N 为线段 AB 中点知 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$,③ $y=\frac{x_1^2+x_2^2}{8}$. ④

切线 MA,MB 的方程为 $y=\frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$,⑤

$y=\frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$. ⑥

由⑤⑥得 MA,MB 的交点 $M(x_0,y_0)$ 的坐标为 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,$y_0=\frac{x_1x_2}{4}$.

因为点 $M(x_0,y_0)$ 在 C_2 上,即 $x_0^2=-4y_0$,

所以 $x_1x_2=-\frac{x_1^2+x_2^2}{6}$. ⑦ 由③④⑦得 $x^2=\frac{4}{3}y$,$x\neq 0$.

当 $x_1=x_2$ 时,A,B 重合于原点 O,AB 中点 N 为 O,坐标满足 $x^2=\frac{4}{3}y$.

因此 AB 中点 N 的轨迹方程为 $x^2=\frac{4}{3}y$.

12【解析】(1)由已知可得 $\triangle BFD$ 为等腰直角三角形,$|BD|=2p$,圆 F 的半径 $|FA|=\sqrt{2}p$.

由抛物线定义可知 A 到 l 的距离 $d=|FA|=\sqrt{2}p$.

因为 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$,所以 $\frac{1}{2}|BD|\cdot d=4\sqrt{2}$,即 $\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot\sqrt{2}p=4\sqrt{2}$,解得 $p=-2$(舍去)或 $p=2$.

所以 $F(0,1)$,圆 F 的方程为 $x^2+(y-1)^2=8$.

(2)因为 A,B,F 三点在同一直线 m 上,所以 AB 为圆 F 的直径,$\angle ADB=90°$.

由抛物线定义知 $|AD|=|FA|=\frac{1}{2}|AB|$,

所以 $\angle ABD=30°$,m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,由已知可设 $n:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$,代入 $x^2=2py$ 得 $x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-2pb=0$.

由于 n 与 C 只有一个公共点,故 $\Delta=\frac{4}{3}p^2+8pb=0$,解得 $b=-\frac{p}{6}$.

因为 m 的纵截距 $b_1=\frac{p}{2}$,$\frac{|b_1|}{|b|}=3$,所以坐标原点到 m,n 距离的比值为 3.

当 m 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,由图形对称性可知,坐标原点到 m,n 距离的比值为 3.

专题 43 直线与圆锥曲线的位置关系

5 年高考真题演练

1 D **2** C

3 C 【解析】抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$,所以 AB 所在的直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$,将 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$ 代入 $y^2=3x$,消去 y 整理得 $x^2-\frac{21}{2}x+\frac{9}{16}=0$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\frac{21}{2}$,由抛物线的定义可得 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12$,故选 C.

4 $k>1$ 或 $k<-1$ 【解析】由题意可知机器人的轨迹为一抛物线,其轨迹方程为 $y^2=4x$,过点 $P(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线方程为 $y=k(x+1)$,由题意知直线与抛物线无交点,联立消去 y 得 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$,则 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4<0$,所以 $k^2>1$,得 $k>1$ 或 $k<-1$.

5【解析】(1)依题意得，$c=\sqrt{5}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，因此 $a=3$，$b^2=a^2-c^2=4$，

故椭圆 C 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)若两切线的斜率均存在，设过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程是 $y=k(x-x_0)+y_0$，

则由 $\begin{cases}y=k(x-x_0)+y_0,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{[k(x-x_0)+y_0]^2}{4}=1$，

即 $(9k^2+4)x^2+18k(y_0-kx_0)x+9[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，$\Delta=[18k(y_0-kx_0)]^2-36(9k^2+4)[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，整理得 $(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$.

又所引的两条切线相互垂直，设两切线的斜率分别为 k_1,k_2 于是有 $k_1k_2=-1$，即 $\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$，

即 $x_0^2+y_0^2=13(x_0\neq\pm3)$.

若两切线中有一条斜率不存在，则易得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-3,\\ y_0=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-3,\\ y_0=-2,\end{cases}$ 经检验知均满足 $x_0^2+y_0^2=13$.

因此，动点 $P(x_0,y_0)$ 的轨迹方程是 $x^2+y^2=13$.

6【解析】(1)设点 $M(x,y)$，依题意得 $|MF|=|x|+1$，即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$，

化简整理得 $y^2=2(|x|+x)$.

故轨迹 C 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x,x\geqslant0,\\ 0,x<0.\end{cases}$

(2)在点 M 的轨迹 C 中，记 $C_1:y^2=4x$，$C_2:y=0(x<0)$.

依题意，可设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$.

由方程组 $\begin{cases}y-1=k(x+2),\\ y^2=4x,\end{cases}$

可得 $ky^2-4y+4(2k+1)=0$. ①

(i)当 $k=0$ 时，此时 $y=1$. 把 $y=1$ 代入轨迹 C 的方程，得 $x=\dfrac{1}{4}$.

故此时直线 $l:y=1$ 与轨迹 C 恰好有一个公共点 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$.

(ii)当 $k\neq0$ 时，方程①的判别式为 $\Delta=-16(2k^2+k-1)$. ②

设直线 l 与 x 轴的交点为 $(x_0,0)$，则

由 $y-1=k(x+2)$，令 $y=0$，得 $x_0=-\dfrac{2k+1}{k}$. ③

a. 若 $\begin{cases}\Delta<0,\\ x_0<0,\end{cases}$ 由②③解得 $k<-1$，或 $k>\dfrac{1}{2}$.

即当 $k\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，直线 l 与 C_1 没有公共点，与 C_2 有一个公共点，故此时直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点.

b. 若 $\begin{cases}\Delta=0,\\ x_0<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_0\geqslant0,\end{cases}$ 由②③解得 $k\in\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$，或 $-\dfrac{1}{2}\leqslant k<0$.

即当 $k\in\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$ 时，直线 l 与 C_1 只有一个公共点，与 C_2 有一个公共点.

当 $k\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，直线 l 与 C_1 有两个公共点，与 C_2 没有公共点.

故当 $k\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$ 时，直线 l 与轨迹 C 恰好有两个公共点.

c. 若 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_0<0,\end{cases}$ 由②③解得 $-1<k<-\dfrac{1}{2}$，或 $0<k<\dfrac{1}{2}$.

即当 $k\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，直线 l 与 C_1 有两个公共点，与 C_2 有一个公共点，故此时直线 l 与轨迹 C 恰好有三个公共点.

综合(i)(ii)可知，当 $k\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\cup\{0\}$ 时，直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点；当 $k\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$ 时，直线 l 与轨迹 C 恰好有两个公共点；当 $k\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，直线 l 与轨迹 C 恰好有三个公共点.

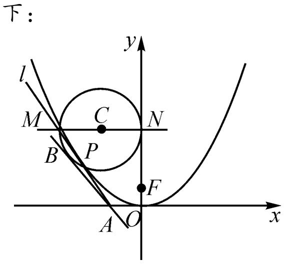
7【解析】解法一：(1)设 $S(x,y)$ 为曲线 Γ 上任意一点，

依题意，点 S 到 $F(0,1)$ 的距离与它到直线 $y=-1$ 的距离相等，

所以曲线 Γ 是以点 $F(0,1)$ 为焦点、直线 $y=-1$ 为准线的抛物线，

所以曲线 Γ 的方程为 $x^2=4y$.

(2)当点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变. 证明如下：



第 7 题图

由(1)知抛物线 Γ 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，

设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq0)$，则 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2$，

由 $y'=\frac{1}{2}x$，得切线 l 的斜率 $k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{2}x_0$，所以切线 l 的方程为 $y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$，即 $y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2$.

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2,\\ y=0\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{1}{2}x_0,0\right)$.

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2,\\ y=3\end{cases}$ 得 $M\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{6}{x_0},3\right)$.

又 $N(0,3)$，所以圆心 $C\left(\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{x_0},3\right)$，

半径 $r=\frac{1}{2}|MN|=\left|\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{x_0}\right|$，

$|AB|=\sqrt{|AC|^2-r^2}=$

$\sqrt{\left[\frac{1}{2}x_0-\left(\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{x_0}\right)\right]^2+3^2-\left(\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{x_0}\right)^2}$

$=\sqrt{6}$.

所以点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变.

解法二：(1)设 $S(x,y)$ 为曲线 Γ 上任意一点，

则 $|y-(-3)|-\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=2$，

依题意，点 $S(x,y)$ 只能在直线 $y=-3$ 的上方，所以 $y>-3$，

所以 $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=y+1$，

化简得，曲线 Γ 的方程为 $x^2=4y$.

(2)同解法一.

8【解析】(1)设 C_2 的焦距为 $2c_2$，由题意知，$2c_2=2$，$2a_1=2$，从而 $a_1=1$，$c_2=1$. 因为点 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$ 在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 上，所以 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{1}{b_1^2}=1$. 故 $b_1^2=3$.

由椭圆的定义知

$2a_2=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1-1)^2}+\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{3}$.

于是 $a_2=\sqrt{3}$，$b_2^2=a_2^2-c_2^2=2$，故 C_1，C_2 的方程分别为

$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)不存在符合题设条件的直线.

(i)若直线 l 垂直于 x 轴，因为 l 与 C_2 只有一个公共点，所以直线 l 的方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，易知 $A(\sqrt{2},\sqrt{3})$，$B(\sqrt{2},-\sqrt{3})$，所以

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$.

此时，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，同理可知，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

(ii)若直线 l 不垂直于 x 轴，设 l 的方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$.

当 l 与 C_1 相交于 A，B 两点时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 x_1，x_2 是上述方程的两个实根，从而 $x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}$.

于是 $y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(2k^2+3)x^2+4kmx+2m^2-6=0$.

因为直线 l 与 C_2 只有一个公共点，所以上述方程的判别式

$\Delta=16k^2m^2-8(2k^2+3)(m^2-3)=0$.

化简，得 $2k^2=m^2-3$，因此

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}+\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}=\frac{-k^2-3}{k^2-3}\neq0$，于是

$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，

即 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2\neq|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2$，故 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

综合(i)，(ii)可知，不存在符合题设条件的直线.

高考试题专项预测

1【解析】(1)在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由 $\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\cdot\sin60^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，得 $|MF_1||MF_2|=\frac{16}{3}$.

由余弦定理，得 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1||MF_2|\cos60^\circ=(|MF_1|+|MF_2|)^2-2|MF_1||MF_2|(1+\cos60^\circ)$，解得 $|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{2}$.

从而 $2a=|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{2}$，即 $a=2\sqrt{2}$.

由 $|F_1F_2|=4$ 得 $c=2$，从而 $b=2$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则其方程为 $y+2=k(x+1)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y+2=k(x+1),\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4k(k-2)x+2k^2-8k=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{4k(k-2)}{1+2k^2}$,

$x_1x_2=\frac{2k^2-8k}{1+2k^2}$.

从而 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1}+\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(k-4)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k-(k-4)\cdot\frac{4k(k-2)}{2k^2-8k}=4$.

当直线 l 的斜率不存在时,可得 $A\left(-1,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$,$B\left(-1,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$,得 $k_1+k_2=4$.

综上,k_1+k_2 为定值.

2【解析】(1)依题意,$|OB|=8\sqrt{3}$,$\angle BOy=30°$.

设 $B(x,y)$,则 $x=|OB|\sin30°=4\sqrt{3}$,$y=|OB|\cdot\cos30°=12$.

因为点 $B(4\sqrt{3},12)$ 在 $x^2=2py$ 上,所以 $(4\sqrt{3})^2=2p\times12$,解得 $p=2$. 故抛物线 E 的方程为 $x^2=4y$.

(2)由(1)知 $y=\frac{1}{4}x^2$,$y'=\frac{1}{2}x$.

设 $P(x_0,y_0)$,则 $x_0\neq0$,且 l 的方程为

$y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$,即 $y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2$.

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2,\\ y=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{x_0^2-4}{2x_0},\\ y=-1.\end{cases}$

所以 $Q\left(\frac{x_0^2-4}{2x_0},-1\right)$.

设 $M(0,y_1)$,令 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$ 对满足 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2(x_0\neq0)$ 的点 (x_0,y_0) 恒成立.

由于 $\overrightarrow{MP}=(x_0,y_0-y_1)$,$\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{x_0^2-4}{2x_0},-1-y_1\right)$,

由 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$,得 $\frac{x_0^2-4}{2}-y_0-y_0y_1+y_1+y_1^2=0$,

即 $(y_1^2+y_1-2)+(1-y_1)y_0=0$ (*).

由于(*)式对满足 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2(x_0\neq0)$ 的 y_0 恒成立,

所以 $\begin{cases}1-y_1=0,\\ y_1^2+y_1-2=0,\end{cases}$ 解得 $y_1=1$.

故以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上的定点 $M(0,1)$.

3【解析】(1)线段 OB 的垂直平分线为 $y=\frac{1}{2}$.

因为四边形 $OABC$ 为菱形,

所以直线 $y=\frac{1}{2}$ 与椭圆的交点即为 A,C 两点.

对椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,令 $y=\frac{1}{2}$ 得 $x=\pm\sqrt{3}$,所以 $|AC|=2\sqrt{3}$.

(2)当点 B 不是 W 的顶点时,

联立方程 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$,

$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$.

$y_1+y_2=kx_1+m+kx_2+m=k(x_1+x_2)+2m=-\frac{8k^2m}{1+4k^2}+2m=\frac{2m}{1+4k^2}$.

若四边形 $OABC$ 为菱形,则 $|OA|=|OC|$,即 $|OA|^2=|OC|^2$.

所以 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$,即 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(y_2+y_1)(y_2-y_1)$.

因为点 B 不是 W 的顶点,所以 $x_1-x_2\neq0$,

所以 $\frac{x_1+x_2}{y_2+y_1}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$,即 $-\frac{\frac{8km}{1+4k^2}}{\frac{2m}{1+4k^2}}=-k$,即 $k=4k$.

所以 $k=0$. 此时,直线 AC 与 y 轴垂直,所以 B 为椭圆的上顶点或下顶点,与已知矛盾,所以四边形 $OABC$ 不可能为菱形.

4【解析】(1)由已知得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{2b^2}{a}=1$,$a^2=b^2+c^2$,

解得 $a^2=4$,$b^2=1$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$. 又 $F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$,所以直线 PF_1,PF_2 的方程分别为 $l_{PF_1}:y_0x-(x_0+\sqrt{3})y+\sqrt{3}y_0=0$,$l_{PF_2}:y_0x-(x_0-\sqrt{3})y-\sqrt{3}y_0=0$.

