答案与解析

第一章 集合

第一节 集合的含义与表示

课时 1 集合的含义

正文P1

答案

1 C　2 A　3 B　4 B

5 D　6 $\notin$　$\in$　7 6

8 因为 $a\in A$ 且 $3a\in A$，所以 $\begin{cases}a<6,\\3a<6,\end{cases}$ 解得 $a<2$。又 $a\in\mathbf{N}$，所以 $a=0$ 或 1。

9 D　10 B　11 C　12 $\in$　$\notin$

13 0 或 1

14 (1) M 中只有一个元素，根据已知必须满足 $x=8-x$，所以 $x=4$。故含有一个元素的集合 $M=\{4\}$。

(2) 当 M 中含有两个元素时，其元素只能是 x 和 $8-x$，从而含有两个元素的集合 M 应为 $\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$。

(3) 满足条件的 M 是由集合 $\{4\}$，$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$ 中的元素组成的，它包括以下情况：

①由 1 个集合中的元素组成的有 $\{4\}$，$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$，共 5 种。

②由 2 个集合中的元素组成的有 $\{4,0,8\}$，$\{4,1,7\}$，$\{4,2,6\}$，$\{4,3,5\}$，$\{0,8,1,7\}$，$\{0,8,2,6\}$，$\{0,8,3,5\}$，$\{1,7,2,6\}$，$\{1,7,3,5\}$，$\{2,6,3,5\}$，共 10 种。

③由 3 个集合中的元素组成的有 $\{4,0,8,1,7\}$，$\{4,0,8,2,6\}$，$\{4,0,8,3,5\}$，$\{4,1,7,2,6\}$，$\{4,1,7,3,5\}$，$\{4,2,6,3,5\}$，$\{0,8,1,7,2,6\}$，$\{0,8,1,7,3,5\}$，$\{1,7,2,6,3,5\}$，$\{0,8,2,6,3,5\}$，共 10 种。

④由 4 个集合中的元素组成的有 $\{4,0,8,1,7,2,6\}$，$\{4,0,8,1,7,3,5\}$，$\{4,0,8,2,6,3,5\}$，$\{4,1,7,2,6,3,5\}$，$\{0,8,1,7,2,6,3,5\}$，共 5 种。

⑤由 5 个集合中的元素组成的有 $\{4,0,8,1,7,2,6,3,5\}$，共 1 种。

综上可知，满足题设条件的集合 M 共有 31 种。

15 (1) 若 $2\in A$，则 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$，于是 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$，

故集合 A 中还有 $-1,\frac{1}{2}$ 两个元素。

(2) 若 A 为单元素集，则 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$。因为方程 $a^2-a+1=0$ 无实数解，所以 $a\neq\frac{1}{1-a}$。

所以 a 与 $\frac{1}{1-a}$ 都为集合 A 的元素，所以集合 A 不是单元素集。

(3) 由已知，$a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}\in A$，

现只需证明：$a,\frac{1}{1-a},\frac{1-a}{-a}$ 三个数互不相等。

若 $a=\frac{1}{1-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$，方程无解。所以 $a\neq\frac{1}{1-a}$。

若 $a=\frac{1-a}{-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$，方程无解。所以 $a\neq\frac{1-a}{-a}$。

若 $\frac{1}{1-a}=\frac{1-a}{-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$，方程无解。所以 $\frac{1}{1-a}\neq\frac{1-a}{-a}$。

故集合 A 中至少有三个不同元素。

16 A　17 D　18 B

19 (1) $\notin$　$\notin$　$\in$　(2) $\notin$　$\in$　(3) $\notin$　$\in$　(4) $\notin$　$\in$

20 (1) $x\neq0$ 且 $x\neq3$，$x\neq-1$　(2) -2

21 1，-1

22 对任意 $a\in A$，有 $|a|\in B$。因为集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，由 $-1,-2,0,1,2,3\in A$，知 $0,1,2,3\in B$。又因为 B 中只有 4 个元素，所以 $B=\{0,1,2,3\}$。

23 由题意知 $a\neq0$，$a+b=0$，故 $a=-b$，$\frac{b}{a}=-1$。又 $b=1$，则 $a=-1$，所以 $a-b=-2$。

24 (1) A 为 $\varnothing$，则 $a\neq0$ 且 $\Delta=(-3)^2-4a<0$，所以 $a>\frac{9}{4}$。

(2) 因为 $1\in A$，所以 $a\times1^2-3\times1+1=0$，所以 $a=2$。

(3) 当 $a=0$ 时，$x=\frac{1}{3}$，符合题意；当 $a\neq0$ 时，$\Delta=(-3)^2-4a=0$，所以 $a=\frac{9}{4}$。

所以集合 A 中仅含有一个元素时，$a=0$ 或 $a=\frac{9}{4}$。

(4) 集合 A 中含有两个元素，即关于 x 的方程 $ax^2-3x+1=0$ 有两个不相等的实数解，所以 $a\neq0$，且 $\Delta=(-3)^2-4a>0$，解得 $a<\frac{9}{4}$ 且 $a\neq0$。

所以实数 a 的取值范围为 $\{a|a<\frac{9}{4}$ 且 $a\neq0\}$。

解析

1 ①，③中元素是确定的。

2 $x>0$ 时，$|x|=x$，$\sqrt{x^2}=|x|=x$，$-\sqrt{x^2}=-|x|=-x$；$x<0$ 时，$|x|=-x$，$\sqrt{x^2}=-x$，$-\sqrt{x^2}=x$。

3 属于 A 而不属于 B 的元素只有 2。

4 $\mathbf{N}^*$ 是正整数集，故 $0\notin\mathbf{N}^*$，$|-4|=4\in\mathbf{N}^*$。

5 是实数而不是有理数，这里只有 $\sqrt{7}$。

6 因为 a 是偶数，b 是奇数，所以 $a+b$ 是奇数，ab 是偶数。故 $a+b\notin A$，$ab\in A$。

7 因为 $x\in\mathbf{N}$，$2<x<a$，且集合 P 中恰有三个元素，所以结合数轴知 $a=6$。

10 因为 a,b 为非零实数，所以代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$ 的取值为

-1 或 3，所以 $-1\in A,3\in A$。

11 $\mathbf{N}^*$ 是正整数集，最小的数是 1，故①正确；当 $a<0$ 时，$-a\in\mathbf{N}^*$，但 $a\notin\mathbf{N}^*$，故②错误；若 $a\in\mathbf{N}^*$，则 a 的最小值为 1，又 $b\in\mathbf{N}^*$，则 b 的最小值为 1，当 a 和 b 都取最小值时，$a+b$ 取最小值 2，故③正确；由集合中元素的互异性知④错误。

12 矩形是平行四边形，梯形不是平行四边形，故 $p\in M,q\notin M$。

13 因为 $y=-x^2+1\leqslant 1$，且 $y\in\mathbf{N}$，所以 y 的值为 0，1，即集合 A 中的元素为 0，1。又 $t\in A$，所以 $t=0$ 或 1。

【易错点拨】①在确定集合 A 中的元素时，错误地认为是 x，或表达式 $-x^2+1$，②忽视条件 $y\in\mathbf{N}$，错填 $y\leqslant 1$，或 $t=0,1$ 中的一个。

【防错良方】审清集合 A 的元素是什么，需具备哪些条件，这里的 y 满足 $y=-x^2+1\leqslant 1$，同时 $y\in\mathbf{N}$，集合中的元素是满足条件的所有，而不能遗漏。

14 【答题模板】①确定集合的构成，即对象是什么。②元素满足哪些条件。③满足条件的所有，不能漏掉或重复。

15 【易错点拨】本题是上一题的延伸和抽象。(1)的证明中不能正确认识“若 $a\in A,a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$”的递推作用，造成给出 $2\in A$ 后，导出元素不能确定；(2)中什么时候是单元素集合 M，不能找到方程 $a=\frac{1}{1-a}$，造成证明受阻；(3)中如何利用递推关系，求出元素有哪三个，为什么只有 3 个，由对元素的互异性认识不清，而缺少后面的证明。

【防错良方】明确集合元素的属性，“若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$”，循环推理，运用元素的互异性终止推理，并证明互异。

18 $a=3$ 时，$a-2=1$，与元素的互异性矛盾，故只有 $a-2=3$，$a=5$。

20 (1)根据集合元素的互异性 $\begin{cases}x\neq 3,\\x\neq x^2-2x,\\x^2-2x\neq 3,\end{cases}$ 即 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3,x\neq -1$。

(2)因为 $x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，又 $-2\in A$，所以 $x=-2$。

21 由互异性知 $a^2\neq 1$，即 $a\neq\pm 1$。

课时 2　集合的表示方法

➡ 正文 P3

答案

1 B　2 B　3 B　4 C
5 A　6 B　7 B　8 D
9 D　10 $\{4,9,16\}$
11 $\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$
12 $\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$

13 (1)集合①$\{x\mid y=x^2+1\}$的代表元素是 x，满足条件 $y=x^2+1$ 中的 $x\in\mathbf{R}$，所以实质上 $\{x\mid y=x^2+1\}=\mathbf{R}$；集合②的代表元素是 y，满足条件 $y=x^2+1$ 的 y 的取值范围是 $y\geqslant 1$，所以实质上 $\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$；集合③$\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$的代表元素是 (x,y)，可以认为是满足 $y=x^2+1$ 的数对 (x,y) 的集合，也可以认为是坐标平面内的点 (x,y) 构成的集合，且这些点的坐标满足 $y=x^2+1$，所以 $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}=\{P\mid P$ 是抛物线 $y=x^2+1$ 上的点$\}$。

(2)由(1)中三个集合各自的含义知，它们是不同的集合。

14 (1)绝对值小于 5 的全体实数组成的集合可表示为 $\{x\mid |x|<5\}$。

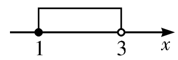
(2)所有正方形组成的集合可表示为{正方形}。

(3)除以 3 余 1 的所有整数组成的集合可表示为 $\{a\mid a=3x+1,x\in\mathbf{Z}\}$。

(4)构成英文单词 mathematics 的全体字母可表示为{m，a，t，h，e，i，c，s}。

15 (1) $\{(x,y)\mid 0<x<2,0<y<1\}$。

(2)解集表示如图所示。



第 15 题图

16 因为 $\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}$，所以 $x=-2,2,4,5$。

故 $A=\{-2,2,4,5\}$。

B 中，$x\in A$，所以 $x=-2$ 时，$y=2$；$x=2$ 时，$y=2$；$x=4$ 时，$y=-10$；$x=5$ 时，$y=-19$。

所以 $B=\{(-2,2),(2,2),(4,-10),(5,-19)\}$。

综上所述，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{(2,2),(4,-10),(5,-19)\}$。

17 A　18 B　19 A　20 A
21 A　22 D　23 D　24 A
25 B　26 D

27 结合图形，可得

$M=\left\{(x,y)\mid xy\geqslant 0,-2\leqslant x\leqslant\frac{5}{2},-1\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}\right\}$。

解析

7 实数集就是 $\mathbf{R}$，所以①错误；方程 $\sqrt{2x-1}+|2y+1|=0$ 的解为 $x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}$，用集合表示为 $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\right\}$，所以②错误；方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 用集合表示为 $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}\right\}$，所以③正确；$y=x^2+1\geqslant 1$，集合 M 表示大于等于 1 的实数集合，N 中的元素 (x,y) 表示抛物线 $y=x^2+1$ 上的点，它们不是同一个集合，所以④错误。故选 B。

8 因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=12$ 时，$x=4,y=3$。

9 由 $x^3=x$，即 $x(x-1)(x+1)=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$，因为 $-1\notin\mathbf{N}$，故集合 $\{x\in\mathbf{N}\mid x^3=x\}$ 用列举法可表示为 $\{0,1\}$。故①不正确。

集合表示中的符号“{ }”已包含“所有”“全体”等含义，而符号“$\mathbf{R}$”表示所有的实数组成的集合，故实数集的正确表示应为 $\{x\mid x$ 为实数$\}$ 或 $\mathbf{R}$。故②不正确。

方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解是有序实数对，其解集应为 $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}\right\}$。故③不正确。

【易错点拨】①易忽略代表元素 $x\in\mathbf{N}$，导致判断错误；②出错是对常用数集的符号理解不到位；③出错是对“方程组的解为有序实数对”这一点认识不到位。