由题意知 $\frac{|my_0+\sqrt{3}y_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+\sqrt{3})^2}}=\frac{|my_0-\sqrt{3}y_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-\sqrt{3})^2}}$.

由于点 P 在椭圆上,所以 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,

$\frac{|m+\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0+2\right)^2}}=\frac{|m-\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-2\right)^2}}$.

因为 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$,$-2<x_0<2$,所以 $\frac{m+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x_0+2}=\frac{\sqrt{3}-m}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0}$.

所以 $m=\frac{3}{4}x_0$. 因此 $m\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

(3)设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$,则直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y-y_0=k(x-x_0),\end{cases}$整理得$(1+4k^2)x^2+8(ky_0-k^2x_0)x+4(y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2-1)=0$.

由题意得$\Delta=0$,即$(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$.

又$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,所以$16y_0^2k^2+8x_0y_0k+x_0^2=0$,故$k=-\dfrac{x_0}{4y_0}$.

而由(2)知,$k_1=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}$,$k_2=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}$,故

$\dfrac{1}{kk_1}+\dfrac{1}{kk_2}=-\dfrac{4y_0}{x_0}\left(\dfrac{x_0+\sqrt{3}}{y_0}+\dfrac{x_0-\sqrt{3}}{y_0}\right)=-8$,为定值.

5【解析】(1)依题意可设AB方程为$y=kx+2$,代入$x^2=4y$,得$x^2=4(kx+2)$,即$x^2-4kx-8=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有$x_1x_2=-8$,

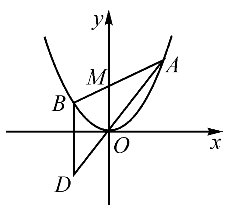
直线AO的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$;BD的方程为$x=x_2$.

解得交点D的坐标为$\begin{cases}x=x_2,\\ y=\dfrac{y_1x_2}{x_1}.\end{cases}$

注意到$x_1x_2=-8$及$x_1^2=4y_1$,则有$y=\dfrac{y_1x_1x_2}{x_1^2}=\dfrac{-8y_1}{4y_1}=-2$,

因此D点在定直线$y=-2(x\neq0)$上.

(2)依题设,切线l的斜率存在且不等于0,设切线l的方程为$y=ax+b(a\neq0)$,代入$x^2=4y$得$x^2=4(ax+b)$,



第5题图

即$x^2-4ax-4b=0$,

由$\Delta=0$得$(4a)^2+16b=0$,化简整理得$b=-a^2$.

故切线l的方程可写为$y=ax-a^2$.

分别令$y=2$、$y=-2$得N_1、N_2的坐标为$N_1\left(\dfrac{2}{a}+a,2\right)$,$N_2\left(-\dfrac{2}{a}+a,-2\right)$,

则$|MN_2|^2-|MN_1|^2=\left(\dfrac{2}{a}-a\right)^2+4^2-\left(\dfrac{2}{a}+a\right)^2=8$,即$|MN_2|^2-|MN_1|^2$为定值8.

6【解析】(1)由已知可得,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,$c=2$,所以$a=\sqrt{6}$.

又由$a^2=b^2+c^2$,解得$b=\sqrt{2}$,所以椭圆C的标准方程是$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)设T点的坐标为$(-3,m)$,则直线TF的斜率$k_{TF}=\dfrac{m-0}{-3-(-2)}=-m$.

当$m\neq0$时,直线PQ的斜率$k_{PQ}=\dfrac{1}{m}$,直线PQ的方程是$x=my-2$.

当$m=0$时,直线PQ的方程是$x=-2$,也符合$x=my-2$的形式.

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,将直线PQ的方程与椭圆C的方程联立,得

$\begin{cases}x=my-2,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1.\end{cases}$消去$x$,得$(m^2+3)y^2-4my-2=0$,

其判别式$\Delta=16m^2+8(m^2+3)>0$.

所以$y_1+y_2=\dfrac{4m}{m^2+3}$,$y_1y_2=\dfrac{-2}{m^2+3}$,$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\dfrac{-12}{m^2+3}$.

因为四边形$OPTQ$是平行四边形,所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QT}$,即$(x_1,y_1)=(-3-x_2,m-y_2)$.

所以$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-12}{m^2+3}=-3,\\ y_1+y_2=\dfrac{4m}{m^2+3}=m.\end{cases}$解得$m=\pm1$.

此时,四边形$OPTQ$的面积

$S_{四边形OPTQ}=2S_{\triangle OPQ}=2\times\dfrac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|=2\sqrt{\left(\dfrac{4m}{m^2+3}\right)^2-4\cdot\dfrac{-2}{m^2+3}}=2\sqrt{3}$.

专题44 算法初步与框图

5年高考真题演练

1 D **2** B

3 C 【解析】由初始值的特征可知,输出的数列首项为2,又$a_i=2\times S$,$S=a_i$,$i=i+1$,$\therefore\dfrac{a_{i+1}}{a_i}=2$,则输出的数列是首项为2,公比为2的等比数列,故通项公式为$a_n=2^n$.

4 C 【解析】分两种情况,当x,y满足$x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1$时,运用线性规划知识先画出可行域,再将直线$2x+y=0$平移至过点$(1,0)$,得到$S$的最大值为2;当$x,y$不满足$x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1$时,$S$等于1,综合两种情况知应选C.

5 C 【解析】通过阅读理解知,算法语句是一个分段函数$f(x)=\begin{cases}0.5x,x\leqslant50,\\25+0.6(x-50),x>50,\end{cases}$ $\therefore f(60)=25+0.6\times(60-50)=31$,选C.

6 20 【解析】输入$n=3$,则$i=0,S=0,T=0,i\leqslant n$成立,故$i=1,S=0+1=1,T=0+1=1$,此时$i=1\leqslant n$成立,故$i=2,S=1+2=3,T=1+3=4$,此时$i=2\leqslant n$成立,故$i=3,S=3+3=6,T=4+6=10$,

此时 $i=3\leqslant n$ 成立，故 $i=4,S=6+4=10,T=10+10=20$，此时 $i=4\leqslant n$ 不成立，故输出 $T=20$.

7 3 【解析】此题的伪代码的含义：输出两数中的较大者，所以 $m=3$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	B	A	B	C
题号	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	D	B

1 D **2** B

3 A 【解析】由程序框图可知，第一次循环：$i=1$，$s=0+2^{1-1}\times1=0+1=1$；第二次循环：$i=2,s=1+2^{2-1}\times2=1+4=5$；第三次循环：$i=3,s=5+2^{3-1}\times3=5+12=17$；第四次循环：$i=4,s=17+2^{4-1}\times4=17+32=49$；第五次循环：$i=5,s=49+2^{5-1}\times5=49+80=129>100$，结束循环，所以输出的 i 值为 5.

4 B 【解析】依题意得，第一次运行，$S=\frac{1}{2},n=4$，$k=2$；第二次运行，$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},n=6,k=3$；…；第九次运行，$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{18},n=20,k=10$；第十次运行，$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20},n=22,k=11$，此时结束循环，故程序框图的功能是求数列 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ 的前 10 项和.

5 C 【解析】依题意，$1+2^2+3^2=14<20<1+2^2+3^2+4^2=30$，因此输出的 p 的值是 30，故选 C.

6 B 【解析】由程序框图可知，$A=1,1\leqslant9$ 成立，得 $S=1,A=2$；当 $A=2$ 时，$2\leqslant9$ 成立，得 $S=3,A=3$；当 $A=3$ 时，$3\leqslant9$ 成立，得 $S=6,A=4$；…；当 $A=9$ 时，$9\leqslant9$ 成立，得 $S=45,A=10$；因为 $10\leqslant9$ 不成立，所以跳出循环，输出 $S=45$.

7 C 【解析】$i=1,s=1+2=3,1>4$ 不成立，继续循环；$i=2,s=3+2^2=7,2>4$ 不成立，继续循环；$i=3,s=7+2^3=15,3>4$ 不成立，继续循环；$i=4,s=15+2^4=31,4>4$ 不成立，继续循环；$i=5,s=31+2^5=63,5>4$ 成立，跳出循环，故输出结果为 63.

8 C 【解析】依题意及程序框图可得，$\begin{cases}-2<x<2,\\1\leqslant2^x\leqslant3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x|\geqslant2,\\1\leqslant x+1\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x\leqslant\log_2 3$ 或 $x=2$，故选 C.

9 D 【解析】由题意可知，程序框图的运算原理可视为函数 $S=a\otimes b=\begin{cases}a(b+1),a\geqslant b,\\a(b-1),a<b,\end{cases}$ 所以 $2\tan\frac{5\pi}{4}\otimes\ln e=2\otimes1=4$，$\lg100\otimes\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=2\otimes3=4$，所以 $\left[\left(2\tan\frac{5\pi}{4}\right)\otimes\ln e\right]-\left[\lg100\otimes\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]=4-4=0$，故选 D.

10 B 【解析】由题意可知 $S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{4\,029\times4\,031}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4\,027}-\frac{1}{4\,029}+\frac{1}{4\,029}-\frac{1}{4\,031}\right)=\frac{2\,015}{4\,031}$.

11 负数 3 【解析】该算法程序中使用的是条件语句，根据其特征可得出结果.

12 ③ 【解析】由结构图的构成及相应知识结构可知，①、②、④均为逻辑关系，只有③是从属关系.

13 定义 通项公式 性质 前 n 项和公式 【解析】一般情况下，“下位”要素比“上位”要素更为具体.

14 17 【解析】i 从 1 开始，依次取 3，5，7，…，当 $i<8$ 时，循环继续进行，故当 $i=9$ 时，跳出循环，故输出 $S=2\times7+3=17$.

15 6 000 【解析】∵ 月收入在[1 000，1 500)的频率为 $0.000\,8\times500=0.4$，且第一组的频数为 4 000，∴ 样本容量 $n=\frac{4\,000}{0.4}=10\,000$，由图乙知，输出的 $S=A_2+A_3+\cdots+A_6=10\,000-4\,000=6\,000$.

专题 45 抽样方法

5 年高考真题演练

1 A **2** C

3 A 【解析】样本抽取比例为 $\frac{70}{3\,500}=\frac{1}{50}$，该校总人数为 1 500 + 3 500 = 5 000，则 $\frac{n}{5\,000}=\frac{1}{50}$，故 $n=100$，选 A.

4 B 【解析】依据系统抽样为等距抽样的特点，总体被分成 42 组，每组 20 人，区间[481，720]包含第 25 组到第 36 组，每组抽 1 人，则抽到的人数为 12.

5 C 【解析】若抽样方法是分层抽样，男生、女生应分别抽取 6 人、4 人，所以 A 错；由题意看不出是系统抽样，所以 B 错；这五名男生成绩的平均数 $\bar{x}_1=\frac{86+94+88+92+90}{5}=90$，这五名女生成绩的平均数 $\bar{x}_2=\frac{88+93+93+88+93}{5}=91$，故这五名男生成绩的方差为 $\frac{1}{5}[(86-90)^2+(94-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2+(90-90)^2]=8$，这五名女生成绩的方差为 $\frac{1}{5}[(88-91)^2\times2+(93-91)^2\times3]=6$，所以这五名男生成绩的方差大于这

五名女生成绩的方差，但该班男生成绩的平均数不一定小于女生成绩的平均数，所以 D 错，故选 C.

6 60 【解析】设应从一年级本科生中抽取 x 名学生，则 $\frac{x}{300}=\frac{4}{4+5+5+6}$，解得 $x=60$.

7 1 800 【解析】样本中甲设备生产的有 50 件，则乙设备生产的有 30 件. 在 4 800 件产品中，甲、乙设备生产的产品总数比为 5∶3，所以乙设备生产的产品总数为 1 800 件.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	C	D	B
题号	6				
答案	C				

1 B　**2** B

3 C 【解析】①②③显然正确，系统抽样无论有无剔除都是等概率抽样，④不正确.

4 D 【解析】系统抽样方法抽取到的导弹编号应该是 $k,k+d,k+2d,k+3d,k+4d$，其中 $d=\frac{50}{5}=10$，k 是 1 ~ 10 中用简单随机抽样方法得到的数.

5 B 【解析】设有教辅人员 x 人，则 $10x+x+24=200$，解得 $x=16$，∴ 教学人员应抽取 $16\times10\times\frac{50}{200}=40$(人).

6 C 【解析】从随机数表第 1 行的第 6 列和第 7 列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出的 6 个红色球的编号依次为 21，32，09，16，17，02，故选出的第 6 个红色球的编号为 02.

7 150 【解析】由题意可知该学校的教师人数为 $\frac{160-150}{160}\times2\ 400=150$.

8 1 211 【解析】由题意知 $k=\frac{3\ 000}{150}=20$，又第一组抽出的号码是 11，则 $11+60\times20=1\ 211$，故第六十一组抽出的号码为 1 211.

9 900 【解析】设该校高中学生总人数为 n，则 $\frac{45}{n}=\frac{45-20-10}{300}$，解得 $n=900$.

10 36 【解析】设从高二年级参加跑步的学生中应抽取 m 人，∵ 登山的人数占总人数的 $\frac{2}{5}$，故跑步的人数占总人数的 $\frac{3}{5}$，又∵ 跑步的人数中高二年级占 $\frac{3}{2+3+5}=\frac{3}{10}$，

∴ 高二年级跑步的人数占总人数的 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$.

由 $\frac{9}{50}=\frac{m}{200}$ 得 $m=36$.

▶ 专题 46　用样本估计总体

5 年高考真题演练

1 C　**2** D

3 B 【解析】由频率分布直方图可得，该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为 $600-(0.005+0.015)\times10\times600=480$.

4 B 【解析】成绩在 $[20,40)$ 和 $[40,60)$ 的频率分别是 0.1，0.2，则低于 60 分的频率是 0.3，设该班学生总人数为 m，则 $\frac{15}{m}=0.3$，$m=50$.

5 10 【解析】设 5 个班级的数据分别为 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$（$a,b,c,d,e$ 均为正整数）. 由平均数及方差的公式得 $\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)=7$，$\frac{1}{5}[(a-7)^2+(b-7)^2+(c-7)^2+(d-7)^2+(e-7)^2]=4$. 设 $a-7,b-7,c-7,d-7,e-7$ 分别为 p,q,r,s,t，则 p,q,r,s,t 均为整数，有 $\begin{cases}p+q+r+s+t=0,\\p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=20.\end{cases}$ 设 $f(x)=(x-p)^2+(x-q)^2+(x-r)^2+(x-s)^2=4x^2-2(p+q+r+s)x+(p^2+q^2+r^2+s^2)=4x^2+2tx+20-t^2$，由 $(x-p)^2,(x-q)^2,(x-r)^2,(x-s)^2$ 互不相同知 $f(x)>0$，则判别式 $\Delta<0$，解得 $-4<t<4$，所以 $-3\leqslant t\leqslant3$，所以 e 的最大值为 10.

6 0.004 4　70 【解析】(1) 根据频率之和为 1，得 $(0.002\ 4+0.003\ 6+0.006\ 0+x+0.002\ 4+0.001\ 2)\times50=1$，解得 $x=0.004\ 4$；

(2) $(0.003\ 6+0.006\ 0+0.004\ 4)\times50\times100=70$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	D	C	A
题号	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	A	D

1 C　**2** C

3 D 【解析】由题意可知 $\bar{x}_1=61$，$\bar{x}_2=62$，$s_1=\sqrt{\frac{316}{7}}$，$s_2=\sqrt{\frac{342}{7}}$，故选 D.

4 C 【解析】由表格数据可知，丙平均环数高，且方差最小，说明丙技术稳定，且成绩好，选 C.

5 A 【解析】$\bar{x}_{甲}=7$，$s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2]=\frac{2}{5}$，$\bar{x}_{乙}=7$，$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(6-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+$

$(9-7)^2]=\frac{6}{5}$,

两组数据的方差中较小的一个为 $s_{甲}^2$,即 $s^2=\frac{2}{5}$.

6 **B** 【解析】$\bar{x}_A=\frac{2.5+10+5+7.5+2.5+10}{6}=6.25$,

$\bar{x}_B=\frac{15+10+12.5+10+12.5+10}{6}=\frac{70}{6}>6.25$.

从图中数据可以看出,样本 A 中数据波动性大,数据分散,故 $s_A>s_B$.

7 **A** 【解析】记原数据依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$,则新数据依次为 $2x_1-80,2x_2-80,2x_3-80,\cdots,2x_n-80$,且 $\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)-80n}{n}=1.2$,因此有 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1.2+80}{2}=40.6$,故正确选项为 A.

8 **C** 【解析】由已知得网民年龄在[20,25)的频率为 $0.01\times5=0.05$,在[25,30)的频率为 $0.07\times5=0.35$.因为年龄在[30,35),[35,40),[40,45]的上网人数呈现递减的等差数列分布,所以其频率也呈现递减的等差数列分布,又年龄在[30,45]的频率为 $1-0.05-0.35=0.6$,所以年龄在[35,40)的频率为0.2.故选 C.

9 **A** 【解析】依题意得,这 n 名学生的成绩中,得1分的人数为 b_1-b_2;得2分的人数为 b_2-b_3;得3分的人数为 b_3-b_4;…;得148分的人数为 $b_{148}-b_{149}$;得149分的人数为 $b_{149}-b_{150}$;得150分的人数为 b_{150},因此在这次测试中所有学生的总成绩为 $(b_1-b_2)+2(b_2-b_3)+3(b_3-b_4)+\cdots+148(b_{148}-b_{149})+149(b_{149}-b_{150})+150b_{150}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{148}+b_{149}+b_{150}$,$M=\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{148}+b_{149}+b_{150}}{n}$,选 A.

10 **D** 【解析】由题意知在170~190 cm段的学生人数为 $A_6+A_7+A_8+A_9$,故 i 取6,7,8,9,故选 D.

11 8 【解析】依题意,甲班学生的平均分 $85=\frac{78+79+85+80+x+80+92+96}{7}$,故 $x=5$,乙班学生成绩的中位数为83,故其成绩为76,81,81,83,91,91,96,所以 $y=3$,则 $x+y=8$.

12 6.2 【解析】用组中值进行估计,$\frac{1}{60}\times(1\times3+3\times6+5\times18+7\times18+9\times15)=6.2$,则旅客平均提前预订车票的时间大约为6.2天.

13 48 【解析】前3个小组的频率之和为 $1-5\times(0.0375+0.0125)=0.75$,那么第3小组的频率是 $0.75\times\frac{3}{1+2+3}=0.375$,所以 $n=\frac{18}{0.375}=48$.

专题47 变量的相关性与统计案例

5年高考真题演练

1 **D** 【解析】因为 $x_1^2=\frac{52\times(6\times22-14\times10)^2}{16\times36\times32\times20}=\frac{52\times8^2}{16\times36\times32\times20}$,

$x_2^2=\frac{52\times(4\times20-16\times12)^2}{16\times36\times32\times20}=\frac{52\times112^2}{16\times36\times32\times20}$,

$x_3^2=\frac{52\times(8\times24-12\times8)^2}{16\times36\times32\times20}=\frac{52\times96^2}{16\times36\times32\times20}$,

$x_4^2=\frac{52\times(14\times30-6\times2)^2}{16\times36\times32\times20}=\frac{52\times408^2}{16\times36\times32\times20}$,

则有 $x_4^2>x_2^2>x_3^2>x_1^2$,所以阅读量与性别关联的可能性最大.

2 **D** 【解析】①中 y 与 x 负相关而斜率为正,不正确;④中 y 与 x 正相关而斜率为负,不正确.故选 D.

3 **C** 【解析】由两组数据(1,0)和(2,2)可求得直线方程为 $y=2x-2$,$b'=2$,$a'=-2$.而利用线性回归方程的公式与已知表格中的数据,可求得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{58-6\times\frac{7}{2}\times\frac{13}{6}}{91-6\times\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{5}{7}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{13}{6}-\frac{5}{7}\times\frac{7}{2}=-\frac{1}{3}$,所以 $\hat{b}<b'$,$\hat{a}>a'$.

4 **D** 【解析】因为所有的点都在直线上,所以它就是确定的函数关系,所以相关系数为1.

5 **A** 【解析】依题意知,相应的回归直线的斜率应为正,排除 C、D,且直线必过点(3,3.5),代入 A、B 得 A 正确.

6 【解析】(1)由所给数据计算得

$\bar{t}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$,

$\bar{y}=\frac{1}{7}(2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9)=4.3$,

$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=9+4+1+0+1+4+9=28$,

$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-1.4)+(-2)\times(-1)+(-1)\times(-0.7)+0\times0.1+1\times0.5+2\times0.9+3\times1.6=14$,

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{14}{28}=0.5$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=4.3-0.5\times4=2.3$,

所求回归方程为 $y=0.5t+2.3$.

(2)由(1)知,$b=0.5>0$,故2007年至2013年该

地区农村居民家庭人均纯收入逐年增加，平均每年增加0.5千元.

将2015年的年份代号 $t=9$ 代入(1)中的回归方程，得 $y=0.5\times9+2.3=6.8$，

故预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入约为6.8千元.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**D**	**B**	**B**	**D**	**B**
题号	6	7			
答案	**A**	**C**			

1 **D** **2** **B** **3** **B**

4 **D** 【解析】A项，由于回归方程中 x 的系数为正，所以 y 与 x 具有正的线性相关关系，A正确；B项，由线性回归方程的推导可知回归方程必过样本中心点 $(\bar{x},\bar{y})$，B正确；C项，身高增加1 cm，则 $\Delta y=0.85(x+1)-85.71-(0.85x-85.71)=0.85$(kg)，C正确. D项，将170代入回归方程得 $y=58.79$ kg，这个值只能是一个推测的结果，和实际值允许有误差，D错误.

5 **B** 【解析】$\because \bar{x}=\dfrac{4+2+3+5}{4}=\dfrac{7}{2}$，

$\bar{y}=\dfrac{49+26+39+54}{4}=42$，

又 $\because \hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 必过 $(\bar{x},\bar{y})$，

$\therefore 42=\dfrac{7}{2}\times9.4+\hat{a}$，$\therefore \hat{a}=9.1$.

$\therefore$ 线性回归方程为 $\hat{y}=9.4x+9.1$.

$\therefore$ 当 $x=6$ 时，$\hat{y}=9.4\times6+9.1=65.5$(万元).

6 **A** 【解析】由 $\hat{y}=0.66x+1.562$ 知，当 $y=7.675$ 时，$x=\dfrac{6\,113}{660}$，$\therefore$ 所求百分比为 $\dfrac{7.675}{x}=\dfrac{7.675\times660}{6\,113}\approx83\%$

7 **C** 【解析】①变量 x 增加一个单位时，y 平均减少3个单位，所以①错误. ②③正确.

8 185.03 【解析】将 $y=24.8$ 代入得 $x\approx185.03$(cm).

9 $y=\dfrac{7}{4}x+\dfrac{23}{4}$ 【解析】$\sum\limits_{i=1}^{3}x_iy_i=434$，$\bar{x}=7$，$\bar{y}=18$，$\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2=179$，

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}x_iy_i-3\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2-3\bar{x}^2}=\frac{7}{4}.$$

$\because$ 线性回归方程过点 $(\bar{x},\bar{y})$，$\therefore 18=\dfrac{7}{4}\times7+\hat{a}$，

$\therefore \hat{a}=\dfrac{23}{4}$，$\therefore$ 线性回归方程为 $y=\dfrac{7}{4}x+\dfrac{23}{4}$.

▶ 专题48 随机事件的概率与古典概型

5年高考真题演练

1 **B** 【解析】5个点中任取2个点共有10种方法，若2个点之间的距离小于边长，则这2个点中必须有1个为中心点，有4种方法，于是所求概率 $P=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

2 **B**

3 **C**

4 **B** 【解析】从1，2，3，4中任取2个不同的数有以下六种取法：(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，3)，(2，4)，(3，4)，满足取出的2个数之差的绝对值为2的有(1，3)，(2，4)，故所求概率是 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

5 $\dfrac{1}{5}$ 【解析】从五个数中任意取出两个数的可能结果有：(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，4)，(3，5)，(4，5)，共10个，其中“和为5”的结果有(1，4)，(2，3)，故所求概率为 $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

6 $\dfrac{1}{3}$ 【解析】甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝3种颜色的运动服中选择1种的所有可能情况为(红，白)，(白，红)，(红，蓝)，(蓝，红)，(白，蓝)，(蓝，白)，(红，红)，(白，白)，(蓝，蓝)，共9种，他们选择相同颜色运动服的所有可能情况为(红，红)，(白，白)，(蓝，蓝)，共3种. 故所求概率为 $P=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.

7 $\dfrac{1}{3}$ 【解析】设3张奖券中一等奖、二等奖和无奖分别为 a,b,c，甲、乙两人各抽取1张的所有情况有 ab,ac,ba,bc,ca,cb，共6种，其中两人都中奖的情况有 ab,ba，共2种，所以所求概率为 $\dfrac{1}{3}$.

8 0.4 【解析】从 a,b,c,d,e 中任取两个不同字母的所有基本事件为：$ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de$，共10个，其中取到字母 a 的有4个，故所求概率为 $\dfrac{4}{10}=0.4$.

9 【解析】(1)从6名同学中随机选出2人参加知识竞赛的所有可能结果为 $\{A,B\}$，$\{A,C\}$，$\{A,X\}$，$\{A,Y\}$，$\{A,Z\}$，$\{B,C\}$，$\{B,X\}$，$\{B,Y\}$，$\{B,Z\}$，$\{C,X\}$，$\{C,Y\}$，$\{C,Z\}$，$\{X,Y\}$，$\{X,Z\}$，$\{Y,Z\}$，共15种.

(2)选出的2人来自不同年级且恰有1名男同学

和1名女同学的所有可能结果为$\{A,Y\}$,$\{A,Z\}$,$\{B,X\}$,$\{B,Z\}$,$\{C,X\}$,$\{C,Y\}$,共6种.

因此,事件M发生的概率$P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

10【解析】(1)由题意,(a,b,c)所有可能情况为$(1,1,1)$,$(1,1,2)$,$(1,1,3)$,$(1,2,1)$,$(1,2,2)$,$(1,2,3)$,$(1,3,1)$,$(1,3,2)$,$(1,3,3)$,$(2,1,1)$,$(2,1,2)$,$(2,1,3)$,$(2,2,1)$,$(2,2,2)$,$(2,2,3)$,$(2,3,1)$,$(2,3,2)$,$(2,3,3)$,$(3,1,1)$,$(3,1,2)$,$(3,1,3)$,$(3,2,1)$,$(3,2,2)$,$(3,2,3)$,$(3,3,1)$,$(3,3,2)$,$(3,3,3)$,共27种.

设"抽取的卡片上的数字满足$a+b=c$"为事件A,则事件A包括$(1,1,2)$,$(1,2,3)$,$(2,1,3)$,共3种.

所以$P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

因此,"抽取的卡片上的数字满足$a+b=c$"的概率为$\frac{1}{9}$.

(2)设"抽取的卡片上的数字a,b,c不完全相同"为事件B,

则事件$\overline{B}$包括$(1,1,1)$,$(2,2,2)$,$(3,3,3)$,共3种.

所以$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{3}{27}=\frac{8}{9}$.

因此,"抽取的卡片上的数字a,b,c不完全相同"的概率为$\frac{8}{9}$.

11【解析】(1)甲组研发新产品的成绩为

1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1.

其平均数为$\overline{x}_{甲}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$;

方差为$s_{甲}^2=\frac{1}{15}\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times10+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times5\right]=\frac{2}{9}$.

乙组研发新产品的成绩为

1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1.

其平均数为$\overline{x}_{乙}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$;

方差为$s_{乙}^2=\frac{1}{15}\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times9+\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\times6\right]=\frac{6}{25}$.

因为$\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$,$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲组的研发水平优于乙组.

(2)记$E=\{$恰有一组研发成功$\}$.

在所抽得的15个结果中,恰有一组研发成功的结果是$(a,\overline{b})$,$(\overline{a},b)$,$(a,\overline{b})$,$(\overline{a},b)$,$(a,\overline{b})$,$(a,\overline{b})$,$(\overline{a},b)$,共7个,故事件E发生的频率为$\frac{7}{15}$.