【防错良方】集合中元素的属性一一理解清楚，①的错在于

忽略了 $x\in\mathbf{N}$。②的错在于实数集本身就是全体实数构成的集合。{}中无须再加 x 为所有实数。③中解集为有序实数对,而 $\{x=1,y=2\}$ 是两个方程构成的一个集合,所以防错的实质是透彻理解集合的意义及集合的表示方法。

12 x,y 满足条件 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$,

则有 $\begin{cases}x=0,\\y=6,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=5,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=2。\end{cases}$所以 $A=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$。

【易错点拨】本题易错的地方是忽略元素的形式,从而得到错误答案 $\{0,6,1,5,2,2\}$。

【防错良方】集合 A 的元素是 (x,y),是数对,再考虑别的条件 $y=-x^2+6\leqslant 6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$。

16【答题模板】

确定集合中元素的特征 → 给出满足特征的全体 → 根据要求写出集合

17 因为集合 $M=\{-1,0,1\}$,所以 $N=\{x\mid x=ab,a,b\in M,a\neq b\}=\{-1,0\}$,所以集合 N 中所有元素之和为 -1。

18 当 $x_1=1$ 时,$x_1+x_2=1+2=3$ 或 $x_1+x_2=1+3=4$;当 $x_1=2$ 时,$x_1+x_2=2+2=4$ 或 $x_1+x_2=2+3=5$;当 $x_1=3$ 时,$x_1+x_2=3+2=5$ 或 $x_1+x_2=3+3=6$。所以 $A+B=\{3,4,5,6\}$,共 4 个元素。

【易错点拨】对于集合中的元素是自定义运算的,对自定义运算的正确理解是解题的关键。

【防错良方】一定要清楚集合中的元素是什么,满足什么条件,再逐一落实。

19 x,y 的取值均为 $0,1,2$,$x-y$ 的值为 $0,-1,-2,1,2$,所以 $B=\{0,-1,-2,1,2\}$。

【易错点拨】①x,y 可相等,易漏 0;

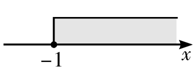
②x,y 可互换位置,即 $x-y$ 可正,可负;

③x,y 必须取完全部值,得到全部的 $x-y$。

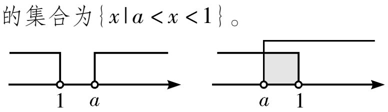
【防错良方】深刻认识描述法的两大要素,元素特征及元素制约条件。

20 由已知 $-1\notin A$,所以 $(-1)^2-2\,018\times(-1)-a\geqslant 0$,解得 $a\leqslant 2\,019$。故选 A。

21 ①的解集为 $\{(2,-2)\}$ 而不是 $\{2,-2\}$,②集合 $\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示当 $x\in\mathbf{R}$ 时 y 的取值范围,而 $y=x^2-1\geqslant -1$,故集合 $\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant -1\}$。同理集合 $\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$。结合数轴(如图①)知,两个集合的公共元素所组成的集合为 $\{y\mid y\geqslant -1\}$。③集合 $\{x\mid x-1<0\}$ 表示不等式 $x-1<0$ 的解集,即 $\{x\mid x<1\}$。而集合 $\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$ 表示不等式 $x>a$ 的解集。结合数轴(如图②),当 $a\geqslant 1$ 时两个集合没有公共元素;当 $a<1$ 时,两个集合有公共元素,形成的集合为 $\{x\mid a<x<1\}$。



①



②

第 21 题图

22 由题意可知,当 $x=0$ 时,$z=0$;当 $x=1$ 时,$z=1\times2\times(1+2)=6$ 或 $z=1\times3\times(1+3)=12$,所以所有元素之和为 18。故选 D。

23 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<2\}=\{0,1\}$。由 $x\in A,y\in A$ 可知,x 可取 0,1,y 可取 0,1。当 $x=0$ 时,对应的元素为 $(0,0),(0,1)$;当 $x=1$ 时,对应的元素为 $(1,0),(1,1)$。所以集合 $\{(x,y)\mid x\in A,y\in A\}$ 可表示为 $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$。故选 D。

24 令 $x^2-y^2=7$,即 $(x+y)(x-y)=7$。因为令 $\begin{cases}x-y=1,\\x+y=7,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$ 即方程 $x^2-y^2=7$ 有解,

所以 $7\in M$。

令 $x^2-y^2=6$ 即 $(x+y)(x-y)=6$,

所以 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=6,\\x-y=1\end{cases}$。

两个方程组均无整数解,所以仅 $7\in M$。

25 若 x 和 y 一个为奇数,一个为偶数,则 $xy=36$,满足此条件的有 $1\times36=3\times12=4\times9$,故点 (x,y) 有 6 个;若 x 和 y 都为偶数或奇数,则 $x+y=36$,满足此条件的有 $1+35=2+34=3+33=4+32=\cdots=35+1$,故点 (x,y) 有 35 个。综上可知,集合 M 中元素的个数为 $6+35=41$。

【易错点拨】新概念题中的新定义要理解透彻。不能误解 $m\otimes n$ 为 $m\times n$。关键是对 $m+n=36$,和 $mn=36$ 两种情况的讨论。

【答题模板】1. 理解新概念定义。2. 在新的定义下进行运算论证。3. 根据要求得出结论。

26 $A=\{(-1,-1),(0,1),(1,3)\}$,

$B=\{(1,1),(0,1),(-1,1),(1,0),(0,0),(-1,0),(1,-1),(0,-1),(-1,-1)\}$。

$A\oplus B$ 中有 $3\times9-4=23$ 个元素。

【易错点拨】1. B 中的元素是 $x=\pm1,y=\pm1$ 围成的正方形(包括边界)中的横纵坐标均为整数的点。

2. $A\oplus B$ 中的元素是 A,B 中可取一个元素,横纵坐标对应相加得到的新的数对。

3. 点 $(0,0),(-1,0),(1,2),(0,2)$ 各重复一次,容易忽视检验而出现 27 的错误答案。

第二节 集合的基本关系

课时 1 子集与真子集

➡正文P5

答案

1 B **2** B **3** B **4** C

5 D **6** D

7 $N\subsetneqq M$

8 5

9 -1 或 2

10 因为 $B\subseteq A$,所以 B 的可能情况有 $B\neq\varnothing$ 和 $B=\varnothing$ 两种。

①当 $B\neq\varnothing$ 时,因为 $B\subseteq A$,所以 $\begin{cases}a>3,\\a\leqslant 2a-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1<-2,\\a\leqslant 2a-1\end{cases}$ 成立。解得 $a>3$。②当 $B=\varnothing$ 时,由 $a>2a-1$,得 $a<1$。综上所述,实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<1$ 或 $a>3\}$。

11 C **12** C **13** A **14** B

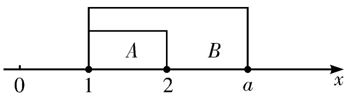
15 B **16** 4 **17** $-2<a\leqslant 2$

18 7

19 因为 $A=\{(x,y)\mid x+y=2,x,y\in\mathbf{N}\}$，所以 $A=\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$。

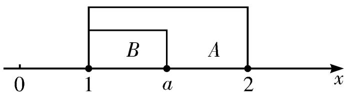
所以 A 的子集为 $\varnothing$，$\{(0,2)\}$，$\{(1,1)\}$，$\{(2,0)\}$，$\{(0,2),(1,1)\}$，$\{(0,2),(2,0)\}$，$\{(1,1),(2,0)\}$，$\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$。A 的真子集有 $\varnothing$，$\{(0,2)\}$，$\{(1,1)\}$，$\{(2,0)\}$，$\{(0,2),(1,1)\}$，$\{(0,2),(2,0)\}$，$\{(1,1),(2,0)\}$。

20 (1) 若 $A\subsetneqq B$，由图(1)可知，$a>2$。



第 20 题图(1)

(2) 若 $B\subsetneqq A$，由图(2)可知，$1\leqslant a<2$。



第 20 题图(2)

21 D　　**22** B　　**23** D

24 (4)(5)　**25** ①③

26 因为 $B\neq\varnothing$，且 $B\subsetneqq A$，$A=\{-1,2\}$，所以 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$。又 $B=\{x\mid x^2-2ax+b=0\}$，所以当 $B=\{-1\}$ 时，有 $\begin{cases}4a^2-4b=0,\\1+2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1。\end{cases}$ 当 $B=\{2\}$ 时，有 $\begin{cases}4a^2-4b=0,\\4-4a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=4。\end{cases}$ 综上可知，$\begin{cases}a=-1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=4。\end{cases}$

27 (1) 由题意得，方程 $x^2+2x-a=0$ 有实数解，所以 $\Delta=2^2-4\times(-a)\geqslant0$，得 $a\geqslant-1$。

(2) 因为 $N=\{x\mid x^2+x=0\}=\{0,-1\}$，且 $M\subseteq N$，

所以当 $M=\varnothing$ 时，$\Delta=2^2-4\times(-a)<0$，得 $a<-1$；

当 $M\neq\varnothing$ 时，当 $\Delta=0$ 时，$a=-1$，此时 $M=\{-1\}$，满足 $M\subseteq N$，符合题意。当 $\Delta>0$ 时，$a>-1$，M 中有两个元素，若 $M\subseteq N$，则 $M=N$，从而 $\begin{cases}-1+0=-2,\\(-1)\times0=-a,\end{cases}$ 无解。综上，a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant-1\}$。

28 因为 $B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，且 $A\subseteq B$，所以集合 A 可分三种情况。

(1) 若 $A=\varnothing$，此时 $\Delta=4m^2-4(m^2-m+2)=4m-8<0$，所以 $m<2$。

(2) 若 $A\subseteq B$，且 $A\neq\varnothing$，则 $A=\{1\}$ 或 $\{2\}$，$\Delta=4m-8=0$，$m=2$。此时，$x=-\dfrac{-2m}{2}=2$ 符合题意 $A\subseteq B$。

(3) 若 $A=B$，此时 $A=\{1,2\}$，即 1，2 是关于 x 的方程 $x^2-2mx+m^2-m+2=0$ 的两个根。由根与系数的关系，得 $2m=3$，且 $m^2-m+2=2$。此时 m 不存在。

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant2\}$。

解析

5 由于集合 A 为数集，集合 B 为点集，因此 M 与 P 互不包含，故选 D。

6 对于 $x=3k(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$x=6m\ (m\in\mathbf{Z})$；当 $k=2m-1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$x=6m-3(m\in\mathbf{Z})$。由此可知 $A\supsetneqq B$。

7 因为 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2\geqslant-2$，所以 $M=\{y\mid y\geqslant-2\}$。所以 $N\subsetneqq M$。

8 因为 $A\subsetneqq\{1,2,3\}$，所以 A 中至多含有 2 个元素。因为 A 中至少有一个奇数，所以 A 可能为 $\{1\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，共 5 个。

9 因为 $B\subseteq A$，所以 $a^2-a+1=3$ 或 $a^2-a+1=a$。①由 $a^2-a+1=3$ 得 $a^2-a-2=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$。当 $a=-1$ 时，$A=\{1,3,-1\}$，$B=\{1,3\}$，满足 $B\subseteq A$；当 $a=2$ 时，$A=\{1,3,2\}$，$B=\{1,3\}$，满足 $B\subseteq A$。②由 $a^2-a+1=a$ 得 $a^2-2a+1=0$，解得 $a=1$。当 $a=1$ 时，$A=\{1,3,1\}$，不满足集合元素的互异性。综上，若 $B\subseteq A$，则 $a=-1$ 或 $a=2$，故答案为 -1 或 2。

【易错点拨】因忽视了元素的互异性检验而错填 $-1,1,2$，因为 $a=1$ 时，A，B 中均不满足元素互异性。

10 【易错点拨】该题极容易忽视 $B=\varnothing$ 的情况讨论，而错填结果 $\{a\mid a>3\}$，在 $B\subseteq A$ 中 B 可能为空集，必须牢记。

11 因为集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid0<x<4\}=\{1,2,3\}$，所以真子集的个数是 $2^3-1=7$，故选 C。

12 因为 $B\subsetneqq A$，所以 $x^2=3$ 或 $x^2=x$。当 $x^2=3$ 时，$x=\pm\sqrt{3}$，此时，$A=\{1,3,\sqrt{3}\}$ 或 $\{1,3,-\sqrt{3}\}$，$B=\{3,1\}$，符合题意。当 $x^2=x$ 时，$x=0$ 或 $x=1$(舍去)，此时，$A=\{0,1,3\}$，$B=\{0,1\}$，符合题意。故 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$。