将频率视为概率,即得所求概率为$P(E)=\frac{7}{15}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	C	C	A	C	A
题号	6	7	8	9	10
答案	A	C	D	D	A

1 C　**2** C

3 A　【解析】一枚骰子掷两次,其基本事件总数为36,方程有实根的充要条件为$b^2\geqslant4c$.

b	1	2	3	4	5	6
满足$b^2\geqslant4c$的基本事件个数	0	1	2	4	6	6

由此可见,使方程有实根的基本事件个数为$1+2+4+6+6=19$,于是方程有实根的概率为$P=\frac{19}{36}$.

4 C　【解析】(3)中"至少有一个是奇数"即"两个奇数或一奇一偶",而从1~7中任取两个数,根据取到数的奇偶性可认为共有三个基本事件:"两个都是奇数""一奇一偶""两个都是偶数",故"至少有一个是奇数"与"两个都是偶数"是对立事件.易知其余都不是对立事件.

5 A　【解析】取到卡片的号码为奇数的次数为:$13+5+6+18+11=53$,则所求的频率为$\frac{53}{100}=0.53$.故选A.

6 A　【解析】从已知数据可以看出,在随机抽取的这20位学生中,身高在155.5~170.5 cm之间的学生有8人,频率为$\frac{2}{5}$,故可估计在该校高二年级的所有学生中任抽一人,其身高在155.5~170.5 cm之间的频率约为$\frac{2}{5}$.

7 C　【解析】"甲胜"是"和棋或乙胜"的对立事件,所以甲胜的概率为$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

设"甲不输"为事件A,则A可看作是"甲胜"与"和棋"这两个互斥事件的和事件,所以$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

8 D　【解析】由题意可知$\begin{cases}0<P(A)<1,\\0<P(B)<1,\\P(A)+P(B)\leqslant1\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}0<2-a<1,\\0<4a-5<1,\\3a-3\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<a<2,\\\frac{5}{4}<a<\frac{3}{2},\\a\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{4}<a\leqslant\frac{4}{3}.$$

9 **D** 【解析】从写有数字 1,2,3,4 的 4 张卡片中随机抽取 2 张,有 12,13,14,23,24,34 共 6 种,取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的取法有 12,14,23,34 共 4 种,故取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率是 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

10 **A** 【解析】根据甲、乙参加每个小组的可能性相同,且参加结果为有限个,可以将所求问题转化为古典概型. 记三个兴趣小组分别为 1,2,3,甲参加 1 组记为"甲 1",则基本事件为"甲 1,乙 1;甲 1,乙 2;甲 1,乙 3;甲 2,乙 1;甲 2,乙 2;甲 2,乙 3;甲 3,乙 1;甲 3,乙 2;甲 3,乙 3",共 9 个. 记事件 A 为"甲、乙两位同学参加同一个兴趣小组",其中事件 A 有"甲 1,乙 1;甲 2,乙 2;甲 3,乙 3",共 3 个. 因此 $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

11 0.5 【解析】依题意知,此射击运动员在一次射击中射中环数不超过 8 环的概率为 $1-(0.2+0.3)=0.5$.

12 0.9 【解析】记"该食品企业在一个月内被消费者投诉的次数为 2"为事件 C,"该食品企业在一个月内被消费者投诉不超过 1 次"为事件 D,由题意知 C 与 D 是对立事件,所以 $P(D)=1-P(C)=1-0.1=0.9$.

13 $\frac{2}{3}$ 【解析】由题意知"出现奇数点"的概率是事件 A 的概率,"出现 2 点"的概率是事件 B 的概率,事件 A,B 互斥,则"出现奇数点或 2 点"的概率为 $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

14 【解析】所种作物总株数 $N=1+2+3+4+5=15$,其中三角形地块内部的作物株数为 3,边界上的作物株数为 12.

从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株的不同结果有 36 种,选取的两株作物恰好"相近"的不同结果有 $3+3+2=8$(种).

故从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物,它们恰好"相近"的概率为 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

15 【解析】(1)根据频数分布表,苹果重量在[90,95)范围内的频数为 20,因为样本容量为 50,故所求频率为 $\frac{20}{50}=0.4$.

(2)重量在[80,85)和[95,100)范围内的苹果的频数之比为 $5:15=1:3$,又 $4\times\frac{1}{4}=1$,故重量在[80,85)内的苹果有 1 个.

(3)从苹果重量在[80,85)范围内抽取的苹果记为 a,从[95,100)范围内抽取的苹果记为 1,2,3,则任取两个苹果的所有情况为 $\{a,1\},\{a,2\},\{a,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$,共 6 个. 记事件 $A=\{$重量在[80,85)和[95,100)中各有 1 个苹果$\}$,其包含的基本事件个数为 3,故 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

16 【解析】(1)变量 x 是在 $1,2,3,\cdots,24$ 这 24 个整数中随机产生的一个数,共有 24 种可能.

当 x 从 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23 这 12 个数中产生时,输出 y 的值为 1,故 $P_1=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$;

当 x 从 2,4,8,10,14,16,20,22 这 8 个数中产生时,输出 y 的值为 2,故 $P_2=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$;

当 x 从 6,12,18,24 这 4 个数中产生时,输出 y 的值为 3,故 $P_3=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$.

所以,输出 y 的值为 1 的概率为 $\frac{1}{2}$,输出 y 的值为 2 的概率为 $\frac{1}{3}$,输出 y 的值为 3 的概率为 $\frac{1}{6}$.

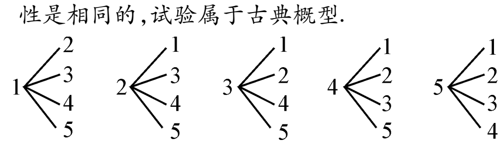
(2)当 $n=2\ 100$ 时,甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 $i(i=1,2,3)$ 的频率如下:

	输出 y 的值为 1 的频率	输出 y 的值为 2 的频率	输出 y 的值为 3 的频率
甲	$\frac{1\ 027}{2\ 100}$	$\frac{376}{2\ 100}$	$\frac{697}{2\ 100}$
乙	$\frac{1\ 051}{2\ 100}$	$\frac{696}{2\ 100}$	$\frac{353}{2\ 100}$

比较频率与概率,可得乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大.

17 【解析】(1)利用树形图我们可以列出连续抽取 2 张卡片的所有可能结果.

从图中可以看出,试验的所有可能结果数为 20,因为每次都随机抽取,所以这 20 种结果出现的可能性是相同的,试验属于古典概型.



第 17 题图

用 A_1 表示事件"连续抽取 2 人,其中一男一女",A_2 表示事件"连续抽取 2 人都是女生",则 A_1 与 A_2 互斥,并且 $A_1\cup A_2$ 表示事件"连续抽取 2 张卡片,取出的 2 人不全是男生",由列出的所有可能结果可以看出,A_1 的结果有 12 种,A_2 的结果有 2 种,由互斥事件的概率加法公式,可得 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{12}{20}+\frac{2}{20}=\frac{7}{10}=0.7$,即连续抽取 2 张卡片,取出的 2 人不是男生的概率为 0.7.

(2)有放回地连续抽取 2 张卡片,需注意同一张卡

片可再次被取出,并且它被取出的可能性和其他卡片相等,我们用一个有序实数对表示抽取的结果,例如“第一次取出2号,第二次取出4号”就用(2,4)来表示,所有的可能结果可以用下表列出:

第二次抽取 / 第一次抽取	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

试验的所有可能结果数为25,并且这25种结果出现的可能性是相同的,试验属于古典概型.

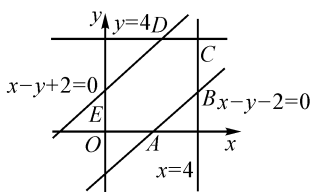
用A表示事件“独唱和朗诵由同一个人表演”,由上表可以看出,A的结果共有5种,因此独唱和朗诵由同一个人表演的概率$P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=0.2$.

专题49 几何概型与随机模拟

5年高考真题演练

1 D

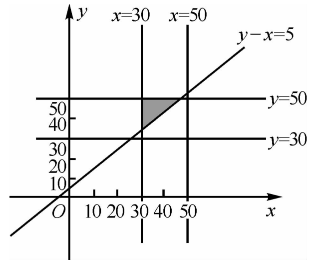
2 C 【解析】设第一串彩灯亮的时刻为x,第二串彩灯亮的时刻为y,则$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\0\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$要使两串彩灯亮的时刻相差不超过2 s,则$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\0\leqslant y\leqslant 4,\\-2\leqslant x-y\leqslant 2.\end{cases}$则不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$所表示的图形面积为16,不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\0\leqslant y\leqslant 4,\\-2\leqslant x-y\leqslant 2\end{cases}$所表示的六边形$OABCDE$的面积为$16-4=12$,由几何概型的公式可得$P=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.



第2题图

3 B 【解析】区间$[-2,3]$的长度为$3-(-2)=5$,$[-2,1]$的长度为$1-(-2)=3$,故满足条件的概率$P=\frac{3}{5}$.

4 $\frac{9}{32}$ 【解析】设小张与小王的到校时间分别为7:00后第x min,第y min,根据题意可画出图形,如图所示,则总事件所占的面积为$(50-30)^2=400$.小张比小王至少早5 min到校表示的事件$A=\{(x,y)|y-x\geqslant 5,30\leqslant x\leqslant 50,30\leqslant y\leqslant 50\}$,如图中阴影部分所示,阴影部分所占的面积为$\frac{1}{2}\times 15\times 15=\frac{225}{2}$,所以小张比小王至少早5 min到校的概率为$P(A)=\frac{\frac{225}{2}}{400}=\frac{9}{32}$.



第4题图

5 0.18 【解析】依题意,得$\frac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\frac{180}{1\ 000}$,所以$\frac{S_{阴影}}{1\times 1}=\frac{180}{1\ 000}$,解得$S_{阴影}=0.18$.

6 3 【解析】$|x|\leqslant m\Leftrightarrow -m\leqslant x\leqslant m(m>0)$.

(1)当$m\leqslant 2$时,x满足$|x|\leqslant m$的概率为$\frac{2m}{6}$,

$\therefore \frac{m}{3}=\frac{5}{6}$,即$m=\frac{5}{2}>2$(舍).

(2)当$2<m\leqslant 4$时,x满足$|x|\leqslant m$的概率为$\frac{m+2}{6}=\frac{5}{6}$,解得$m=3$.

(3)当$m>4$时,x满足$|x|\leqslant m$的概率为1,不合题意.

综上所述$m=3$.

7 $\frac{1}{3}$ 【解析】当$x\leqslant -1$时,不等式$|x+1|-|x-2|\geqslant 1$,即$-(x+1)+(x-2)=-3\geqslant 1$,此时无解;当$-1<x\leqslant 2$时,不等式$|x+1|-|x-2|\geqslant 1$,即$x+1+x-2\geqslant 1$,解得$1\leqslant x\leqslant 2$;当$x>2$时,不等式$|x+1|-|x-2|\geqslant 1$,即$x+1-x+2=3\geqslant 1$,解得$x>2$.在区间$[-3,3]$上不等式$|x+1|-|x-2|\geqslant 1$的解集为$1\leqslant x\leqslant 3$,故所求的概率为$\frac{3-1}{3-(-3)}=\frac{1}{3}$.

8 $\frac{2}{3}$ 【解析】因为$0\leqslant a\leqslant 1$,由$3a-1>0$得$\frac{1}{3}<a\leqslant 1$,由几何概型的概率公式得,事件“$3a-1>0$”发生的概率为$\frac{1-\frac{1}{3}}{1}=\frac{2}{3}$.

9 $\frac{2}{5}$ 【解析】设此正方形为$ABCD$,中心为O,则任取两个点的取法有$AB,AC,AD,BC,BD,CD,AO,BO,CO,DO$,共10种;取出的两点间的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的取法有$OA,OB,OC,OD$,共4种,故所求概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

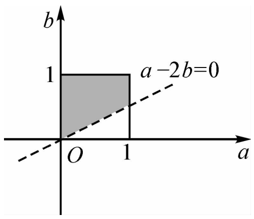
10 $\frac{N_1}{N}$ 【解析】这种随机模拟的方法,是在[0,1]内生成了 N 个点,而满足几条曲线围成的区域内的点是 N_1 个,所以根据比例关系 $\frac{S}{S_{矩形}}=\frac{N_1}{N}$ 且正方形的面积为 1 可得 S 的近似值为 $\frac{N_1}{N}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	**A**	**C**	**C**	**C**	**C**
题号	6	7	8		
答案	**A**	**C**	**A**		

1 **A** **2** **C**

3 **C** 【解析】要使该函数无零点,只需 $a^2-4b^2<0$,



第 3 题图

即 $(a+2b)(a-2b)<0$.

$\because a,b\in[0,1], a+2b>0$,

$\therefore a-2b<0$.

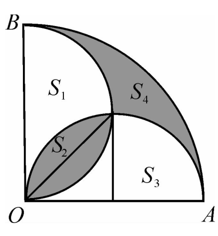
作出 $\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 1,\\0\leqslant b\leqslant 1,\\a-2b<0\end{cases}$ 的可行域,易得该函数无零点的概率

$$P=\frac{1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\frac{3}{4}.$$

4 **C** 【解析】由 $\forall x\in[0,1], f(x)\geqslant 0$ 得 $\begin{cases}f(0)\geqslant 0,\\f(1)\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $-1\leqslant k\leqslant 1$,所以所求概率为 $\frac{1-(-1)}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$.

5 **C** 【解析】正方形的面积介于 36 cm^2 与 81 cm^2 之间,所以正方形的边长介于 6 cm 到 9 cm 之间.线段 AB 的长度为12 cm,则所求概率为 $\frac{9-6}{12}=\frac{1}{4}$.

6 **A** 【解析】不妨设扇形的半径为 $2a$,各部分面积如图所示.



第 6 题图

则 $S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{1}{4}\pi(2a)^2=\pi a^2$,

又 $S_1+2S_2+S_3=\pi a^2$,故 $S_2=S_4$,

由图可知 $S_2=2\times\left(\frac{\pi}{4}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$,

所以 $S_{阴影}=\pi a^2-2a^2$.

由几何概型概率公式可得所求概率 $P=\frac{S_{阴影}}{S_{扇形OAB}}=\frac{\pi a^2-2a^2}{\pi a^2}=1-\frac{2}{\pi}$.