【答题模板】(1) B 的所有元素均在 A 中；

(2) 列出各种可能符合条件的等式或不等式；

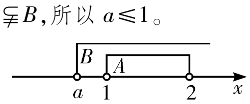
(3) 检验所求变量值是否满足条件；

(4) 得出符合条件的结论。

13 分析知 $x\neq y$。由 A 是 B 的真子集，得 $x=2$ 或 $x=4$。由 y 在集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 中及集合中元素的互异性，得 $y=0$ 或 $y=3$，故集合 $\{x,y\}$ 共有 $\{2,0\}$，$\{2,3\}$，$\{4,0\}$，$\{4,3\}$，共 4 个，故选 A。

14 由题中所给定义，可知 $P-Q=\{1,2,3,4,5\}$，所以 $P-Q$ 的所有真子集的个数为 $2^5-1=31$。故选 B。

15 如图所示，因为 $A\subsetneqq B$，所以 $a\leqslant1$。



第 15 题图

16 在 $A*B$ 中，$x\in A$，所以 x 可以取 1，2，3，4，5。

又 $x\notin B$，所以 x 又不能取 2，4，5。

因此 x 可以取的值只有 1 和 3，所以 $A*B=\{1,3\}$，其子集个数为 4。

17 $M=\{x\mid x^2-2x-3=0\}=\{3,-1\}$。(1) 当 $N=\varnothing$ 时，$N\subsetneqq M$ 成立，所以 $\Delta=a^2-4<0$，所以 $-2<a<2$。

(2) 当 $N\neq\varnothing$ 时，因为 $N\subsetneqq M$，所以 $3\in N$ 或 $-1\in N$。

当 $3\in N$ 时，$3^2+3a+1=0$，即 $a=-\dfrac{10}{3}$，此时方程为 x^2-

$\frac{10}{3}x+1=0$。解得 $N=\{3,\frac{1}{3}\}$，不满足$N\subsetneqq M$；

当 $-1\in N$ 时，$(-1)^2-a+1=0$，即 $a=2$，此时方程为 $x^2+2x+1=0$，解得 $N=\{-1\}$，满足 $N\subsetneqq M$。

所以 a 的取值范围是 $-2<a\leqslant 2$。

18 1 和 5 必须同属于或同不属于 S。同理，2 和 4 也一样，$6\notin S$，3 可以属于 S，也可以不属于 S。故 S 共有 3 组元素，又 S 为非空集合，故集合 S 共有 $2^3-1=7$ 个。

21 对于 $2x^2+3x-2=0$，$\Delta=3^2-4\times 2\times(-2)=25$，$x=\frac{-3\pm 5}{4}$，$x=-2$ 或$x=\frac{1}{2}$，不满足 $x\in\mathbf{N}$。

22 空集的子集是空集，空集是任何非空集合的真子集，故只有④正确。

23 因为 $B\subseteq A$，所以当 $B\neq\varnothing$，即 $a\neq 0$ 时，$B=\{x|x=-\frac{1}{a}\}$，因此有 $-\frac{1}{a}\in A$，所以 $a=\pm 1$；

当 $B=\varnothing$，即 $a=0$ 时满足条件。

综上可得实数 a 的所有可能取值的集合是$\{-1,0,1\}$。

【易错点拨】本题易错地方是忽略 $B=\varnothing$ 这一情况，而误选 C。由于空集是任何集合的子集，又是任何非空集合的真子集，所以在遇到“$A\subseteq B$”或“$A\subsetneqq B$ 且 $B\neq\varnothing$”时，一定要注意讨论 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况，$A=\varnothing$ 的情况易被忽略，应引起足够重视。

24 $\{0\}$，$\{\varnothing\}$均为单元素集，$m<0$ 时，$\{x|3m<x<m\}$ 非空。

25 空集是自身的子集，①对；0 不是空集里的元素，②错；空集是任何非空集合的真子集，③对；$\{0\}$是含一个元素 0 的集合，不是空集，④错。故正确结论的序号为①③。

【易错点拨】集合与集合之间的关系，元素与集合之间的关系是用不同的符号表示的，特别注意空集是不含有任何元素的集合，且规定$\varnothing\subseteq\varnothing$。

课时 2　集合的相等及其子集的性质

➡ 正文P7

答案

1 A　**2** B　**3** A　**4** D　**5** $A=B$

6 对于任意的 $x\in M$，有 $x=1+a^2=(a+2)^2-4(a+2)+5$。因为 $a\in\mathbf{N}^*$，所以 $a+2\in\mathbf{N}^*$ 且$a+2\geqslant 3$，所以 $M\subsetneqq P$。

7 (1) 如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A-B=\{1\}$。(答案不唯一)

(2) 不一定相等。

由(1)，$B-A=\{4\}$，而 $A-B=\{1\}$，$B-A\neq A-B$，

只有当 $A=B$ 时，$A-B=B-A$，

所以 $A-B$ 与 $B-A$ 不一定相等。

(3) $A-B=\{x|x\geqslant 6\}$，$B-A=\{x|-6<x\leqslant 4\}$，

$A-(A-B)=\{x|4<x<6\}$，

$B-(B-A)=\{x|4<x<6\}$。

由此猜测：一般地，对于两个集合 A，B，有 $A-(A-B)=B-(B-A)$成立。

8 C　**9** D　**10** D　**11** B

12 (1) 若 $M\subseteq N$，则$\begin{cases}2m-1\geqslant m-6,\\ m-6\leqslant -2,\\ 2m-1\geqslant 5,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant m\leqslant 4$。

所以实数 m 的取值范围是$\{m|3\leqslant m\leqslant 4\}$。

(2) 若 $M=N$，则 $\begin{cases}m-6=-2,\\ 2m-1=5,\end{cases}$ 方程组无解，即不存在实数 m 使得 $M=N$。

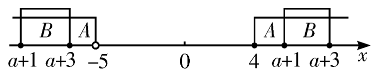
所以实数 m 的取值范围为$\varnothing$。

13 A　**14** D　**15** B　**16** C

17 $\{a|a\leqslant -5$或 $a>5\}$

18 6　**19** 2　**20** $\subseteq$　$\subseteq$　**21** 5　16

22 利用数轴法表示 $B\subseteq A$，如图所示，



第 22 题图

则 $a+3<-5$ 或 $a+1\geqslant 4$，解得 $a<-8$ 或 $a\geqslant 3$。

23 假设存在实数 x，使得 $B\subseteq A$，则 $x+2=3$ 或$x+2=x^2$。

(1) 当 $x+2=3$ 时，$x=1$，此时 $A=\{1,3,1\}$，不满足集合中元素的互异性，故 $x\neq 1$；

(2) 当 $x+2=x^2$ 时，即 $x^2-x-2=0$，故 $x=-1$ 或$x=2$，①当 $x=-1$ 时，$A=\{1,3,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾，故 $x\neq -1$；②当 $x=2$ 时，$A=\{1,3,4\}$，$B=\{4,1\}$，显然有 $B\subseteq A$。综上所述，存在 $x=2$，则 $A=\{1,3,4\}$，$B=\{4,1\}$，使得 $B\subseteq A$。

24 (1) 由题意，知当且仅当集合 A 中的元素为 1，2 时，对于任意的实数 b 都有 $A\subseteq B$。

因为 $A=\{a-4,a+4\}$，所以$\begin{cases}a-4=1,\\ a+4=2\end{cases}$ 或$\begin{cases}a-4=2,\\ a+4=1。\end{cases}$

方程组均无解，所以不存在实数 a，使得对于任意的实数 b 都有 $A\subseteq B$。

(2) 由(1)知，若 $A\subseteq B$，

则有$\begin{cases}a-4=1,\\ a+4=b\end{cases}$ 或$\begin{cases}a-4=2,\\ a+4=b\end{cases}$ 或$\begin{cases}a-4=b,\\ a+4=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a-4=b,\\ a+4=2。\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=5,\\ b=9\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=6,\\ b=10\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-3,\\ b=-7\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-2,\\ b=-6。\end{cases}$

所以所求实数对(a,b)为$(5,9)$，$(6,10)$，$(-3,-7)$，$(-2,-6)$。

25 (1) 因为 $m=2$，

所以由 $-1<2x-1<1$，解得 $0<x<1$，

即 $A=\{x|0<x<1\}$，

因为 $a,b\in A$，所以 $0<a<1$，$0<b<1$，

所以 $a-1<0$，$b-1<0$，

所以$(a-1)(b-1)>0$。

即$(a-1)(b-1)$为正。

(2) 因为 $m>0$，所以由 $-1<mx-1<1$ 得 $0<mx<2$，所以 $0<x<\frac{2}{m}$，

又 $A\subseteq B$，所以$\frac{2}{m}\leqslant 4$，所以 $m\geqslant\frac{1}{2}$，

所以 m 的取值范围是$\left\{m\middle|m\geqslant\frac{1}{2}\right\}$。

26 因为集合 $P=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant5\}$，所以集合 $P=\{1,3,5,7,9\}$，所以集合 P 含有四个元素的全体子集分别为 $\{3,5,7,9\}$，$\{1,5,7,9\}$，$\{1,3,5,9\}$，$\{1,3,5,7\}$，$\{1,3,7,9\}$。按照新定义可知：$|P_1|+|P_2|+\cdots+|P_k|=(3+5+7+9)+(1+5+7+9)+(1+3+5+9)+(1+3+5+7)+(1+3+7+9)=4\times(1+3+5+7+9)=100$。

27 依题可知，$B=\{6,5,2\}$，$C=\{2,3,6,11\}$，因为 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，所以 $A=\varnothing$ 或 $A=\{2\}$ 或 $A=\{6\}$ 或 $A=\{2,6\}$，故 A 中最多含有2个元素。

解析

1 对于(1)，$M=\{(-5,3)\}$ 中只有一个元素 $(-5,3)$，$N=\{-5,3\}$ 中有两个元素 $-5,3$，故 M,N 不是相等的集合；对于(2)，$M=\{1,-3\}$，$N=\{3,-1\}$，集合 M 和集合 N 中的元素不同，故 M,N 不是相等的集合；对于(3)，$M=\varnothing$，$N=\{0\}$，M 是空集，N 中有一个元素0，故 M,N 不是相等的集合；对于(4)，$M=\{\pi\}$，$N=\{3.141\ 5\}$，M 和 N 中各有一个元素，但元素不相同，故 M,N 不是相等的集合；对于(5)，$M=\{x|x$ 是小数$\}$，$N=\{x|x$ 是实数$\}$，因为实数集就是小数集，所以 M 和 N 是相等的集合；对于(6)，M 和 N 都只有两个元素1,2，所以 M 和 N 是相等的集合。故选A。

2 $P=\{x|x\geqslant-1\}$，$Q=\{y|y\geqslant0\}$，所以 $Q\subsetneqq P$。

3 因为 $A=B$，所以 $\begin{cases}x=x^2,\\y=2y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2y,\\y=x^2\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 由集合中元素的互异性得仅有 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ 符合 $A=B$，故选A。

4 因为整数包括奇数与偶数，所以 $n=2k$ 或 $2k-1(k\in\mathbf{Z})$，当 $n=2k$ 时，$2n+1=4k+1$，当 $n=2k-1$ 时，$2n+1=4k-1$，故 $A=B$。

5 设任意 $x_0\in A$，则 $x_0=3n_0-2$，$n_0\in\mathbf{Z}$。又 $3n_0-2=3(n_0-1)+1$，$n_0\in\mathbf{Z}$，所以 $n_0-1\in\mathbf{Z}$，$x_0\in B$，所以 $A\subseteq B$。设任意 $y_0\in B$，则 $y_0=3k_0+1$，$k_0\in\mathbf{Z}$。又 $3k_0+1=3(k_0+1)-2$，$k_0\in\mathbf{Z}$，所以 $k_0+1\in\mathbf{Z}$，$y_0\in A$，所以 $B\subseteq A$。综上可得 $A=B$。

8 ①空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，故①错；②真子集具有传递性，故②正确；③若一个集合是空集，则没有真子集，故③错；④由Venn图易知④正确。故选C。

9 因为集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，所以当满足 $A\subseteq C\subseteq B$ 时，集合 C 可以为 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3,4\}$，故集合 C 有4个。

10 因为 $x\subseteq A$，所以 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$，则集合 $A=\{0,1\}$ 是集合 B 中的元素，所以 $A\in B$。

【易错点拨】本题易错地方是：由于忽视集合 B 的元素形式的特殊性——以集合为元素，而错选B。判断集合之间的关系不能仅凭表面的理解，应当注意观察集合中元素之间的关系。集合之间一般为包含或相等关系，但有时也可能为属于关系。解题时要思考两个问题：(1)两个集合中的元素分别是什么；(2)两个集合中元素之间的关系是什么。

11 因为集合 P,T 中的自变量都从集合 M 中取得，所以集合 $P=\{y|-7\leqslant y\leqslant2a-3\}$，集合 T 中的最大值是 a，由 $T\subseteq P$，得 $2a-3\geqslant a$，则 $a\geqslant3$。

13 由题意知1,2为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}1+2=-b,\\1\times2=c,\end{cases}$ 解得 $b=-3$，$c=2$。

14 参加比赛的运动员包括男运动员和女运动员。

15 ①若 $a=3$，则 $a^2-3a-1=-1$，即 $M=\{1,2,3,-1\}$，显然 $N\subseteq M$，不合题意。②若 $a^2-3a-1=3$，即 $a=4$ 或 $a=-1$。当 $a=-1$ 时，$N\subseteq M$，舍去。当 $a=4$ 时，$M=\{1,2,4,3\}$，满足要求。

16 当 $m=0$ 时，显然 $A=\{x|2x+1\leqslant0\}=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}\neq\varnothing$；当 $m<0$ 时，$A=\{x|mx^2+2x+1\leqslant0\}\neq\varnothing$ 也显然成立；当 $m>0$ 时，由题意知二次函数的判别式 $\Delta=4-4m\geqslant0$，解得 $0<m\leqslant1$。综上，实数 m 的取值范围为 $m\leqslant1$。

17 因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$B=\{x|a\leqslant x<a+4\}$，$A\supseteq B$，所以 $a+4\leqslant-1$ 或 $a>5$，解得 $a\leqslant-5$ 或 $a>5$。

18 $A*B=\{1,2,3\}$，$2^3-2=6$。

19 由 $B\subseteq A$ 知，$m^2=4m-4$，即 $(m-2)^2=0$，所以 $m=2$。

20 M 中的元素为 $x=\dfrac{6m+1}{6}$，N 中的元素为 $x=\dfrac{3n-2}{6}$，P 中的元素为 $x=\dfrac{p+2}{6}$，N 中令 $n=2k+1$，得 $x=\dfrac{6k+1}{6}\in M$，所以 $M\subseteq N$。P 中令 $p=3k-1$，$x=\dfrac{3k+1}{6}=\dfrac{3(k+1)-2}{6}\in N$，所以 $N\subseteq P$。

21 由题意得 $A*B=\{2,3,4,5\}$。

22 【易错点拨】求解过程中容易忽略等号能否成立，得到 $a+3\leqslant-5$ 或 $a+1\geqslant4$，解得 $a\leqslant-8$ 或 $a\geqslant3$。事实上，在求出 $a\leqslant-8$ 或 $a\geqslant3$ 后也可以直接将端点值回代，看是否符合题意，进而进行适当取舍即可。当 $a=-8$ 时，不符合题意，舍去；当 $a=3$ 时，符合题意，故正确结果应为 $a<-8$ 或 $a\geqslant3$。

【防错良方】在求集合中参数的取值范围时，要特别注意该参数在取值范围的边界能否取等号，否则会导致解题结果错误。正确的做法就是把端点值代入原式，看是否符合题目要求。

24 【答题模板】探究性问题的解答

(1)假设符合条件的变量存在。

(2)在(1)的条件下，运用题设的条件和定理，公理，法则进行计算推证。

(3)对(2)得到的结果进行检验，得出题设结论。

第三节　集合的基本运算

课时1　并集与交集

➡ 正文P9

答案

1 C	2 D	3 B	4 C
5 D	6 D	7 B	8 A

9 $a\geqslant2$

10 因为 $A=\{-2,0,3\}$，$0\notin M$ 且 $M\cup N=A$，所以 $0\in N$。将 $y=0$ 代入方程 $y^2+2y-b=0$，求得 $b=0$。

由此可得 $N=\{y|y^2+2y=0\}=\{0,-2\}$。

因为 $3\notin N$ 且 $M\cup N=A$，所以 $3\in M$。

将 $x=3$ 代入方程 $x^2+(a+1)x-6=0$，求得 $a=-2$。此时 $M=\{x|x^2-x-6=0\}=\{-2,3\}$，满足 $M\cup N=A$，所以 $a=-2$，$b=0$。

11 (1)若 $a=3$，则 $A=\{x|0<x<6\}$，故 $A\cup B=\{x|x<-1$ 或 $x>0\}$。

(2)若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 $\begin{cases}a-3<-1,\\a+3>3,\end{cases}$ 解得 $\{a|0<a<2\}$。

12 假设存在实数 a，使 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$。若 $A=\varnothing$，则 $\Delta=(-2a)^2-4(4a-3)<0$，解得 $1<a<3$；若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=(-2\sqrt{2}a)^2-4(a^2+a+2)<0$，解得 $-1<a<2$。

所以 $\begin{cases}1<a<3,\\-1<a<2。\end{cases}$

解得 $1<a<2$。

故 a 的取值范围是 $1<a<2$。

13 C　**14** C　**15** C　**16** C　**17** C

18 A　**19** D　**20** B　**21** B　**22** A

23 $\{0\}$　**24** -4　**25** -1

26 $\{y|-4\leqslant y\leqslant 14\}$

27 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，所以 $\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\in B$。

将 $\frac{1}{2}$ 分别代入方程 $2x^2-px+q=0$ 及 $6x^2+(p+2)x+5+q=0$，联立，有：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p+q=0,\\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}(p+2)+5+q=0。\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}p=-7,\\q=-4。\end{cases}$

所以 $A=\{x|2x^2+7x-4=0\}=\left\{-4,\frac{1}{2}\right\}$，

$B=\{x|6x^2-5x+1=0\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$。

所以 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},-4\right\}$。

28 (1)因为 $A\cap B\neq\varnothing$，所以 $\begin{cases}2a\leqslant a+2,\\a+2\geqslant 4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a\leqslant a+2,\\2a\leqslant -1,\end{cases}$

即 $a=2$，或 $a\leqslant -\frac{1}{2}$。

(2)因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$。①$B=\varnothing$ 时，$2a>a+2$，所以 $a>2$。②$B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}2a\leqslant a+2,\\a+2\leqslant -1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a\leqslant a+2,\\2a\geqslant 4。\end{cases}$

所以 $a\leqslant -3$，或 $a=2$。

综合①②所述，$a\leqslant -3$，或 $a\geqslant 2$。

当 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=0,\\1-m+2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=0,\\4-2m+2=0,\end{cases}$ m 无解；

当 $B=\{1,2\}$ 时，$\begin{cases}1+2=m,\\1\times 2=2,\\\Delta=m^2-8>0,\end{cases}$ 解得 $m=3$。

综上所述，$m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$。

29 由 $A\cap B=B$ 得 $B\subseteq A$，而 $A=\{1,2\}$，对于方程 $x^2-mx+2=0$，$\Delta=m^2-8$。

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=m^2-8<0$，解得 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$；

当 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=0,\\1-m+2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=0,\\4-2m+2=0,\end{cases}$ m 无解；

当 $B=\{1,2\}$ 时，$\begin{cases}1+2=m,\\1\times 2=2,\\\Delta=m^2-8>0,\end{cases}$ 解得 $m=3$。

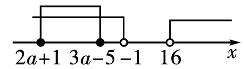
综上所述，$m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$。

30 因为 $A\subseteq(A\cap B)$，且 $(A\cap B)\subseteq A$，

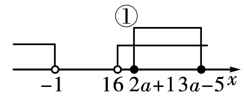
所以 $A\cap B=A$，即 $A\subseteq B$。

显然 $A=\varnothing$ 满足条件，此时 $a<6$。

若 $A\neq\varnothing$，如图①②所示，



①



②

第 30 题图

则 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\3a-5<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\2a+1>16。\end{cases}$

由 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\3a-5<-1\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$；

由 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a-5,\\2a+1>16\end{cases}$ 解得 $a>\frac{15}{2}$。

综上，满足条件 $A\subseteq(A\cap B)$ 的实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a<6，或 a>\frac{15}{2}\right\}$。

31 假设存在实数 a 使 A，B 满足条件，由题意得 $B=\{2,3\}$。

$\because A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$，

即 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$。

又 $A\neq B$，得 $A\subsetneqq B$。

又 $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$，$\therefore A\neq\varnothing$，

即 $A=\{2\}$ 或 $\{3\}$。

当 $A=\{2\}$ 时，代入方程得 $a^2-2a-15=0$。

即 $a=-3$ 或 $a=5$。

当 $a=-3$ 时，$A=\{2,-5\}$，与 $A=\{2\}$ 矛盾，舍去；

当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，与 $A=\{2\}$ 矛盾，舍去。

当 $A=\{3\}$ 时，代入方程得 $a^2-3a-10=0$，

即 $a=5$ 或 $a=-2$。

当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$，与 $A=\{3\}$ 矛盾，舍去；

当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，与 $A=\{3\}$ 矛盾，舍去。

综上所述，不存在实数 a 使 A，B 满足条件。

解析

1 因为集合 $B=\{x|-3<x\leqslant 2,x\in\mathbf{N}\}$，所以集合 $B=\{0,1,2\}$，因为集合 $A=\{-1,1,3\}$，所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$。

2 因为 $0<1$，$2>\sqrt{2}$，所以 $A\cup B=\{x|0<x<2\}$。

3 根据并集的定义可得集合 B 必须含有 5 和 6，故不可能满足条件的是选项 B。

4 依题意，可知满足 $M\cup N=\{0,1,2\}$ 的集合 N 有 $\{2\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$，共 4 个。故选 C。

5 由 $A\cup B=A$ 可得 $B\subseteq A$，所以 B 中元素可以为 -1，1 或没有元素，代入相应 x 值，可求得 m 的值为 1 或 -1 或 0。

6 ①若 B 不为空集，可得 $m+1<2m-1$，解得 $m>2$，因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$。因为 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x|m+1<x<2m-1\}$，所以 $m+1\geqslant -2$，且 $2m-1\leqslant 7$，解得 $-3\leqslant m\leqslant 4$。此时 $2<m\leqslant 4$。

②若 B 为空集，可得 $m+1\geqslant 2m-1$，解得 $m\leqslant 2$，符合题意。

综上，实数 m 的取值范围为 $\{m|m\leqslant 4\}$。

【易错点拨】①漏掉对 $B=\varnothing$ 的讨论，错误得到 C 答案，②忽

视 $m+1$ 与 $2m-1$ 的大小讨论，错选 B 答案，③对 $A\cup B=A$ 理解不透，没有导出 $B\subseteq A$，从而无从下手，蒙答案。

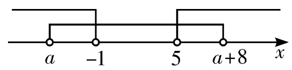
【答题模板】1. 理清两个集合包含关系。

2. 含参讨论具体集合性质，是否可以为空集，画数轴列出满足集合关系的不等式组。

3. 小结综合，写出最后答案。

7 因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$。因为 $A=\{0,1,2,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，所以 $x^2=0$ 或 $x^2=2$ 或 $x^2=x$，解得 $x=0$ 或$\sqrt{2}$或 $-\sqrt{2}$或 1。经检验，当 $x=\sqrt{2}$或 $-\sqrt{2}$时满足题意，故选 B。

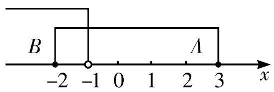
8 在数轴上表示集合 S,T 如图所示。因为 $S\cup T=\mathbf{R}$，由数轴可得$\begin{cases}a<-1\\a+8>5\end{cases}$，解得 $-3<a<-1$。故选 A。



第 8 题图

9 $A=\{x|x-a>0\}=\{x|x>a\}$，$B=\{x|2-x<0\}=\{x|x>2\}$，因为 $A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$，则 $a\geqslant 2$。

14 在数轴上表示出两个集合，如图所示，由图可知$A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$。

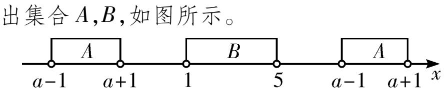


第 14 题图

15 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant 1\}$，$N=\{y|y=-x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\leqslant 1\}$，$M\cap N=\{y|y=1\}=\{1\}$。

16 联立$\begin{cases}y=3x^2,\\y=5x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{5}{3},\\y=\dfrac{25}{3},\end{cases}$因此 $M\cap N$ 中的元素个数为 2，故选 C。