7 **C** 【解析】由 $\sin x+\sqrt{3}\cos x\leqslant 1$ 得 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,

即 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$.

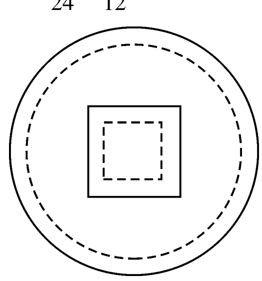
由于 $x\in[0,\pi]$,故 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,

因此当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$,于是 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

由几何概型公式知事件"$\sin x+\sqrt{3}\cos x\leqslant 1$"发生的概率为 $P=\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{\pi-0}=\frac{1}{2}$.

8 **A** 【解析】记昆虫所在三角形区域为$\triangle ABC$,且 $AB=6, BC=8, CA=10$,则有 $AB^2+BC^2=CA^2$, $AB\perp BC$,该三角形是一个直角三角形,其面积等于 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$.在该三角形区域内,到三角形任一顶点的距离小于 2 的区域的面积等于 $\frac{1}{2}\pi\times 2^2=2\pi$,因此所求的概率等于 $\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

9 $\frac{64}{361\pi}$ 【解析】如图,油滴不出边界即油滴的中心落在虚线圆的内部,油滴整体正好落入孔中即油滴的中心落在虚线正方形的内部,其中两圆半径相差 0.1 cm(油滴的半径),两正方形边长相差 0.2 cm(油滴的直径),这是几何概型,则油滴整体正好落入孔中的概率是 $P=\frac{(1-0.2)^2}{\pi(2-0.1)^2}=\frac{64}{361\pi}$.



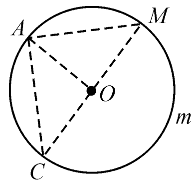
第 9 题图

10 $\frac{8}{3}$ 【解析】设该不规则图形的面积为 x m^2,向区域内随机地撒 1 000 颗黄豆,数得落在正方形区域内(含边界)的黄豆数为 375 颗,所以根据几何概型的概率计算公式可知 $\frac{375}{1\,000}=\frac{1}{x}$,解得 $x=\frac{8}{3}$.

11 16.32 【解析】根据几何概型的概率公式得黄豆落在椭圆内的概率 $P=\frac{S_{椭圆}}{S_{矩形}}$,而 $P=\frac{300-96}{300}=0.68$, $S_{矩形}=24$,

故 $S_{椭圆}=P\cdot S_{矩形}=0.68\times 24=16.32$.

12 $\frac{1}{2}$ 【解析】作等腰直角三角形 AOC 和 AOM，B 为圆上任意一点，则当点 B 在 $\overset{\frown}{MmC}$ 上运动时，$|AB|>\sqrt{2}R$，$\therefore P=\frac{1}{2}$.



第 12 题图

13 $\frac{3}{4}$ 【解析】由题意知本题是一个几何概型，$\because a,b$ 使得函数 $f(x)=x^2+2ax-b^2+\pi$ 有零点，$\therefore x^2+2ax-b^2+\pi=0$ 有根，即 $\Delta\geqslant 0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant\pi$. 试验包含的所有事件是 $\Omega=\{(a,b)\mid -\pi\leqslant a\leqslant\pi,-\pi\leqslant b\leqslant\pi\}$，$\therefore S=(2\pi)^2=4\pi^2$，而满足条件的事件是 $\{(a,b)\mid a^2+b^2\geqslant\pi\}$，$\therefore S'=4\pi^2-\pi^2=3\pi^2$，由几何概型的概率公式得所求概率为 $P=\frac{3}{4}$.

专题 50 复数及其运算

5 年高考真题演练

1 A **2** A **3** B

4 C 【解析】因为 $z=1+i$，所以 $\frac{z}{i}+i\cdot\bar{z}=(-i+1)+i+1=2$.

5 B 【解析】$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\frac{-2i}{2i}=-1$，选 B.

6 A 【解析】由 $a+i=2-bi$ 可得 $a=2,b=-1$，则 $(a+bi)^2=(2-i)^2=3-4i$.

7 A 【解析】$z=\frac{5}{2-i}+2i=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}+2i=2+i+2i=2+3i$.

8 A 【解析】$\because z=2-i$，$\therefore z\cdot\bar{z}=|z|^2=2^2+1^2=5$.

9 D 【解析】由 $(3-4i)z=25\Rightarrow z=\frac{25}{3-4i}=\frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=3+4i$，选 D.

10 21 【解析】复数 $z=(5+2i)^2=21+20i$，其实都是 21.

11 -2 【解析】$\begin{cases}m^2+m-2=0,\\m^2-1\neq0.\end{cases}\Rightarrow m=-2$.

12 2 【解析】$\frac{1+ai}{2-i}=\frac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2-a+(2a+1)i}{5}$ 为纯虚数，所以 $2-a=0$，即 $a=2$.

13 $[0,1)$ 【解析】对于集合 M，函数 $y=|\cos 2x|$，其值域为 $[0,1]$，所以 $M=[0,1]$. 由于 $\left|\frac{x}{i}\right|=|-xi|=|x|<1$，故 $-1<x<1$，所以 $N=(-1,1)$，则 $M\cap N=[0,1)$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	5
答案	D	B	A	D	A
题号	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	B	B

1 D **2** B **3** A

4 D 【解析】$z_1\cdot z_2=(1+i)(2+bi)=(2-b)+(2+b)i$，因为 $z_1\cdot z_2$ 为实数，所以 $2+b=0$，所以 $b=-2$，故选 D.

5 A 【解析】$z=\frac{2+i}{i^{2013}}=\frac{2+i}{i^{503\times4+1}}=\frac{2+i}{i}=1-2i$，所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点 $(1,2)$ 所在的象限为第一象限. 故选 A.

6 B 【解析】由题意可设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，代入 $(2+i)z=3-i$，得 $(2a-b)+(2b+a)i=3-i$，从而 $\begin{cases}2a-b=3,\\2b+a=-1,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-1$，则 $z=1-i$，$\bar{z}=1+i$，那么 $z\cdot\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$.

7 C 【解析】复数 $z=(x^2+2x-3)+(x-1)i$ 为纯虚数，则 $x^2+2x-3=0$ 且 $x-1\neq0$，解得 $x=-3$，故 $x=-3\Leftrightarrow$ 复数 z 为纯虚数，选 C.

8 D 【解析】$z=\frac{m-2i}{1+2i}=\frac{m-4}{5}-\frac{2m+2}{5}i$，因复数所对应复平面内的点在第二象限，所以 $\begin{cases}m-4<0,\\-(2m+2)>0,\end{cases}$ 则 $m<-1$，故选 D.

9 B 【解析】$z=\frac{(a+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a-2+(a+2)i}{2}$，复数 z 在复平面内对应的点在虚轴上，则 $a-2=0$，即 $a=2$，故选 B.

10 B 【解析】$\frac{i^2+i^3+i^4}{1-i}=\frac{-1-i+1}{1-i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，所以复数 $\frac{i^2+i^3+i^4}{1-i}$ 在复平面内对应的点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 与原点的距离为 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11 $\sqrt{10}$ 【解析】由 $zi=1+3i$，得 $z=\frac{1+3i}{i}=3-i$，所以 $|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

12 $(1,-2)$ 【解析】因为 $z=\frac{2+i}{i}=\frac{(2+i)i}{i^2}=-(2+i)i=1-2i$，故复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(1,-2)$.

13 6 【解析】因为 $\frac{a+3i}{1-2i}=\frac{(a+3i)(1+2i)}{5}=\frac{(a-6)+(3+2a)i}{5}$ 是纯虚数，所以 $a-6=0$，则 $a=6$.

14 5 【解析】$z=\frac{4+2i}{(1+i)^2}=\frac{4+2i}{2i}=\frac{(4+2i)i}{2i^2}=1-2i$，复数 z 在复平面内对应的点的坐标为$(1,-2)$，将其代入 $x-2y+m=0$，得 $m=-5$.

15 $\sqrt{5}$ 【解析】由 $\begin{vmatrix} z & i \\ 1 & i \end{vmatrix}=1+i$，得 $zi-i=1+i$，则 $z=\frac{1+2i}{i}=2-i$，所以 $|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

▶专题51　不等式选讲

5 年高考真题演练

1 C　**2** B

3 A 【解析】当 $x-2\geqslant 0$ 时，$|x-2|=x-2$，此时原不等式的解集为$\varnothing$；当 $x-2<0$，即 $x<2$ 时，$|x-2|>0>x-2$，故原不等式的解集为$(-\infty,2)$.

4 A 【解析】根据充分条件、必要条件的概念判断. 当 $a=b=c=2$ 时，有$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\leqslant a+b+c$，但 $abc\neq 1$，所以必要性不成立；当 $abc=1$ 时，$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}}{\sqrt{abc}}=\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}$，$a+b+c=\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{2}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$，所以充分性成立，故“$abc=1$”是“$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\leqslant a+b+c$”的充分不必要条件.

5 D 【解析】由$|x^2-2|<2$ 得 $-2<x^2-2<2$，即$0<x^2<4$，所以 $-2<x<0$ 或 $0<x<2$，故选 D.

6 2 【解析】$(am+bn)(bm+an)=ab(m^2+n^2)+mn(a^2+b^2)\geqslant 2abmn+mn(a^2+b^2)=4ab+2(a^2+b^2)=2(2ab+a^2+b^2)=2(a+b)^2=2$(当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$时取等号).

7 $[0,4]$ 【解析】依题意得 $-1\leqslant|x-2|-1\leqslant 1$，即$|x-2|\leqslant 2$，解得 $0\leqslant x\leqslant 4$.

8 -3 【解析】由不等式的解集可知 $-\frac{5}{3},\frac{1}{3}$为不等式对应的方程$|ax-2|=3$ 的根，即
$$\begin{cases}\left|-\frac{5}{3}a-2\right|=3,\\ \left|\frac{1}{3}a-2\right|=3,\end{cases}$$
解得 $a=-3$.

9 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 【解析】$|2x-1|+|x+2|=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x+2|\right)\geqslant 0+\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)-(x+2)\right|=\frac{5}{2}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时取等号，因此函数 $y=|2x-1|+|x+2|$的最小值是$\frac{5}{2}$. 所以 $a^2+\frac{1}{2}a+2\leqslant\frac{5}{2}$，即 $2a^2+a-1\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围是$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

10 $[0,2]$ 【解析】因为$|x|+|x-1|\geqslant|x-(x-1)|=1$，当且仅当 $x(x-1)\leqslant 0$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时取等号，$|y|+|y-1|\geqslant|y-(y-1)|=1$，当且仅当 $y(y-1)\leqslant 0$，即 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时取等号，所以$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\geqslant 1+1=2$. 又已知$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\leqslant 2$，所以$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|=2$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$，所以 $0\leqslant x+y\leqslant 2$.

11 【解析】(1)由 $a>0$，有$f(x)=\left|x+\frac{1}{a}\right|+|x-a|\geqslant\left|x+\frac{1}{a}-(x-a)\right|=\frac{1}{a}+a\geqslant 2$.

所以$f(x)\geqslant 2$.

(2)$f(3)=\left|3+\frac{1}{a}\right|+|3-a|$.

当 $a>3$ 时，$f(3)=a+\frac{1}{a}$，由 $f(3)<5$ 得 $3<a<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

当 $0<a\leqslant 3$ 时，$f(3)=6-a+\frac{1}{a}$，由 $f(3)<5$ 得 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<a\leqslant 3$.

综上，a 的取值范围是$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

12 【解析】(1)由 $\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$，得 $ab\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时等号成立.

故 $a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}\geqslant 4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时等号成立.

所以 a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知，$2a+3b\geqslant 2\sqrt{6}\sqrt{ab}\geqslant 4\sqrt{3}$.

由于 $4\sqrt{3}>6$，从而不存在 a,b，使得 $2a+3b=6$.

13 【解析】(1)因为$|x+1|+|x-2|\geqslant|(x+1)-(x-2)|=3$，当且仅当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，等号成立，所以$f(x)$的最小值等于 3，即 $a=3$.

(2)由(1)知 $p+q+r=3$，又因为 p,q,r 是正实数，所以$(p^2+q^2+r^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(p\times 1+q\times 1+r\times 1)^2=(p+q+r)^2=9$，即 $p^2+q^2+r^2\geqslant 3$.

14 【解析】(1)$f(x)=\begin{cases}3x-3,x\in[1,+\infty),\\ 1-x,x\in(-\infty,1).\end{cases}$

当 $x\geqslant1$ 时,由 $f(x)=3x-3\leqslant1$ 得 $x\leqslant\frac{4}{3}$,故 $1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$;

当 $x<1$ 时,由 $f(x)=1-x\leqslant1$ 得 $x\geqslant0$,故 $0\leqslant x<1$.

所以 $f(x)\leqslant1$ 的解集为 $M=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$.

(2)由 $g(x)=16x^2-8x+1\leqslant4$ 得 $16\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\leqslant4$,解得 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$.

因此 $N=\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$,故 $M\cap N=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$.

当 $x\in M\cap N$ 时,$f(x)=1-x$,于是 $x^2f(x)+x[f(x)]^2=xf(x)[x+f(x)]=x\cdot f(x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$.

高考试题专项预测

题号	1	2	3	4	
答案	**D**	**B**	**D**	**A**	

1 **D** **2** **B**

3 **D** 【解析】由题意得 $\Delta=4-4ab=0$,$\therefore ab=1$,$\therefore\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=a-b+\frac{2}{a-b}\geqslant2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $a-b=\frac{2}{a-b}$,即 $a-b=\sqrt{2}$时取等号.

4 **A** 【解析】由 $|2x-1|<2$ 得 $-2<2x-1<2$,则 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$;由$\frac{x-2}{x-1}<1$ 得$\frac{(x-2)-(x-1)}{x-1}<0$,即$\frac{-1}{x-1}<0$,则 $x>1$. 因此 $M\cap N=\left\{x\middle|1<x<\frac{3}{2}\right\}$,选 A.