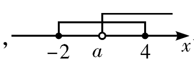
17 由$|x-a|<1$ 得 $-1<x-a<1$，即 $a-1<x<a+1$。在数轴上表示出集合 A,B，如图所示。



第 17 题图

由图可知 $a+1\leqslant 1$ 或 $a-1\geqslant 5$，所以 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 6$。

18 因为集合 $A=\{0,1,m\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，$A\cap B=\{1,m\}$，所以 $1,m\in B$，所以 $0<m<2$。又 $m\neq 1$，所以 m 的取值范围是$\{m|0<m<1$ 或 $1<m<2\}$。

19 将集合表示在数轴上，如图所示，要使 $A\cap B\neq\varnothing$，必须 $a<4$。

第 19 题图

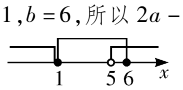
20 集合 M 必须含有元素 a_1,a_2，并且不能含有元素 a_3，故 $M=\{a_1,a_2\}$或 $M=\{a_1,a_2,a_4\}$。

21 由题意得，$B=\{0,3,6,9\}$，所以 $A\cap B=\{3\}$。

22 因为$(B\cap C)\subseteq C$，$A\cup B=B\cap C$，所以$(A\cup B)\subseteq C$，所以 $A\subseteq C$。故选 A。

23 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<3\}=\{-1,0,1,2\}$，$C=\{x|x^2+x=0\}=\{0,-1\}$。由 Venn 图可知，阴影部分表示的集合为 $A\cap B\cap C$。而 $A\cap B=\{0,1\}$，故 $A\cap B\cap C=\{0,1\}\cap\{0,-1\}=\{0\}$。

24 如图所示，可知 $a=1$，$b=6$，所以 $2a-b=-4$。



第 24 题图

25 因为 $A\cap B=\{-3\}$，所以 $-3\in B$，易知 $a^2+1\neq -3$。

①若 $a-3=-3$，则 $a=0$，此时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，则 $A\cap B=\{1,-3\}$，这与已知矛盾。

②若 $2a-1=-3$，则 $a=-1$，此时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，则 $A\cap B=\{-3\}$，符合题意。综上可知 $a=-1$。

26 由题可知集合 A,B 分别是二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2+2x+13$ 的函数值 y 的取值集合。

$A=\{y|y=(x-1)^2-4,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant -4\}$，$B=\{y|y=-(x-1)^2+14,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\leqslant 14\}$。因此，$A\cap B=\{y|-4\leqslant y\leqslant 14\}$。

【易错点拨】本题易错的地方是没有准确把握描述法的含义，而得到如下错解：

解方程组$\begin{cases}y=x^2-2x-3,\\y=-x^2+2x+13,\end{cases}$得$\begin{cases}x=4,\\y=5\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=5。\end{cases}$所以 $A\cap B=\{5\}$。

事实上，在用描述法表示的集合$\{x|x\in A\}$中，x 表示代表元素，$x\in A$ 表示元素的性质和特征。集合$\{(x,y)|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$表示由函数 $f(x)$ 图像上的全体点组成的集合，而本例$\{y|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$表示函数值 y 的取值集合，因此所求的 $A\cap B$ 实为求两个函数的函数值的取值集合的交集。

30 【易错点拨】①交集的基本性质，$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$ 及其等价关系，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$ 不能熟练运用，导致 $A\subseteq B$ 推不出来，不能进行正确运算。

②$A=\varnothing$容易忽视，而得错误结论 $a>\dfrac{15}{2}$。

课时 2　全集与补集

➡ 正文P12

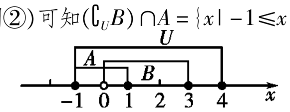
答案

1 B　2 A　3 B　4 C　5 D

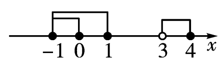
6 -3　7 $\{a|a\geqslant 2\}$　8 7　9 3

10 因为 $U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 3\}$，结合数轴（图①）可知$\complement_U A=\{x|1<x\leqslant 4\}$，$\complement_U B=\{x|3<x\leqslant 4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 0\}$。

结合数轴（图②）可知$(\complement_U B)\cap A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$。



①



②

第 10 题图

11 (1) $A\cap B=\{x|3<x\leqslant 5\}$。

因为 $A\cup B=\{x|2<x<8\}$，所以$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 8\}$。

(2) 当 $C=\varnothing$时，则有 $a-1\geqslant 2a$，得 $a\leqslant -1$；当$C\neq\varnothing$时，则有 $2a\leqslant 3$ 或 $a-1\geqslant 5$，且 $a-1<2a$，得 $-1<a\leqslant\dfrac{3}{2}$或$a\geqslant 6$。

综上，实数 a 的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,a\geqslant 6\text{ 或 }a\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$。

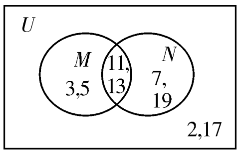
12 D　13 D　14 C　15 A　16 C

17 $\{m|m\geqslant 2\}$　18 ①④⑤

19 因为$(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，所以$2\in B$，$2\notin A$，$4\in A$，$4\notin B$，根据元素与集合的关系，可得$\begin{cases}4^2+4p+12=0,\\ 2^2-10+q=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=-7,\\ q=6。\end{cases}$所以$A=\{x|x^2-7x+12=0\}=\{3,4\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，经检验符合题意。

所以$A\cup B=\{2,3,4\}$。

20 方法一：$U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，如图，所以$M=\{3,5,11,13\}$，$N=\{7,11,13,19\}$。



第 20 题图

方法二：因为$M\cap(\complement_U N)=\{3,5\}$，

所以$3\in M$，$5\in M$且$3\notin N$，$5\notin N$。

又因为$(\complement_U M)\cap N=\{7,19\}$，

所以$7\in N$，$19\in N$且$7\notin M$，$19\notin M$。

又因为$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,17\}$，所以$\complement_U(M\cup N)=\{2,17\}$，所以$M=\{3,5,11,13\}$，$N=\{7,11,13,19\}$。

21 (1)设$x_0\in A$，则有$x_0^2+px_0+q=0$。

上式两端同除以x_0^2得$1+\frac{p}{x_0}+\frac{q}{x_0^2}=0$，则$\frac{1}{x_0}\in B$。

所以集合A、B中的元素互为倒数关系。

设$A=\{x_1,x_2\}$，$B=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\right\}$，

若$x_1=\frac{1}{x_2}$，则$x_2=\frac{1}{x_1}$，则$A=B$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$，不符合题意。

所以，由$A\cap B\neq\varnothing$，即一定有$x_0\in A$使得$\frac{1}{x_0}\in B$，且$x_0=\frac{1}{x_0}$，所以$x_0=\pm 1$。

又$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{-2\}$，所以$-2\in A$，

所以$A=\{1,-2\}$，或$A=\{-1,-2\}$。

由此得$B=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$，或$B=\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$。

(2)根据韦达定理：$\begin{cases}1+(-2)=-p,\\ 1\times(-2)=q;\end{cases}$

或$\begin{cases}-1+(-2)=-p,\\ -1\times(-2)=q。\end{cases}$解得$\begin{cases}p=1,\\ q=-2;\end{cases}$或$\begin{cases}p=3,\\ q=2。\end{cases}$

22 D

23 假设三个集合都是空集，即三个方程均无实根，则有$\begin{cases}\Delta_1=a^2-4<0,\\ \Delta_2=4+4a<0,\\ \Delta_3=4a^2-8<0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2<a<2,\\ a<-1,\\ -\sqrt{2}<a<\sqrt{2},\end{cases}$解得$-\sqrt{2}<a<-1$，

所以当$a\leqslant-\sqrt{2}$或$a\geqslant-1$时，三个方程中至少有一个方程有实根，即三个集合中至少有一个集合不是空集，所以a的取值范围为$\{a|a\leqslant-\sqrt{2}$或$a\geqslant-1\}$。

24 记$U=\{$该班学生$\}$，$A=\{$喜爱篮球运动的学生$\}$，$B=\{$喜爱乒乓球运动的学生$\}$，则$\mathrm{card}(U)=30$，$\mathrm{card}(A)=15$，$\mathrm{card}(B)=10$。

对两项运动都不喜欢的学生的集合为$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$。

因为$\mathrm{card}(\complement_U(A\cup B))=8$，所以$\mathrm{card}(A\cup B)=30-8=22$。

而$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，

所以$22=15+10-\mathrm{card}(A\cap B)$，所以$\mathrm{card}(A\cap B)=3$。

所以，喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的学生人数为$\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(A\cap B)=15-3=12$。

25 利用补集思想，至多只有一个元素的反面就是至少有两个元素，所以$a\neq 0$且$\Delta=4-4a>0$，所以$a<1$且$a\neq 0$，所以满足条件的$a\in\{a|a\geqslant 1$或$a=0\}$。

解析

1 依题意知$A\cap B=\{2,3\}$，所以$\complement_U(A\cap B)=\{1,4,5\}$。

2 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\geqslant 2\}$，则由$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，得$a\geqslant 2$，故选 A。

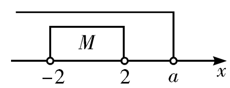
3 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2=x\}=\{0,1\}$，根据集合的补集的概念得$\complement_M N=\{-2,-1,2\}$。

4 因为$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1\}$，所以$A\cup B=\{-1,0,1\}$，$A\cap B=\{0\}$，故$\complement_{(A\cup B)}(A\cap B)=\{-1,1\}$。

5 因为$A\cup(\complement_U A)=U$，所以$|a-5|=3$，解得$a=2$或8。

6 因为$\complement_U A=\{1,2\}$，所以$A=\{0,3\}$，故$m=-3$。

7 $M=\{x\in\mathbf{R}|-2<x<2\}$，$\complement_{\mathbf{R}}P=\{x|x<a\}$。因为$M\subseteq\complement_{\mathbf{R}}P$，所以由数轴知$a\geqslant 2$。



第 7 题图

8 因为$U=\mathbf{R}$，$A=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，所以$\complement_U A=\{x|x<a$或$x>b\}$，又因为$\complement_U A=\{x|x<3$或$x>4\}$，所以$a=3$，$b=4$，$a+b=7$。

9 因为$U=M\cup N=\{3,4,5,7,8,9\}$，$M\cap N=\{4,7,9\}$，则$\complement_U(M\cap N)=\{3,5,8\}$，可知其中的元素有3个。

11 **【易错点拨】**(1)忽视$C=\varnothing$，而得错误结论。

(2)很多同学因未考虑$a-1$与$2a$的大小，而“凑巧”得到结论$a\geqslant 6$或$a\leqslant\frac{3}{2}$，但解题过程是不全面的，错误的。

【答题模板】(1)理清各集合的元素是什么及各集合之间的关系；

(2)用数轴上的点表示出各集合，求其交、并、补集；

(3)根据题目要求写出最后结果。

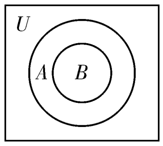
12 $\complement_U M=\{2,3,5,6\}$，$\complement_U N=\{1,4,5,6\}$，所以$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{5,6\}$，故选 D。

13 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，因为$\complement_U(\complement_U P)=P$，所以存在一个$\complement_U P$，即有一个相应的$P$(如当$\complement_U P=\{-2,1,3\}$时，$P=\{-3,-1,0,2\}$；当$\complement_U P=\{-2,1\}$时，$P=\{-3,-1,0,2,3\}$等)。由于$S$的子集共有 8 个，所以$P$也有 8 个，选 D。

14 由题意易得，$B\subsetneqq A$，画出如图所示的韦恩图，显然$U=A\cup(\complement_U B)$。

15 题图中阴影部分位于集合 B 内，且位于集合 A,C 的外部，故可表示为 $B\cap\complement_U(A\cup C)$。

16 设阴影部分表示的集合中的任一元素为 x，因为 $x\in A,x\notin B,x\notin C$，所以图中阴影部分表示的集合是 $A\cap[\complement_U(B\cup C)]$。



第 14 题图

17 因为 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，所以 $\complement_UA=\{x\mid x<-m\}$。又因为 $(\complement_UA)\cap B=\varnothing$，所以 $-m\leqslant -2$，即 $m\geqslant 2$。

18 由补集的定义可知，若 $x\in A$，则 $x\notin\complement_UA$，所以①正确；若 $x\in U$，则②正确；若 $x\notin U$，则②不正确；因为集合 A 与其补集 $\complement_UA$ 没有共同的元素，所以 $A\cap(\complement_UA)=\varnothing$，所以③错误，⑤正确；集合 A 与其补集 $\complement_UA$ 都是全集 U 的子集，所以④正确。综上所述，正确的说法是①④⑤。

20 【易错点拨】方法二给出了推证过程，但头绪较多，极易出现推证不全而造成混淆，从而得出错误结论，方法一则直观清楚，该题选择解法很重要。

【答题模板】1. 记清各集合的元素及各集合之间的关系。

2. 当元素是离散、可数时，采用韦恩图标示出各元素的位置。

3. 根据题意写出最后结果。

22 由 $M-P=\{x\mid x\in M$，且 $x\notin P\}\Leftrightarrow M-P=M\cap(\complement_UP)$（$U$ 为全集），则 $M-(M-P)=M-[M\cap(\complement_UP)]=M\cap[\complement_U(M\cap\complement_UP)]=M\cap[(\complement_UM)\cup\complement_U(\complement_UP)]=M\cap[(\complement_UM)\cup P]=(M\cap\complement_UM)\cup(M\cap P)=\varnothing\cup(M\cap P)=M\cap P$。

23 【答题模板】1. 条件不变的前提下，找出结论的反面，即写出原命题的否定。

2. 求出满足结论反面的参变量的范围。

3. 根据补集思想写出满足原命题的解。

24 【易错点拨】(1) 不能很好利用集合原理找到解题途径。

(2) 用集合表示出各类学生之后，不能很好利用容斥原理 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$ 或韦恩图表示出各集合之间的关系，导致错误。

单元综合

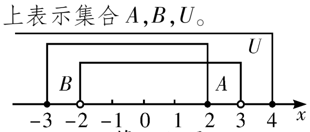
第一章　专题　突破专练

➡ 正文 P14

答案

1 A　　**2** $\{(2,3)\}$

3 如图，在数轴上表示集合 A,B,U。



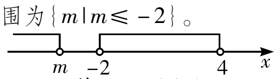
第 3 题图

因为 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $\complement_UA=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，$\complement_UB=\{x\mid x<-3$，或 $2<x\leqslant 4\}$。

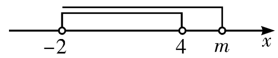
所以 $A\cap B=\{x\mid -2<x\leqslant 2\}$，$(\complement_UA)\cup B=\{x\mid x\leqslant 2$，或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，$A\cap(\complement_UB)=\{x\mid 2<x<3\}$。

4 (1) ①由数轴（如图(1)）知，若 $A\cap B=\varnothing$，只有 $m\leqslant -2$，故 m 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant -2\}$。



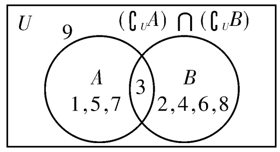
第 4 题图(1)

②由数轴（如图(2)）知，若 $A\subsetneqq B$，只有 $m\geqslant 4$，故 m 的取值范围为 $\{m\mid m\geqslant 4\}$。



第 4 题图(2)

(2) 根据题意，画出 Venn 图如图(3)所示。



第 4 题图(3)

由图可知 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,4,6,8\}$。

5 C　　**6** C　　**7** 2

8 (1) 当 $a=0$ 时，$3x+1=0$，满足条件；当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=9-4a=0$，$a=\dfrac{9}{4}$。所以满足条件的实数 a 的值为 0 或 $\dfrac{9}{4}$。

(2) 若 A 中只有一个元素，则实数 a 的值为 0 或 $\dfrac{9}{4}$；若 $A=\varnothing$，$9-4a<0$，解得 $a>\dfrac{9}{4}$。所以满足条件的实数 a 的取值范围为 $a=0$ 或 $a\geqslant\dfrac{9}{4}$。

9 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$，故集合 $A=\{1,2\}$。

(1) 因为 $A\cap B=\{2\}$，所以 $2\in B$，代入 B 中的方程，得 $a^2+4a+3=0$，所以 $a=-1$ 或 $a=-3$。当 $a=-1$ 时，$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2,2\}$，满足条件。当 $a=-3$ 时，$B=\{x\mid x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，满足条件。综上，$a$ 的值为 -1 或 -3。

(2) 对于集合 B，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=8(a+3)$，因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，①当 $\Delta<0$，即 $a<-3$ 时，$B=\varnothing$ 满足条件；②当 $\Delta=0$，即 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$ 满足条件；③当 $\Delta>0$，即 $a>-3$ 时，$B=A=\{1,2\}$ 才能满足条件，则由根与系数的关系得 $\begin{cases}1+2=-2(a+1),\\1\times 2=a^2-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2},\\a^2=7,\end{cases}$ 矛盾。综上，a 的取值范围是 $a\leqslant -3$。

10 D　　**11** B　　**12** B　　**13** D　　**14** C

15 C　　**16** B

17 因为 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{y\mid y\geqslant 0\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，$A\cap B=\{x\mid 0<x<2\}$，所以 $A\otimes B=\{x\mid x=0$ 或 $x\geqslant 2\}$。

18 (1) $C\times D=\{(a,1),(a,2),(a,3)\}$。

(2) 因为 $A\times B=\{(1,2),(2,2)\}$，所以 $A=\{1,2\}$，$B=\{2\}$。

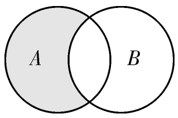
(3) 由题意可知 $A\times B$ 中元素的个数与集合 A 和 B 中的元素个数有关，即集合 A 中的任何一个元素与 B 中的任何一个元素对应后，得到 $A\times B$ 中的一个新元素。

若 A 中有 m 个元素，B 中有 n 个元素，则 $A\times B$ 中应有 $m\times n$ 个元素。于是，若集合 A 中有 3 个元素，集合 B 中有 4 个元素，则 $A\times B$ 中有 12 个元素。

解析

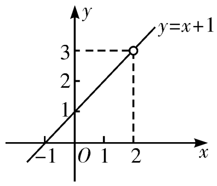
1 如图所示，$A-B$ 表示图中阴影部分，故集合 $C-(A-B)$ 所

含元素属于 C,但不属于图中阴影部分,故选 A。



第 1 题图

2 方法一　$M=\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=1\}=\{(x,y)\mid y=x+1,且x\neq2\}$,如图,集合 U 表示坐标平面内的所有点,M 表示直线 $y=x+1$ 上除去 $(2,3)$ 的所有点,而 N 表示坐标平面内除去直线 $y=x+1$ 以外的所有点,从而 $M\cup N$ 表示坐标平面内除 $(2,3)$ 外的所有点。所以 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\{(2,3)\}$。



第 2 题图

方法二　因为 $M=\{(x,y)\mid y=x+1,且\ x\neq2\}$。

所以 $\complement_U M=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}\cup\{(2,3)\}$。

又 $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$,

所以 $\complement_U N=\{(x,y)\mid y=x+1\}$。

所以 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{(2,3)\}$。

3 【名师点评】在数轴上表示 $\{x\mid-2<x<3\}$ 时,不等号中不含"=",因此在 $-2,3$ 处都应该是空心点;在数轴上表示 $\{x\mid-3\leqslant x\leqslant2\}$ 时,不等号中含"=",因此在 $-3,2$ 处都应该是实心点。

4 【答题模板】数形结合解题的基本步骤:

第一步:画图形,根据题设条件给出的几何意义,画出与集合对应的几何图形或函数图像。

第二步:定区域,利用数轴、Venn 图或直角坐标系中的函数图像确定集合运算所表示的平面区域。

第三步:求结果,根据图形确定相关运算的结果或区域所表示的几何图形的面积。

5 因为 $A\cap B=\{4\}$,所以 $4\in B$,所以 4 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的根,所以 $16-16+m=0$,解得 $m=0$,则方程为 $x^2-4x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=4$,所以 $B=\{0,4\}$。

6 集合 A 有且仅有 2 个子集,则集合 A 中有且仅有 1 个元素,即使得 $ax^2+2x+1=0$ 成立的 x 值只有 1 个,当 $a=0$ 时,$x=-\frac{1}{2}$,满足题意,当 $a\neq0$ 时,$\Delta=4-4a=0$,$a=1$。综上,$a=0$ 或 $a=1$。

【易错点拨】此题是集合的关系和二次方程的根的综合问题,解决本题的关键是转化子集问题为二次方程的根的个数的讨论问题。

7 解 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=\frac{1}{2}x+2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 代入 $y=3x+b$,得 $b=2$。

8 【易错点拨】集合的属性是一个关于 x 的方程,且二次项的系数是字母,故 A 中只有一个元素时,要考虑二次项系数为 0 的情况,此题应分为两类求解,即分 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况求解相应的 a 的值;A 中至多有一个元素,则 A 中只有一个元素或没有元素,可分为两类求解,由(1)中 A 中只有一个元素时的参数的取值范围,再求出 A 为空集时参数的取值范围,取并集,即可求得实数 a 的取值范围。

10 $A*B=\{1,7\}$,$A*B$ 的子集个数为 $2^2=4$。

11 由题意 $A=\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$,$B=\{1,\sqrt{2}\}$,则 $A\otimes B$ 有 $(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)=1$,$(\sqrt{2}+\sqrt{2})\times(\sqrt{2}-\sqrt{2})=0$,$(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)=2$,$(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ 四种结果,则由集合中元素的互异性可知,集合 $A\otimes B$ 中有 3 个元素,故集合 $A\otimes B$ 的真子集个数为 $2^3-1=7$,故选 B。

12 当 $a=0$ 时,$b=3$ 或 4 或 5,则 $c=3$ 或 4 或 5,共 3 个值;当 $a=1$ 时,$b=3$ 或 4 或 5,则 $c=4$ 或 5 或 6,共 3 个值;当 $a=2$ 时,$b=3$ 或 4 或 5,则 $c=5$ 或 6 或 7,共 3 个值。所以 $A\oplus B=\{3,4,5,6,7\}$,则集合 $A\oplus B$ 的真子集个数为 $2^5-1=31$。

13 由题意得 $P+P=\{2,3,4\}$,$(P+P)\div P=\{2,3,4\}\div\{1,2\}=\{1,\frac{3}{2},2,3,4\}$,所以集合 $(P+P)\div P$ 的所有元素之和为 $1+\frac{3}{2}+2+3+4=\frac{23}{2}$。故选 D。

14 由题意得 $\begin{cases}a,b\ 为正奇数,\\a+b=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a,b\ 不全为正奇数,\\ab=16,\end{cases}$

则 $\begin{cases}a=1,\\b=15,\end{cases}\begin{cases}a=3,\\b=13,\end{cases}\cdots\begin{cases}a=15,\\b=1,\end{cases}\begin{cases}a=1,\\b=16,\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=8,\end{cases}\begin{cases}a=4,\\b=4,\end{cases}\begin{cases}a=8,\\b=2,\end{cases}\begin{cases}a=16,\\b=1,\end{cases}$ 共 13 组,所以真子集的个数是 $2^{13}-1$。

【易错点拨】集合的子集个数与集合元素的个数相关,当集合中有 n 个元素时,其子集个数为 2^n 个,其真子集个数为 (2^n-1) 个,其非空真子集个数为 (2^n-2) 个。

15 方法一　由已知可得 $\begin{cases}m\geqslant0,\\m+\frac{3}{4}\leqslant1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}n-\frac{1}{3}\geqslant0,\\n\leqslant1,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{4}$,$\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant1$。

取 $m=0,n=1$,或 $m=\frac{1}{4},n=\frac{1}{3}$ 时,$M=\{x\mid0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\}$,$N=\{x\mid\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1\}$ 或 $M=\{x\mid\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant1\}$,$N=\{x\mid0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$,所以 $M\cap N=\{x\mid\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\}$ 或 $M\cap N=\{x\mid\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$,此时集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值为 $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$。

方法二　集合 M 的"长度"为 $\frac{3}{4}$,集合 N 的"长度"为 $\frac{1}{3}$。

由于 M,N 都是集合 $\{x\mid0\leqslant x\leqslant1\}$ 的子集,

又 $\{x\mid0\leqslant x\leqslant1\}$ 的"长度"为 1,

所以集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值是 $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)-1=\frac{1}{12}$。

16 由 $P(A)$ 的定义可知①正确,④正确,设 $n(A)=n$,则 $n[P(A)]=2^n$,所以②不正确;若 $A\cap B=\varnothing$,则 $P(A)\cap P(B)=\{\varnothing\}$,③不正确;$n(A)-n(B)=1$,即 A 中元素比 B 中元素多一个,则 $n[P(A)]=2\times n[P(B)]$,⑤正确。