5 $\{x|-1<x<0\}$ 【解析】当 $x\leqslant-\frac{1}{3}$时,原不等式化为 $-(3x+1)+(x-1)<0$,即 $x>-1$,所以 $-1<x\leqslant-\frac{1}{3}$;当 $x\geqslant1$ 时,原不等式化为$(3x+1)-(x-1)<0$,解得 $x<-1$,与 $x\geqslant1$ 不符,无解;当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时,原不等式化为 $(3x+1)+(x-1)<0$,解得 $x<0$,所以 $-\frac{1}{3}<x<0$. 综上可得原不等式的解集为 $\{x|-1<x<0\}$.

6 $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2\}$ 【解析】$\frac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}=\left|1+\frac{1}{a}\right|-\left|2-\frac{1}{a}\right|\leqslant\left|\left(1+\frac{1}{a}\right)+\left(2-\frac{1}{a}\right)\right|=3$,所以其最大值为 3,从而 $|2x-1|\geqslant3$,解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2$. 故 x 的取值范围是 $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2\}$.

7 9 【解析】$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(2x+y)\geqslant(2+1)^2=9$.

8 $\frac{4}{3}$ 【解析】由题意得 $2a+3(b-1)=0$,即 $2a+3b=3$,$\therefore\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}=\frac{1}{3}(2a+3b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b}\right)\geqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$,当且仅当 $2a=3b$,即 $a=\frac{3}{4}$,$b=\frac{1}{2}$时等号成立.

9 8 【解析】由 $x+y+\frac{9}{x}+\frac{1}{y}=10$,得$(x+y)^2+(x+y)\left(\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\right)=10(x+y)$,即$(x+y)^2-10(x+y)+10=-\left(\frac{9y}{x}+\frac{x}{y}\right)\leqslant-2\sqrt{9}=-6$,$\therefore(x+y)^2-10(x+y)+16\leqslant0$,$\therefore(x+y-2)(x+y-8)\leqslant0$,$\therefore2\leqslant x+y\leqslant8$,故 $x+y$ 的最大值为 8.

10 8 【解析】$\because0<m<\frac{1}{2}$,$\therefore\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}=[2m+(1-2m)]\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}\right)=4+\frac{1-2m}{m}+\frac{4m}{1-2m}\geqslant4+2\sqrt{\frac{1-2m}{m}\cdot\frac{4m}{1-2m}}=8$(当且仅当$\frac{1-2m}{m}=\frac{4m}{1-2m}$,即 $m=\frac{1}{4}$时等号成立),$\therefore k$ 的最大值为 8.

11 $[-2,5]$ 【解析】不等式 $|x+3|+|x-4|\leqslant9$ 的解集为 $\{x|-4\leqslant x\leqslant5\}$,则 $A=\{x|-4\leqslant x\leqslant5\}$. 又当 $t>0$ 时,$4t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{4t\cdot\frac{1}{t}}=4$ $\left(当且仅当 4t=\frac{1}{t},即 t=\frac{1}{2}时取等号\right)$,则 $B=\{x|x\geqslant-2\}$,$\therefore A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$.

12 $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$ 【解析】$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{3}{4}abc\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}}+\frac{3}{4}abc=\frac{3}{abc}+\frac{3}{4}abc\geqslant2\sqrt{\frac{3}{abc}\cdot\frac{3}{4}abc}=3$,由题意 $x+|2x-1|<3$,解得 $-2<x<\frac{4}{3}$.

13 $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$ 【解析】$\because|x+3|-|x-1|\leqslant|(x+3)-(x-1)|=4$,$\therefore$ 不等式 $|x+3|-|x-1|\leqslant a^2-3a$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立等价于 $a^2-3a\geqslant(|x+3|-|x-1|)_{\max}=4$,即 $a^2-3a-4\geqslant0$,解得 $a\geqslant4$ 或 $a\leqslant-1$.

14 【解析】(1)$f(x)<4$,即 $|x+1|+|x-1|<4$,

当 $x\leqslant-1$ 时,$-x-1+1-x<4$,得 $x>-2$,$\therefore-2<$

$x\leqslant -1$；

当 $-1<x<1$ 时，$x+1+1-x<4$，得 $2<4$，恒成立，

$\therefore -1<x<1$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$x+1+x-1<4$，得 $x<2$，$\therefore 1\leqslant x<2$.

综上，$M=\{x|-2<x<2\}$.

(2) 当 $a,b\in M$ 时，$-2<a<2$，$-2<b<2$，

即 $a^2<4$，$b^2<4$，$\therefore 4-a^2>0$，$4-b^2>0$，

$\therefore (4-a^2)(4-b^2)>0$，即 $16-4a^2-4b^2+a^2b^2>0$，

即 $4a^2+4b^2<16+a^2b^2$，

$\therefore 4a^2+8ab+4b^2<16+8ab+a^2b^2$，

即 $(2a+2b)^2<(4+ab)^2$，

$\therefore 2|a+b|<|4+ab|$.

15【解析】(1) 由 $|x-a|\leqslant m$ 得 $a-m\leqslant x\leqslant a+m$，所以 $\begin{cases}a-m=-1,\\a+m=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\m=3.\end{cases}$

(2) 当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-2|$，所以 $f(x)+t\geqslant f(x+2t)$，所以 $|x-2+2t|-|x-2|\leqslant t$ ①.

当 $t=0$ 时，不等式①恒成立，即 $x\in\mathbf{R}$；当 $t>0$ 时，不等式等价于

$\begin{cases}x<2-2t,\\2-2t-x-(2-x)\leqslant t\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-2t\leqslant x<2,\\x-2+2t-(2-x)\leqslant t\end{cases}$

或 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\x-2+2t-(x-2)\leqslant t,\end{cases}$

解得 $x<2-2t$ 或 $2-2t\leqslant x\leqslant 2-\dfrac{t}{2}$ 或 $x\in\varnothing$，即 $x\leqslant 2-\dfrac{t}{2}$.

综上，当 $t=0$ 时，原不等式的解集为 $\mathbf{R}$；

当 $t>0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant 2-\dfrac{t}{2}\right\}$.

16【解析】$\because \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2$

$=\dfrac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)\left[\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2\right]$

$\geqslant\dfrac{1}{3}\left[1\times\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+1\times\left(b+\dfrac{1}{b}\right)+1\times\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\right]^2$

$=\dfrac{1}{3}\left[1+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\right]^2$

$=\dfrac{1}{3}\left[1+(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\right]^2\geqslant\dfrac{1}{3}\times(1+9)^2=\dfrac{100}{3}$，

$\therefore$ 该不等式成立.

17【解析】因为 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

所以 $\left(\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{4}{2b+1}\right)[(2a+1)+(2b+1)]=1+4+\dfrac{2b+1}{2a+1}+\dfrac{4(2a+1)}{2b+1}\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{2b+1}{2a+1}\times\dfrac{4(2a+1)}{2b+1}}=9$.

而 $(2a+1)+(2b+1)=4$，所以 $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{4}{2b+1}\geqslant\dfrac{9}{4}$.

18【解析】因为 x,y,z 均为正数，所以 $\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\geqslant\dfrac{2}{z}$.

同理，可得 $\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\geqslant\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{x}{yz}+\dfrac{z}{xy}\geqslant\dfrac{2}{y}$.

将上述三个不等式两边分别相加，并除以 2，得 $\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\geqslant\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

19【解析】(1) 因为 $f(x+2)=m-|x|$，所以 $f(x+2)\geqslant 0$ 等价于 $|x|\leqslant m$，

由 $|x|\leqslant m$ 有解，得 $m\geqslant 0$，且其解集为 $\{x|-m\leqslant x\leqslant m\}$.

又 $f(x+2)\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,1]$，故 $m=1$.

(2) $(a+2b+3c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}\right)\geqslant 3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a\cdot 2b\cdot 3c}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{1}{3c}}=9$. 等号当且仅当 $a=2b=3c$，即 $a=3$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=1$ 时成立.

又 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1$，故 $a+2b+3c\geqslant 9$.

专题 52 坐标系与参数方程

5 年高考真题演练

1 A **2** B

3 B 【解析】因为该圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2=-2y$，即为 $x^2+(y+1)^2=1$，圆心的直角坐标为 $(0,-1)$，化为极坐标为 $\left(1,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，故选 B.

4 $2\sqrt{3}$ 【解析】圆 $\rho=4\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$，圆心为 $C(2,0)$. 点 P 的直角坐标为 $(2,2\sqrt{3})$，所以 $|CP|=2\sqrt{3}$.

5 $\sqrt{5}$ 【解析】依题意，直线 l 与曲线 C 的直角坐标方程分别是 $x-y+1=0$，$y^2=4x$. 由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，则 $y=2$，因此直线 l 与曲线 C 的公共点的直角坐标是 $(1,2)$，该点与原点的距离为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，即直线 l 与曲线 C 的公共点的极径 $\rho=\sqrt{5}$.

6 $(\sqrt{3},1)$ 【解析】由题意，得 $\begin{cases}x=\sqrt{t},\\y=\dfrac{\sqrt{3t}}{3}\end{cases}\Rightarrow x^2=3y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，曲线 C_2 的普通方程为 $x^2+y^2=4$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2=3y^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\y=1,\end{cases}$ 即 C_1 与 C_2 的交点坐标为

$(\sqrt{3},1)$.

7 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$ 【解析】曲线 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，圆心为 $C(2,1)$，半径 $r=1$，又弦长 $|AB|=2$，故 AB 为圆 C 的直径，即直线 l 过圆心 $C(2,1)$，又直线 l 的斜率 $k=1$，所以直线 l 的方程为 $x-y=1$，其极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$.

8 3 【解析】由于圆和直线的直角坐标方程分别为 $x^2+y^2=4y$ 和 $y=a$，它们相交于 A,B 两点，且 $\triangle AOB$ 为等边三角形，所以不妨令直线 OB 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4y,\\ y=\sqrt{3}x,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2=\sqrt{3}x$，

解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=0$，所以 $a=3$.

9【解析】(1)设 (x_1,y_1) 为圆上的点，在已知变换下变为 C 上的点 (x,y)，依题意得，

$\begin{cases}x=x_1,\\ y=2y_1,\end{cases}$

由 $x_1^2+y_1^2=1$ 得 $x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$，即曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

故 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}$ (t 为参数).

(2)由 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ 2x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=2.\end{cases}$

不妨设 $P_1(1,0)$，$P_2(0,2)$，则线段 P_1P_2 的中点坐标为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，所求直线斜率为 $k=\frac{1}{2}$，于是所求直线方程为 $y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

化为极坐标方程，并整理得

$2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=-3$，即 $\rho=\frac{3}{4\sin\theta-2\cos\theta}$.

10【解析】将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入抛物线方程 $y^2=4x$，

得 $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，解得 $t_1=0$，$t_2=-8\sqrt{2}$.

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=8\sqrt{2}$.

11【解析】(1)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

直线 l 的普通方程为 $2x+y-6=0$.

(2)曲线 C 上任意一点 $P(2\cos\theta,3\sin\theta)$ 到 l 的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$.

则 $|PA|=\frac{d}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

当 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时，$|PA|$ 取得最大值，最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$.

当 $\sin(\theta+\alpha)=1$ 时，$|PA|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

高考试题专项预测

1 $\sqrt{3}$ **2** $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

3 $4\sqrt{2}$ 【解析】圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+3\cos\theta,\\ y=1+3\sin\theta,\end{cases}$ 它的圆心为 $(\sqrt{3},1)$，半径 $r=3$，直线 l 的普通方程为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0$，即 $\sqrt{3}x-y=0$，圆心 $C(\sqrt{3},1)$ 到直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|(\sqrt{3})^2-1|}{\sqrt{3+1}}=1$，所以圆 C 截直线 l 所得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{2}$.

4 $(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$ 【解析】注意到曲线 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta+4=0$ 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$，即 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$. 要使直线 $3x+4y+m=0$ 与该曲线没有公共点，只要圆心 $(1,-2)$ 到直线 $3x+4y+m=0$ 的距离大于圆的半径即可，即 $\frac{|3\times1+4\times(-2)+m|}{5}>1$，则 $|m-5|>5$，解得 $m<0$ 或 $m>10$.

5 3 【解析】由题意 A,B 的极坐标分别为 $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$，则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{6}=3$.

6 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】曲线 C 的直角坐标方程为 $x-y=0$，直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$，曲线 C 与直线 l 平行，所以 $|MN|_{\min}=\frac{|0-(-1)|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 【解析】由 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 得 $\rho\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=1$，从而得曲线 C 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=2$，所以 $M(2,0)$，$N\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $P\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8 $(1,1)$ 【解析】曲线 C_1 和曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=x(x\geqslant0)$，$x^2+y^2=2$，由 $\begin{cases}y^2=x(x\geqslant0),\\ x^2+y^2=2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

所以曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点坐标为$(1,1)$.

9【解析】(1) 曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$,

又$\because x^2+y^2=\rho^2, x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$.

(2) 将直线 l 的参数方程化为直角坐标方程得 $y=-\frac{4}{3}(x-2)$.

令 $y=0$,得 $x=2$,即 M 点的坐标为$(2,0)$.

由(1)得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$,即 $x^2+(y-1)^2=1$.

$\therefore$ 圆 C 的圆心坐标为$(0,1)$,半径 $r=1$,则$|MC|=\sqrt{5}$,

$\therefore |MN|\leqslant|MC|+r=\sqrt{5}+1$,即$|MN|$的最大值为 $\sqrt{5}+1$.

10【解析】(1) 由$\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\end{cases}$得 $x^2+y^2=4$.

由 $\rho=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$,得 $\rho^2=4\rho\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$,即 $x^2+y^2=2y+2\sqrt{3}x$,整理得$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$.

(2) 由于圆 C_1 表示圆心为原点,半径为 2 的圆,圆 C_2 表示圆心是$(\sqrt{3},1)$,半径为 2 的圆,又圆 C_2 的圆心$(\sqrt{3},1)$在圆 C_1 上,所以圆 C_1,C_2 相交. 求公共弦长略.

11【解析】(1) C 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=1(0\leqslant y\leqslant 1)$.

可得 C 的参数方程为

$\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$($t$ 为参数,$0\leqslant t\leqslant\pi$).

(2) 设 $D(1+\cos t,\sin t)$. 由(1)知半圆 C 是以 $C(1,0)$为圆心,1 为半径的上半圆. 因为 C 在点 D 处的切线与 l 垂直,所以直线 CD 与 l 的斜率相同,$\tan t=\sqrt{3}$,$t=\frac{\pi}{3}$.