【易错点拨】本题考查集合的概念与性质、新定义问题，属于难题。新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的，遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求"照章办事"，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决。本题利用定义集合 A 的幂集达到考查集合性质的目的。

17 【易错点拨】理解题意，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的。

18 【练后反思】求解集合中的新定义问题，主要抓住两点：(1)紧扣新定义——首先分析新定义的特点，把新定义所叙述的问题的本质弄清楚，并能够应用到具体的解题过程之中，这是破解新定义型集合问题的关键所在；(2)用好集合的性质——集合的性质是破解新定义型集合问题的基础，也是突破口，在解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素，在关键处用好集合的性质。

第一章 真题 分类专练

正文P16

答案

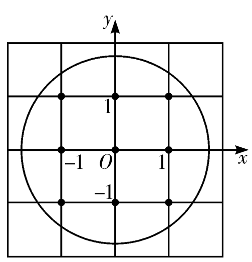
1 D	2 A	3 B	4 C	5 A
6 C	7 B	8 A	9 C	10 A
11 D	12 C	13 D	14 A	15 D
16 B	17 $\{1,8\}$	18 C	19 B	20 B
21 C	22 1			

解析

1 若 $(2,1)\in A$，则 $\begin{cases}2a+1>4,\\2-a\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{3}{2}$，所以当且仅当 $a\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$(2,1)\notin A$，故选 D。

2 解法一　由 $x^2+y^2\leqslant 3$ 知，$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$。又 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$，所以 A 中元素的个数为 $C_3^1C_3^1=9$，故选 A。

解法二　根据集合 A 的元素特征及圆的方程在坐标系中作出图形，如图，易知在圆 $x^2+y^2=3$ 中有 9 个整点，即为集合 A 的元素个数，故选 A。



第 2 题图

3 A 表示圆 $x^2+y^2=1$ 上的点的集合，B 表示直线 $y=x$ 上的点的集合，直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有两个交点，所以 $A\cap B$ 中元素的个数为 2。

4 由集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，易知 $A\cap\mathbf{Z}=\{-2,-1,0,1,2\}$，故选 C。

5 根据集合的并集的定义，得 $P\cup Q=(-1,2)$。

6 由已知可得 $B=\{x|(x+1)(x-2)<0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|-1<x<2,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$，故选 C。

【易错点拨】容易遗忘集合 B 中代表元素 x 的限制条件"$x\in\mathbf{Z}$"。

7 由于 $Q=\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$，$\complement_{\mathbf{R}}Q=\{x|-2<x<2\}$，故 $P\cup(\complement_{\mathbf{R}}Q)=\{x|-2<x\leqslant 3\}$。选 B。

【易错点拨】求集合的补集时，要注意端点值能否取到。

8 $A=\{x||x|<2\}=(-2,2)$，$B=\{-2,0,1,2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$，故选 A。

9 由题意知，$A=\{x|x\geqslant 1\}$，则 $A\cap B=\{1,2\}$。

10 由集合交集的定义可得 $A\cap B=\{x|-2<x<-1\}$，故选 A。

11 由题意得 $B=\{1,4,7,10\}$，所以 $A\cap B=\{1,4\}$。

12 因为 $A=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$。故选 C。

13 解法一　由题意得 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|x>\frac{3}{2}\}$，则 $A\cap B=(\frac{3}{2},3)$。选 D。

解法二　取 $x=2$，则 $2\in A$，$2\in B$，所以 $2\in A\cap B$，排除 A、B、C，选 D。

14 因为集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|x<0\}$，所以 $A\cap B=\{x|x<0\}$，$A\cup B=\{x|x<1\}$。故选 A。

【方法技巧】求解集合的基本运算问题的方法

(1)直接法：离散数集的运算借助韦恩图，连续数集的运算借助数轴；

(2)间接法：根据集合的定义进行取值验证即可。

15 集合 $S=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$，结合数轴，可得 $S\cap T=(0,2]\cup[3,+\infty)$。

16 $A\cup B=\{1,2,4,6\}$，$(A\cup B)\cap C=\{1,2,4\}$，选项 B 符合。

17 由集合的交集运算可得 $A\cap B=\{1,8\}$。

18 因为 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，所以 $\complement_U A=\{2,4,5\}$。故选 C。

19 解法一　$A=\{x|(x-2)(x+1)>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，故选 B。

解法二　因为 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，故选 B。

20 因为 $B=\{x|x\geqslant 1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<1\}$，因为 $A=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|0<x<1\}$，故选 B。

21 因为 $A\cap B=\{1\}$，所以 $1\in B$，所以 1 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的根，所以 $1-4+m=0$，$m=3$，方程 $x^2-4x+3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$，所以 $B=\{1,3\}$，选 C。

22 因为 $a^2+3\geqslant 3$，所以由 $A\cap B=\{1\}$ 得 $a=1$，即实数 a 的值为 1。

【易错点拨】在解决含参数的集合问题时,要注意检验集合中元素的互异性,否则很可能会因为不满足"互异性"而导致解题错误。

第一章 单元测试卷

正文 P17

答案

1 C　2 D　3 C　4 C　5 C

6 D　7 A　8 A　9 B　10 A

11 D　12 C

13 1　14 $B\cap \complement_U(A\cup C)$

15 $\{-\sqrt{3}\}$ 或 $\{\sqrt{3}\}$ 或 $\{3\}$　16 -3

17 (1) 因为 $A\cap B=\{2\}$,所以 $2\in A$,即 $10+2a=0$,$a=-5$,从而 $A=\{x|2x^2-5x+2=0\}=\{2,\frac{1}{2}\}$,$B=\{x|x^2+3x-10=0\}=\{2,-5\}$。

(2) 由(1)知 $U=A\cup B=\{\frac{1}{2},2,-5\}$,所以 $\complement_UA=\{-5\}$,$\complement_UB=\{\frac{1}{2}\}$,所以 $(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=\{\frac{1}{2},-5\}$,其子集为 $\varnothing$,$\{\frac{1}{2}\}$,$\{-5\}$,$\{\frac{1}{2},-5\}$。

18 假设存在实数 x,使 $B\subseteq A$,则 $x+2=3$ 或 $x+2=x^2$。

(1) 当 $x+2=3$ 时,$x=1$,此时 $A=\{1,3,1\}$,不满足集合元素的互异性。故 $x\neq1$。

(2) 当 $x+2=x^2$ 时,即 $x^2-x-2=0$,故 $x=-1$ 或 $x=2$。

①当 $x=-1$ 时,$A=\{1,3,1\}$,与集合元素的互异性矛盾,故 $x\neq-1$。

②当 $x=2$ 时,$A=\{1,3,4\}$,$B=\{4,1\}$,显然有 $B\subseteq A$。

综上所述,存在 $x=2$,使 $A=\{1,3,4\}$,$B=\{4,1\}$ 满足 $B\subseteq A$。

19 (1) $A\cap M=\{x|-3<x<5\}$。

(2) $\complement_UM=\{x|x<-4$ 或 $x\geqslant5\}$,又 $B=\{x|b-3<x<b+7\}$,$B\cup(\complement_UM)=\mathbf{R}$,所以 $\begin{cases}b-3<-4,\\b+7\geqslant5,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant b<-1$,所以 b 的取值范围是 $-2\leqslant b<-1$。

20 (1) 因为 $A\cap B=\{x|4<x<6\}$,所以 $\complement_U(A\cap B)=\{x|x\leqslant4$ 或 $x\geqslant6\}$。

(2) 因为 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$,所以 $A-B=\{x|x\geqslant6\}$,所以 $A-(A-B)=\{x|4<x<6\}$。

21 因为集合 A 中只有一个元素,所以方程 $kx^2-8x+16=0$ 只有一个实数根或有两个相等的实数根。

①当 $k=0$ 时,方程 $-8x+16=0$ 只有一个实数根 2,此时 $A=\{2\}$。

②当 $k\neq0$ 时,由 $\Delta=(-8)^2-64k=0$,得 $k=1$,此时 $A=\{x|x^2-8x+16=0\}=\{4\}$。综上可知,$k=0$,$A=\{2\}$ 或 $k=1$,$A=\{4\}$。

22 因为 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $A\neq\varnothing$,即方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 有实数根,所以 $\Delta=(-4a)^2-4(2a+6)\geqslant0$,即 $(a+1)\cdot(2a-3)\geqslant0$,所以 $\begin{cases}a+1\geqslant0,\\2a-3\geqslant0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+1\leqslant0,\\2a-3\leqslant0,\end{cases}$

解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 或 $a\leqslant-1$。①

又因为 $B=\{x|x<0\}$,所以方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 至少有一个负实数根。

若方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 没有负实数根,则需满足 $\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\x_1+x_2=4a\geqslant0,\\x_1\cdot x_2=2a+6\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$。②

由①②得 $a\leqslant-1$。即当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时,a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant-1\}$。

解析

9 由 $A=\complement_UB$ 得 $\complement_UA=B$,又 $B=\complement_UC$,所以 $\complement_UA=\complement_UC$,即 $A=C$。

10 列举得集合 $M=\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$ 共 10 个。

13 $a+2=3$ 或 $a^2+4=3$(无解),所以 $a=1$。

15 $B\cup\complement_UB=A$ 得 $A=U$,所以 $B\subseteq A$。

(1) 当 $x^2=3$ 时,$x=\pm\sqrt{3}$,$B=\{1,3\}$,$\complement_UB=\{\sqrt{3}\}$ 或 $\{-\sqrt{3}\}$;

(2) 当 $x^2=x$ 时,$x=0$ 或 1,若 $x=0$,$B=\{0,1\}$,$\complement_UB=\{3\}$,若 $x=1$,不满足元素的互异性,舍去。

16 $\complement_UA=\{1,2\}$,所以 $A=\{0,3\}$,故 $m=-3$。

第二章 函数

第一节 生活中的变量关系

正文P19

答案

1 A　2 A　3 D　4 C　5 C

6 A　7 D　8 D　9 C　10 C

11 A　12 B　13 B

14 增加　函数

15 (1) 入学儿童人数　年份　年份　入学儿童人数

(2) 小

17 半径 r　体积 V　$V=\frac{1}{3}\pi hr^2$

18 函数　六、日　19 $s=600-58t$

20 (1) 反映了苹果的销售量与售价之间的关系。销售量是自变量,售价是因变量。

(2) 售价 y 随销售量 x 的增大而增大。

(3) 由题表可设 $y=kx+b(k\neq0)$,

将 $\begin{cases}x=1,\\y=2.1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\y=4.2\end{cases}$ 代入得 $\begin{cases}k=2.1,\\b=0。\end{cases}$

所以 $y=2.1x$,当 $x=15$ 时,$y=31.5$。

解析

1 积雪层对越冬作物具有防冻保暖的作用，大雪既可防止土壤中的热量向外散发，又可阻止外界冷空气的侵入，具有增肥田地的作用，因此来年的丰收与下雪具有依赖关系，但不是函数关系。

2 儿童的年龄与智力有关系但没有函数关系。

3 人的体重和身高的关系不是确定的。

4 火车匀速行驶，故 $s=v\cdot t$。

5 100 米短跑中，起跑后速度有较快的提高，随后进入途中跑阶段、冲刺阶段，速度仍有提高，但提高幅度明显下降，并一直持续到达到终点，随后速度则较快地降下来。所以选 C。

6 虽然小麦总产量 y kg 与每平方米施肥量 x kg 之间存在依赖关系，但小麦总产量 y kg 还受气候、管理等其他因素的影响，所以 x,y 之间无函数关系。

7 当 y 取一个正值时，有两个 x 与之对应，故 D 错。

8 A、B、C 中都存在一个 x 变量对应两个 y 值。

9 注意到汽艇绕小岛两周时，它与码头的距离的变化应为半圆形状。

10 这天的最高温度与最低温度相差 $36-22=14$(℃)，故 C 错。

11 开始时，流入的水多于流出的水，所以蓄水量逐渐增加，当水位达到 135 米时，流入和流出的相等，所以蓄水量保持不变，符合条件的只有 A。

12 当注满烧杯后，水槽中才有水，所以开始一段时间后，h 才逐渐增大，故排除 C、D。开始一段时间，高度 h 的平均变化量要大于这段时间后高度 h 的平均变化量，故排除 A。

13 圆柱钢锭的体积不随高的变化而变化。

14 公司收入与产品数量之间的关系符合函数关系。

18 每一天都有唯一确定的营业额与之对应，故为函数关系；从表中可直接看出营业额情况。

19 已知 s 表示火车离库尔勒的距离，t 表示火车从乌鲁木齐出发行驶的时间。火车速度已知，所以 $s=$ 总路程 $-$ 火车从乌鲁木齐出发行驶的路程。故应填 $s=600-58t$。