故 D 的直角坐标为 $\left(1+\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$,即$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

▶ 专题 53 几何证明选讲

5 年高考真题演练

1 D **2** A

3 $\frac{\sqrt{21}}{2}$ 【解析】$\tan\angle BCA=\frac{BA}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle BCA=30°$,$\angle ECD=90°-\angle BCA=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,$CE=BC\cdot\cos\angle BCA=3\cos 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 在$\triangle ECD$ 中,由余弦定理得$ED=\sqrt{CE^2+CD^2-2CE\cdot CD\cdot\cos\angle ECD}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2-2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

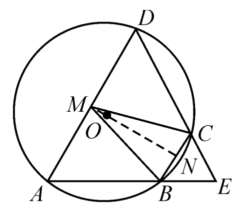
4 $\frac{15}{2}$ 【解析】因为 AE 是圆的切线. 又因为 $AD=AB$,$AB/\!/DC$,所以$\angle BAE=\angle ADB=\angle ABD=\angle BDC$,所以 $AD=AB=BC=5$. 由切割线定理可得 $EA^2=EB\times EC=4\times(5+4)=36$,所以$EA=6$. 又因为$\triangle BCD\backsim\triangle EBA$,所以$\frac{BD}{EA}=\frac{BC}{EB}$,则 $BD=\frac{BC\cdot EA}{EB}=\frac{5\times 6}{4}=\frac{15}{2}$.

5 4 【解析】依题意得$\triangle PAC\backsim\triangle PBA$,则$\frac{PA}{PC}=\frac{AB}{AC}=\frac{PB}{PA}$,即$\frac{6}{PB+9}=\frac{PB}{6}$,解得 $PB=3$,$AB=4$.

6 4 【解析】由切割线定理,得 $QA^2=QC\cdot QD=4\Rightarrow QA=2$,则 $PB=PA=2QA=4$.

7 $\frac{3}{2}$ 【解析】设 AO,BC 的交点为 D,由已知可得 D 为 BC 的中点,则在直角三角形 ABD 中,$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=1$,设圆的半径为 r,延长 AO 交圆 O 于点 E,由圆的相交弦定理可知 $BD\cdot CD=AD\cdot DE$,即$(\sqrt{2})^2=2r-1$,解得 $r=\frac{3}{2}$.

8【解析】(1) 由题设知 A,B,C,D 四点共圆,所以$\angle D=\angle CBE$. 由已知得$\angle CBE=\angle E$,故$\angle D=\angle E$.



第 8 题图

(2) 设 BC 的中点为 N,连接 MN,则由 $MB=MC$ 知 $MN\perp BC$,故 O 在直线 MN 上.

又 AD 不是$\odot O$ 的直径,M 为 AD 的中点,故 $OM\perp AD$,即 $MN\perp AD$.

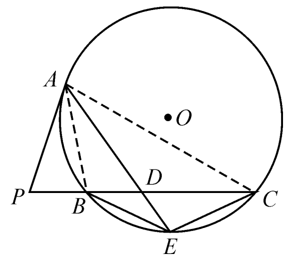
所以 $AD/\!/BC$,故$\angle A=\angle CBE$.

又$\angle CBE=\angle E$,故$\angle A=\angle E$.

由(1)知,$\angle D=\angle E$,所以$\triangle ADE$ 为等边三角形.

9【解析】(1) 连接 AB,AC. 由题设知 $PA=PD$,故$\angle PAD=\angle PDA$.

因为$\angle PDA=\angle DAC+\angle DCA$,



第 9 题图

$\angle PAD=\angle BAD+\angle PAB$,

$\angle DCA=\angle PAB$,

所以$\angle DAC=\angle BAD$,从而$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$.

因此 $BE=EC$.

(2)由切割线定理得 $PA^2=PB\cdot PC$.

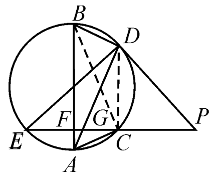
因为 $PA=PD=DC$,所以 $DC=2PB$,$BD=PB$.

由相交弦定理得 $AD\cdot DE=BD\cdot DC$,所以 $AD\cdot DE=2PB^2$.

10【解析】(1)因为 $PD=PG$,所以 $\angle PDG=\angle PGD$.

由于 PD 为切线,则 $\angle PDA=\angle DBA$,又由于 $\angle PGD=\angle EGA$,故 $\angle DBA=\angle EGA$,

所以 $\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$,从而 $\angle BDA=\angle PFA$.



第 10 题图

由于 $AF\perp EP$,所以 $\angle PFA=90°$,于是 $\angle BDA=90°$. 故 AB 是直径.

(2)连接 BC,DC.

由于 AB 是直径,故 $\angle BDA=\angle ACB=90°$.

在 Rt$\triangle BDA$ 与 Rt$\triangle ACB$ 中,$AB=BA$,$AC=BD$,

从而 Rt$\triangle BDA\cong$ Rt$\triangle ACB$,于是 $\angle DAB=\angle CBA$.

又因为 $\angle DCB=\angle DAB$,所以 $\angle DCB=\angle CBA$,故 $DC/\!/AB$.

由于 $AB\perp EP$,所以 $DC\perp EP$,即 $\angle DCE$ 为直角.

于是 ED 为直径. 由(1)得 $ED=AB$.

高考试题专项预测

1 4 **2** 4

3 $\frac{1}{4}$ 【解析】过 D 作 AF 的平行线交 BC 于 G. 因为 D 是 AC 的中点,所以 DG 是 $\triangle AFC$ 的中位线,因此 G 是 FC 的中点,所以 $FG=GC$,又因为 $EF/\!/DG$,所以 $\frac{BE}{BD}=\frac{BF}{BG}=\frac{1}{3}$. 设 $BF=1$,则 $BG=3$,所以 $FG=GC=2$,即 $FC=4$,所以 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{4}$.

4 8 【解析】$PC=12-R$,$PD=12+R$,连接 AD,BC,有 $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$,所以 $\frac{PC}{PB}=\frac{PA}{PD}$,则 $\frac{12-R}{6+\frac{22}{3}}=\frac{6}{12+R}$,解得 $R=8$.

5 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 【解析】延长 CO 交圆 O 于点 E,依题意得,$BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{5}$,$AC=\frac{1}{2}OA=1$,$CE=2OA-AC=3$,又因为 $BC\cdot CD=AC\cdot CE$,所以 $\sqrt{5}\times CD=1\times 3$,所以 $CD=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

6 $\frac{1}{2}$ 【解析】根据切割线定理得 $PA^2=PB\cdot PC=PB(PB+BC)$,而 $\frac{PA}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $PA=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$,将其代入上式得 $PB^2+PB\cdot BC-\frac{3}{4}BC^2=0$,即$(2PB+3BC)(2PB-BC)=0$,所以 $\frac{PB}{BC}=-\frac{3}{2}$(舍去)或 $\frac{PB}{BC}=\frac{1}{2}$.

7 $\frac{10\sqrt{7}}{7}$ 【解析】根据已知可得,在 Rt$\triangle PAO$ 中,$AO=AP\tan 30°=2$,所以 $OD=1$,且 $\angle AOD=120°$. 在 $\triangle AOD$ 中,根据余弦定理可得 $AD=\sqrt{4+1-2\times 2\times 1\times\cos 120°}=\sqrt{7}$. 又根据相交弦定理得 $CD\cdot DB=AD\cdot DE$,即 $1\times 3=\sqrt{7}\times DE$,所以 $DE=\frac{3\sqrt{7}}{7}$,所以 $AE=\frac{10\sqrt{7}}{7}$.

8 1 【解析】$\because DE/\!/BC$,$\therefore\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. 又 $\because EF/\!/CD$,$\therefore\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$,$\therefore\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AD}$,$\therefore AF=\frac{AD^2}{AB}=\frac{2}{2}=1$.

9【解析】(1)连接 DF,DO,则 $\angle CDO=\angle FDO$;

$\because BC$ 是切线,且 CF 是圆 D 的弦,$\therefore\angle BCE=\frac{1}{2}\angle CDF$,

即 $\angle CDO=\angle BCE$,故 Rt$\triangle CDO\cong$ Rt$\triangle BCE$,

$\therefore EB=OC=\frac{1}{2}AB$,$\therefore E$ 是 AB 的中点.

(2)连接 BF,$\because\angle BEF=\angle CEB$,$\angle ABC=\angle EFB$,

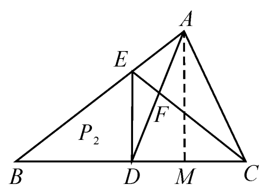
$\therefore\triangle FEB\backsim\triangle BEC$,则 $\frac{BF}{BE}=\frac{CB}{CE}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形,$\therefore BF=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

10【解析】(1)因为 $DE\perp BC$,D 是 BC 的中点,

所以 $EB=EC$,所以 $\angle B=\angle ECD$.

又因为 $AD=AC$,所以 $\angle ADC=\angle ACB$,所以 $\triangle ABC\backsim\triangle FCD$.



第 10 题图

(2)过点 A 作 $AM\perp BC$,垂足为 M.

因为 $\triangle ABC\backsim\triangle FCD$,$BC=2CD$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=4$.

又因为 $S_{\triangle FCD}=5$,所以 $S_{\triangle ABC}=20$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$,$BC=10$,

所以 $20=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot AM$,所以 $AM=4$.

又因为 $DE/\!/AM$,所以 $\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$.

因为 $DM=\frac{1}{2}DC=\frac{5}{2}$,$BM=BD+DM$,$BD=\frac{1}{2}BC=5$,

所以 $\frac{DE}{4}=\frac{5}{5+\frac{5}{2}}$,所以 $DE=\frac{8}{3}$.

▶2016 年高考数学学科适应性样题（文科）

题号	1	2	3	4	5
答案	**B**	**D**	**A**	**C**	**D**
题号	6	7	8	9	10
答案	**B**	**D**	**C**	**A**	**B**
题号	11	12			
答案	**A**	**B**			

1 **B** 【解析】由已知得 $z=\frac{1+2i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4+3i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，故 z 的共轭复数为 $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$.

【失分探因】本题易错的地方是复数的计算错误，或者对共轭复数的概念理解有误.

2 **D** 【解析】集合 $\left\{x\in\mathbf{N}\left|\frac{6}{x}\in\mathbf{N}\right.\right\}=\{1,2,3,6\}$ 共有 4 个元素，所以该集合有 $2^4-1=15$ 个真子集.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确理解集合描述法 $\left\{x\in\mathbf{N}\left|\frac{6}{x}\in\mathbf{N}\right.\right\}$ 的含义.

3 **A** 【解析】$|OP|=5$，由三角函数知，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，$\therefore\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{31}{25}$，故选 A.

【失分探因】本题易错的地方是忽视三角函数的定义，或二倍角公式用错.

4 **C** 【解析】$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{b}|\cos120°=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$，$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，又 $\because|\boldsymbol{a}|=2$，$\therefore2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|-4=0$，解得 $|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{33}+1}{4}$，$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $-\frac{\sqrt{33}+1}{8}$.

【失分探因】本题易错的地方是向量的运算出错，或对投影的概念理解有误.

5 **D** 【解析】由图知，$A=1$，$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$，故 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，又函数图象过点 $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，代入解析式中，得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 后，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握数形结合的思想方法，从所给的图形中读出有关消息，或单调递增区间求错.

6 **B** 【解析】由三视图，知该几何体的上面是四棱锥，下面是圆柱，圆柱的底面半径为 1，高为 2，四棱锥的底面积 $S=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，高为 $\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，几何体的体积 $V=\pi\cdot1^2\cdot2+\frac{1}{3}\cdot2\cdot\sqrt{3}=2\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故答案为 B.

【失分探因】本题易错的地方是由三视图还原几何体出错.

7 **D** 【解析】选项 A 正确，因为对于任意的实数 x，若 x 是有理数，则 $-x$ 也是有理数，所以 $f(-x)=f(x)=1$ 恒成立；若 x 是无理数，则 $-x$ 也是无理数，所以 $f(-x)=f(x)=\pi$ 恒成立，综上，对任意实数 x，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

选项 B 正确，因为令 $T=1$，对于任意实数 x，若 x 是有理数，则 $x+1$ 也是有理数，所以 $f(x+1)=f(x)=1$ 恒成立；若 x 是无理数，则 $x+1$ 也是无理数，所以 $f(x+1)=f(x)=\pi$ 恒成立，所以 1 是函数 $f(x)$ 的一个周期，函数 $f(x)$ 是周期函数.

选项 C 正确，因为由函数 $f(x)$ 的定义可知，其最大值是 π，最小值是 1.

选项 D 不正确，因为对任意有理数 x，都有 $f[f(x)]=f(1)=1$，因此方程 $f[f(x)]=1$ 的解集为有理数集.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握函数的概念以及函数的性质，即准确理解函数 $f(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\\pi,x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的意义.

8 **C** 【解析】设租 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆时租金为 z 元，则 $z=1\,600x+2\,400y$，x、y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant21,\\y-x\leqslant7,\\36x+60y\geqslant900,\\x,y\geqslant0,x、y\in\mathbf{N},\end{cases}$

画出可行域并观察可知，直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{2\,400}$ 过点 $A(5,12)$ 时纵截距最小.

$\therefore z_{\min}=5\times1\,600+2\,400\times12=36\,800$，故租金最少为 36 800 元. 故选 C.

【失分探因】本题易错的地方是没有认真审题，导致题意理解有误，或者约束条件写错，或者没有准确把握用图解法解决线性规划问题.

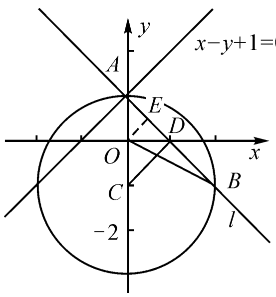
9 **A** 【解析】当 $n=1$ 时，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $n=2$ 时，$S=\sqrt{3}$；当 $n=3$ 时，$S=\sqrt{3}$；当 $n=4$ 时，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $n=5$ 时，$S=0$；当 $n=6$ 时，$S=0$；当 $n=7$ 时，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以该程序是以 6 为周期的循环，由 $2\,015\div 6=335\cdots\cdots 5$，所以最后输出 S 的值为 0. 故选 A.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握程序框图，或没有准确把握三角函数的周期性，导致计算失误.

10 **B** 【解析】设$\triangle OFM$ 的外接圆圆心为 P，且半径为 3，由已知得点 P 到抛物线准线的距离等于 $|PF|$，故点 P 在抛物线上，且点 P 的横坐标为$\frac{p}{4}$，由抛物线定义得，$\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=3$，所以 $p=4$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握抛物线的定义.

11 **A** 【解析】$\because$ 圆 C 的方程为 $x^2+y^2=-2y+3$，即 $x^2+(y+1)^2=4$，$\therefore$ 圆 C 的圆心为 $C(0,-1)$，半径为 2. $\because$ 直线 l 过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-y+1=0$ 垂直，$\therefore$ 直线 l：$x+y-1=0$.



第 11 题图

$\therefore$ 圆心 C 到直线 l 的距离 $d'=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 直线 l 被圆 C 截得的弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，

又$\because$ 坐标原点 O 到 AB 的距离为 $d'=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\triangle OAB$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|AB|\times d'=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握直线与圆的位置关系，或者没有灵活运用数形结合的思想方法解决问题，或计算出错.

12 **B** 【解析】令 $x=-3$，得 $f(3)=f(-3)+f(3)$，又 $y=f(x)$ 是偶函数，故 $f(3)=0$，①正确；因为 $f(x+6)=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，因为 $x=0$ 是一条对称轴，故 $x=-6$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，②正确；函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,-6]$ 上的单调性与在 $[-3,0]$ 上的单调性相同，因为函数在 $[0,3]$ 上单调递增，故在 $[-3,0]$ 上单调递减，③错误；$y=f(x)$ 在每个周期内有一个零点，区间 $[0,6)$，$[6,12)$，$\cdots$，$[2\,004,2\,010)$ 分别有一个零点，共有 335 个周期，在区间 $[2\,010,2\,014]$ 内有一个零点为 2 013，故零点共有 336 个，④错误，综上所述，正确的命题为①②.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握函数的性质并灵活运用它.

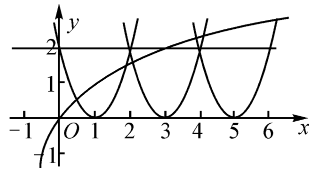
13 255 【解析】令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{16}=2^8=256$，令 $a_0=1^8=1$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{16}=255$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握求二项式展开式的基本方法——赋值法，或计算失误.

14 150 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$\because\angle BAC=45°$，$\angle ABC=90°$，$BC=100$，$\therefore AC=\frac{100}{\sin 45°}=100\sqrt{2}$，在 $\triangle AMC$ 中，$\because\angle MAC=75°$，$\angle MCA=60°$，$\therefore\angle AMC=45°$，由正弦定理可得 $\frac{AM}{\sin\angle ACM}=\frac{AC}{\sin\angle AMC}$，即 $\frac{AM}{\sin 60°}=\frac{100\sqrt{2}}{\sin 45°}$，解得 $AM=100\sqrt{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中，$MN=AM\cdot\sin\angle MAN=100\sqrt{3}\times\sin 60°=150(\mathrm{m})$. 故答案为 150.

【失分探因】本题易错的地方是由于空间想象能力欠缺，导致没有准确把握题意.

15 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$ 【解析】由函数 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(1)=f(-1)$，令 $x=-1$，



第 15 题图

又对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(x)-f(1)$ 成立，则 $f(1)=f(-1)-f(-1)$，即 $f(1)=f(-1)=0$，$\therefore f(x)$ 是周期为 2 的函数，又当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=2x^2-12x+18$.

又 $f(3)=0$，$f(2)=2$，由 $y=f(x)-\log_a(x+1)=0$ 得 $f(x)=\log_a(x+1)$，分别作 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a(x+1)$ 的图象，当 $0<a<1$ 时不满足条件，当 $a>1$ 时，要使函数 $y=f(x)-\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三个零点，如图，所以 $\begin{cases}\log_a 3<2,\\ \log_a 5>2,\end{cases}$ 即 $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握数形结合的思想方法.

16 3^n 【解析】当 $n=1$ 时，$A\cup B=\{a_1\}$，则 $A=\varnothing$，$B=\{a_1\}$；$A=\{a_1\}$，$B=\varnothing$；$A=\{a_1\}$，$B=\{a_1\}$，即 $F_1(A,B)=3=3^1$；

当 $n=2$ 时，$A\cup B=\{a_1,a_2\}$，则 $A=\varnothing$，$B=\{a_1,a_2\}$；$A=\{a_1\}$，$B=\{a_2\}$ 或 $\{a_1,a_2\}$，$A=\{a_2\}$，$B=\{a_1\}$ 或 $\{a_1,a_2\}$；$A=\{a_1,a_2\}$，$B=\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$ 或 $\{a_1,a_2\}$，即 $F_2(A,B)=9=3^2$；

当 $n=3$ 时，$A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，则 $A=\varnothing$，$B=\{a_1,a_2,a_3\}$；$A=\{a_1\}$，$B=\{a_2,a_3\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$，

$A=\{a_2\}, B=\{a_1,a_3\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$；$A=\{a_3\}$，$B=\{a_1,a_2\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$，

$A=\{a_1,a_2\}, B=\{a_3\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$；$A=\{a_1,a_3\}, B=\{a_2\},\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$，

$A=\{a_2,a_3\}, B=\{a_1\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\}$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}$；$A=\{a_1,a_2,a_3\}, B=\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}$ 或 $\varnothing$.

即 $F_3(A,B)=27=3^3$；…

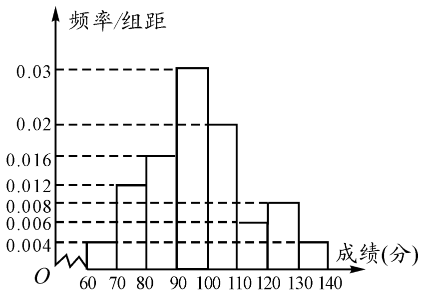
由此归纳推得 $F_n(A,B)=3^n$.

【失分探因】不善于观察、归纳一般规律.

17【解析】(1)由频率分布直方图知第七组频率为：

$f_7=1-(0.004+0.012+0.016+0.03+0.02+0.006+0.004)\times 10=0.08$.

直方图如图所示.



第 17 题图

(2)该校这次考试的平均成绩为：

$65\times 0.04+75\times 0.12+85\times 0.16+95\times 0.3+105\times 0.2+115\times 0.06+125\times 0.08+135\times 0.04=97$.

$\therefore$ 该校 2 000 名学生这次考试成绩的平均分为 97 分.

(3)第六组有学生 3 人，分别记作 A_1,A_2,A_3，第八组有学生 2 人，分别记作 B_1,B_2，则从中任取 2 人的所有基本事件为 $(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_2,A_3),(B_1,B_2)$ 共 10 个. 分差在 10 分以上，表示所选 2 人来自不同组，其基本事件有 6 个：$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2)$，$\therefore$ 从中任意抽取 2 人，分差在 10 分以上的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

【失分探因】本题易错的地方是没有准确把握频率分布直方图、用样本估计总体、古典概型的概率等基本知识，或计算失误.

18【解析】(1)$\because AA_1\perp$ 平面 ABC 且 $BC\subset$ 平面 ABC.

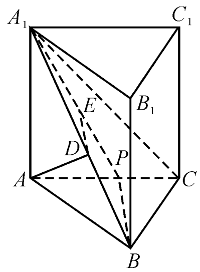
$\therefore AA_1\perp BC$ 且三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱.

$\because AD\perp$ 平面 A_1BC 且 $BC\subset$ 平面 A_1BC，$\therefore AD\perp BC$，

又 $\because AA_1\subset$ 平面 A_1AB，$AD\subset$ 平面 A_1AB，$A_1A\cap AD=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 A_1AB，$\therefore BC\perp A_1B$.

(2)由(1)可得 $AB\perp BC$，又因为 $AB=BC$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，因为 $AD\perp$ 平面 A_1BC 且 $A_1B\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AD\perp A_1B$，则由勾股定理可得 $DB=\sqrt{AB^2-AD^2}=1$，所以 $\angle ABD=60°$，又因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC 且 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp AB$，则 $A_1A=AB\tan\angle ABD=2\sqrt{3}$，$A_1B=4$，

过 D 作 A_1P 的垂线，交 A_1P 于点 E，因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形且 $AP=PC$，所以 $BP\perp AC$ 且 $BP=\sqrt{2}$，又因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC 且 $BP\subset$ 底面 ABC，所以 $BP\perp$ 平面 A_1PC，因为 $A_1P\subset$ 平面 A_1PC，所以 $BP\perp A_1P$，则 $\sin\angle BA_1P=\frac{BP}{A_1B}=\frac{DE}{A_1D}\Rightarrow DE=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，又因为 $DE\perp A_1P$ 且 $BP\perp A_1P$，所以 $DE/\!/BP$，则 $DE\perp$ 平面 A_1PC，即 DE 为三棱锥 $D-A_1PC$ 的高.



第 18 题图

因为 $S_{\triangle A_1PC}=\frac{1}{2}\cdot A_1A\cdot PC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

所以 $V_{D-A_1PC}=\frac{1}{3}\cdot DE\cdot S_{\triangle A_1PC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【失分探因】本题易错的地方是：由于空间想象能力差，导致不能准确理解题意，或由于定理没有熟练掌握，导致找不到解决问题的突破口，或计算错误.

19【解析】(1)$\because f(x)=\frac{2x+3}{3x}$，$\therefore a_{n+1}=f\left(\frac{1}{a_n}\right)=\dfrac{2\times\frac{1}{a_n}+3}{3\times\frac{1}{a_n}}=a_n+\frac{2}{3}$，

即 $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{3}$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，公差为 $\frac{2}{3}$ 的等差数列，$\therefore a_n=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because T_n=\sum\limits_{m=1}^{2n}(-1)^{m+1}\cdot a_ma_{m+1}$，

$\therefore T_n=\sum\limits_{m=1}^{2n}(-1)^{m+1}a_ma_{m+1}=a_2(a_1-a_3)+a_4(a_3-a_5)+\cdots+a_{2n}(a_{2n-1}-a_{2n+1})=-\frac{4}{3}(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=-\frac{4}{9}(2n^2+3n)$.

【失分探因】本题易错的地方是：在第(1)问中求通项公式出错，在第(2)问中没有将所求的和进行分组转化，使之利用等差数列的定义求和.

20【解析】$f'(x)=2x+\frac{a}{x+1}$，$f'(x)=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}\geqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，则 $a\geqslant -2x^2-2x$，$\therefore a\geqslant -2\cdot 1^2-2$，$a\geqslant -4$.

【失分探因】本题易错的地方是：基本方法没有掌握，或不善于转化，或计算错误.

21【解析】(1)依题意，有 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times b\times 2c=\sqrt{3}$，即 $a=2c$，$b=\frac{\sqrt{3}}{c}$，

又 $a^2-b^2=c^2$，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，$c=1$，则椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知 $c=1$，所以设过椭圆 C 的右焦点的动直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

将其代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 中得，$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

$\Delta=144(k^2+1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_{1,2}=\frac{8k^2\pm\sqrt{\Delta}}{2(3+4k^2)}$，$\therefore x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

因为 AB 中点的横坐标为$\frac{1}{2}$，所以$\frac{4k^2}{3+4k^2}=\frac{1}{2}$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$.

【失分探因】本题易错的地方是：没有准确理解题意，不善于用代数方法处理几何问题，或计算错误.

22【解析】(1)由已知条件，可得$\angle BAE=\angle CAD$，因为$\angle AEB$与$\angle ACB$是同弧上的圆周角，

所以$\angle AEB=\angle ACD$. 故$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$.

(2)因为$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$，所以$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$，即 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

又 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$，且 $S=\frac{1}{2}AD\cdot AE$，故 $AB\cdot AC\sin\angle BAC=AD\cdot AE$.

则 $\sin\angle BAC=1$，又$\angle BAC$为三角形内角，所以$\angle BAC=90°$.

【失分探因】本题易错的地方是：由于定理没有熟练掌握，导致找不到解决问题的突破口，或逻辑混乱.

23【解析】(1) C_1 为圆，C_2 为椭圆，

当 $\alpha=0$ 时，射线 l 与 C_1，C_2 交点的直角坐标分别是$(1,0)$，$(a,0)$，$\because$ 这两点间的距离为 2，$\therefore a=3$，

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，射线 l 与 C_1，C_2 交点的直角坐标分别是$(0,1)$，$(0,b)$，$\because$ 这两点重合，$\therefore b=1$；

(2) C_1，C_2 的普通方程分别为 $x^2+y^2=1$，$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，射线 l 与 C_1 的交点 A_1 的横坐标是 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，与 C_2 的交点 B_1 的横坐标是 $x=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

当 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$时，射线 l 与 C_1，C_2 的两个交点 A_2，B_2 分别与 A_1，B_1 关于 x 轴对称，$\therefore$ 四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 为等腰梯形，$\therefore$ 四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积为$\frac{2}{5}$.

【失分探因】本题易错的地方是：不善于将极坐标系中的问题转化为直角坐标系中的问题、将参数方程问题转化为普通方程问题，或计算错误.

24【解析】(1)根据柯西不等式得：

$1=a+b+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}a+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}b+1\cdot c\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)^{\frac{1}{2}}(2a^2+3b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{11}{6}}\cdot\sqrt{S}$，

即$\sqrt{\frac{11}{6}}\cdot\sqrt{S}\geqslant 1$，$\therefore S\geqslant\frac{6}{11}$，等号成立的条件是 $a=\frac{3}{11}$，$b=\frac{2}{11}$，$c=\frac{6}{11}$，

$\therefore$ 当 $a=\frac{3}{11}$，$b=\frac{2}{11}$，$c=\frac{6}{11}$时，$S_{\min}=\frac{6}{11}$.

(2)根据条件可得$\begin{cases}a+b=1-c,\\2a^2+3b^2=1-c^2,\end{cases}$根据柯西不等式得：

即$(a+b)^2\leqslant\frac{5}{6}\times(2a^2+3b^2)$，$\therefore(1-c)^2\leqslant\frac{5}{6}\cdot(1-c^2)$，解得$\frac{1}{11}\leqslant c\leqslant 1$.

【失分探因】本题易错的地方是：没有熟练掌握柯西不等式，以致找不到解决问题的突破口，或计算错误.