第二节　对函数的进一步认识

课时 1　函数的概念

➡ 正文P21

答案

1 C	2 B	3 C	4 A	5 B
6 D	7 A	8 B	9 D	10 B
11 B	12 C			

13 ④

14 (1)$[1,+\infty)$　(2)$(2,4]$　(3)$(-1,2)\cup(2,+\infty)$

15 $(1,+\infty)$　16 6

17 (1)因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 1\}$，而 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$。所以函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 不相同。

(2)因为 $f(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 不相同。

(3)因为函数 $f(n)$ 与函数 $g(n)$ 的对应关系不同，所以两个函数不相同。

(4)因为函数 $f(x)$ 与函数 $g(t)$ 的定义域及对应关系均相同，所以两个函数相同。

18 (1)$f(2)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$，$g(2)=2^2+2=6$。

(2)$g(f(2))=g\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{19}{9}$，$f(g(x))=\frac{1}{1+g(x)}=\frac{1}{1+x^2+2}=\frac{1}{x^2+3}$。

(3)由(2)及已知可得 $\frac{1}{f(g(x))}=x^2+3=4$，即 $x^2=1$，解得 $x=\pm 1$。

19 (1)由已知 $a-1=-a$，得 $2a=1$，$a=\frac{1}{2}$。

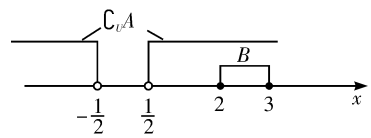
此时区间为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。

(2)由已知 $2a-1=3$，得 $2a=4$，$a=2$。

此时区间为 $[2,3]$。

(3)因为 $\complement_U A=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，

所以 $(\complement_U A)\cap B=[2,3]$。如图所示。



第 19 题图

解析

1 由函数的定义可知，函数的定义域和值域为非空的数集。

2 函数需满足对于每一个自变量 x 都有唯一的 y 值与之对应，因此(1)(3)(4)是函数图像。

3 根据函数的定义“对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应”。A 项，当 $x=0$ 时，B 中没有元素和它对应；B 项，当 $x=1$ 时，B 中没有元素和它对应；D 项，当 $x<0$ 时，B 中没有元素和它对应。

4 由①得，$y=2\,015-x$；由②得，$y=2\,015-x^2$。显然①②两式中对于任意一个自变量 x，都有唯一的 y 值与之对应，所以两者之间是函数关系；③中，若 $x=2\,014$，则 y 有两个值 $1,-1$ 与之对应，不符合函数的概念；④中，若 $x=\sqrt{2\,014}$，则 y 有两个值 $1,-1$ 与之对应，也不符合函数的概念。综上，①②可以表示 y 是 x 的函数。故选 A。

5 ①③正确。②不对，如 $f(x)=x^2$，当 $x=\pm 1$ 时，$y=1$；④不对，$f(x)$ 不一定可以用一个具体的式子表示出来。

6 根据函数的概念，对于定义域中的任意一个自变量 x 都有唯一的函数值与之对应，故选 D。

7 A 中两函数定义域相同，对应关系相同，所以是同一函数；B 中对应关系不同；C 中定义域不同；D 中定义域不同。

8 A 项中，当 $0<x\leqslant 2$ 时，每一个 x 都没有 y 与它对应，故不是函数 $f(x)$ 的图像；B 项中，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，每一个 x 都有唯一的 y 值与它对应，故它是函数的图像且是 $f(x)$ 的图像；C

项中，当 $-2\leqslant x<2$ 时，每一个 x 都有两个不同的 y 值与它对应，故它不是函数的图像；D 项中，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，每一个 x 都有唯一的 y 值与它对应，故它是某个函数的图像，但函数的值域不是 $N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，故它是某个函数的图像但不是 $f(x)$ 的图像。

9 因为 $[6.5]=7$，所以 $f(6.5)=1.06\times(0.5\times 7+1)=4.77$。

10 $g(x+2)=f(x)=2x+3=2(x+2)-1$，所以 $g(x)=2x-1$。

11 $f(a)-f(-a)=a^2-3a+1-[(-a)^2-3(-a)+1]=-6a$。

12 $2a-1<a$ 得 $a<1$。

15 当 $x>1$ 时，$\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$。

16 由 $f(a-2)=6$，$a\in\mathbf{R}$ 知 $f(x)=6$，为常数函数。

19 【易错点拨】区间本质上是集合的一种表示形式，亦可以进行集合的交、并、补运算。应用时以下几种表示容易混淆，区间 $(2,3)$，$[2,3]$，集合 $\{2,3\}$，$\{(2,3)\}$，点 $(2,3)$，务必要读懂题意。

课时 2 函数的表示方法

➡ 正文P23

答案

1 D　　2 B　　3 D　　4 1　2

5 列表法表示如下：

x	0	1	2	3	4	5
y	50	40	30	20	10	0

6 B　　7 C　　8 B　　9 B

10 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

11 (1) 定义域为 $\{m|-3\leqslant m\leqslant 0$ 或 $1\leqslant m\leqslant 4\}$。
(2) 值域为 $\{p|-2\leqslant p\leqslant 2\}$。

12 C　　13 B　　14 C　　15 A

16 C　　17 A　　18 $F(x)=3x+\dfrac{5}{x}$

19 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$，$-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$

20 由 $f(x)=x^2+4x+3$，$f(ax+b)=x^2+10x+24$，得 $(ax+b)^2+4(ax+b)+3=x^2+10x+24$，即 $a^2x^2+2abx+b^2+4ax+4b+3=x^2+10x+24$，比较系数得 $\begin{cases}a^2=1,\\ 2ab+4a=10,\\ b^2+4b+3=24,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=3,\end{cases}$ 则 $5a-b=2$。

21 (1) 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，
则 $2f(x+3)-f(x-2)$
$=2[a(x+3)+b]-[a(x-2)+b]$
$=2ax+6a+2b-ax+2a-b$
$=ax+8a+b$
$=2x+21$，
所以 $a=2$，$8a+b=21$，
所以 $b=5$，
所以 $f(x)=2x+5$。

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$。
由 $f(0)=1$，得 $c=1$。
又 $f(x-1)-f(x)=4x$，所以 $a(x-1)^2+b(x-1)+c-(ax^2+bx+c)=4x$，整理，得 $-2ax+a-b=4x$，解得 $a=-2$，$b=-2$，
所以 $f(x)=-2x^2-2x+1$。

(3) 因为 $g(x)$ 为一次函数，且一次项系数大于 0，所以设 $g(x)=ax+b(a>0)$。
因为 $f(x)=x^2$，$f(g(x))=4x^2-20x+25$，所以 $(ax+b)^2=4x^2-20x+25$，即 $a^2x^2+2abx+b^2=4x^2-20x+25(a>0)$，解得 $a=2$，$b=-5$，所以 $g(x)=2x-5$。

(4) $3f(x)+2f(-x)=4x$，①
用 $-x$ 代换 x，得 $3f(-x)+2f(x)=-4x$，②
①$\times 3-$②$\times 2$，得 $5f(x)=20x$，所以 $f(x)=4x$。

解析

1 因为 $2\,015\in[2\,015,+\infty)$，所以对应的函数值 y 为 2。

2 由题意得 $f(1)=4$，所以 $f[f(1)]=f(4)=2$。

3 函数值只有 $-1,0,1$ 三个数值，故值域为 $\{-1,0,1\}$。

4 因为 $g(1)=3$，所以 $f[g(1)]=f(3)=1$。
同理，依题表，得 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 的各值如表，故满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值为 2。

x	$f[g(x)]$	$g[f(x)]$
1	1	3
2	3	1
3	1	3

【易错点拨】求解此类问题时，要对照表格中的对应关系逐步求值。对于列表法的考查一方面要会用给出的表格，另一方面还要会依条件列表，本题容易对复合符号 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 理解不透造成错解：其实 $g(1)=3$，$g(2)=2$，$g(3)=1$，$f[g(1)]=f(3)=1$。即 $f[g(a)]$ 是函数 $y=f(x)$ 中，当 $x=g(a)$ 的时候的一个函数值。

6 由题意得 $g(2)=1$，$f[g(2)]=f(1)=2$，故选 B。

7 函数 $f(x)=|x|\operatorname{sgn}x=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ 故函数 $f(x)=|x|\operatorname{sgn}x$ 的图像为 $y=x$ 所在的直线，故选 C。

8 坐出租车时，速度较快，遇到堵车之后步行，速度较慢，所以离学校的距离开始减小得较快，后来减小得比较慢，故选 B。

9 由题意可知，在 0 到 3 点这段时间，每小时进水量为 2，即 2 个进水口同时进水且不出水，所以①正确；从丙图可知 3 点到 4 点水量减少了 1，所以应该是有一个进水口进水，同时出水口出水，故②错；当两个进水口同时进水，出水口也同时出水时，水量保持不变，也可由题干中的“至少打开一个水口”知③错。

10 由题图可知，图像是由两条线段组成的，当 $-1\leqslant x<0$ 时，设 $f(x)=ax+b$，将 $(-1,0)$，$(0,1)$ 代入解析式，得 $\begin{cases}-a+b=0,\\ b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1。\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，设 $f(x)=kx$，将 $(1,-1)$ 代入，得 $k=-1$。

12 由题意可得 $2x+2y=8$，解得 $y=4-x$。并且 x,y 都必须是正数才满足实际意义。故选 C。

13 $\begin{cases}f(2)+2f(\frac{1}{2})=6,①\\ f(\frac{1}{2})+2f(2)=\frac{3}{2},②\end{cases}$

①－②×2 得 $-3f(2)=3$，所以 $f(2)=-1$，故选 B。

14 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}(t\neq 0$ 且 $t\neq -1)$，所以 $f(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{t}{t+1}(t\neq 0$ 且 $t\neq -1)$，所以 $f(x)=\frac{x}{x+1}(x\neq -1$ 且 $x\neq 0)$。故选 C。

15 因为 $f(x-1)=2(x-1)+2$，所以 $f(x)=2x+2$，故选 A。

16 令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)+0$，解得 $f(0)=0$；
令 $x=1,y=-1$，得 $f(0)=f(1)+f(-1)-2$，解得 $f(-1)=0$；
令 $x=y=-1$，得 $f(-2)=f(-1)+f(-1)+2$，解得 $f(-2)=2$；
令 $x=-2,y=-1$，得 $f(-3)=f(-2)+f(-1)+4$，解得 $f(-3)=6$。

17 依题意知 $g(5.5)=1.06(0.75\times 5+1)=5.035\approx 5.04$。故选 A。

18 设 $f(x)=kx(k\neq 0)$，$g(x)=\frac{m}{x}(m\neq 0)$，则 $F(x)=kx+\frac{m}{x}$。

由 $F(\frac{1}{3})=16$，$F(1)=8$，得 $\begin{cases}\frac{1}{3}k+3m=16,\\ k+m=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3,\\ m=5,\end{cases}$ 所以 $F(x)=3x+\frac{5}{x}$。

19 因为 $2\oplus x=\sqrt{4-x^2}$，$x\otimes 2=\sqrt{(x-2)^2}$，则 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(x-2)^2}-2}$。又 $4-x^2\geqslant 0$，所以 $-2\leqslant x\leqslant 2$，于是 $f(x)=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$，$-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$。

21 【归纳总结】求函数解析式的常用方法：(1)待定系数法——若已知函数的类型(如一次函数、二次函数)，可用待定系数法；(2)换元法——已知复合函数 $f(g(x))$ 的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围；(3)方程法——已知关于 $f(x)$ 与 $f(\frac{1}{x})$ 或 $f(-x)$ 等的表达式，可根据已知条件构造出另外一个等式，组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$ 的解析式。

课时3　函数的定义域与值域

➡ 正文P25

答案

1 C　2 D　3 D　4 D　5 B
6 C　7 A　8 B　9 D
10 $\{x|x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2\}$

11 $[\frac{1}{3},+\infty)$　12 $[-2,2]$

13 已知函数 $y=\sqrt{\frac{1}{a}x+1}$ ($a<0$ 且 a 为常数)，
所以 $\frac{1}{a}x+1\geqslant 0$，$a<0$，所以 $x\leqslant -a$，
即函数的定义域为 $(-\infty,-a]$。
因为函数在区间 $(-\infty,1]$ 上有意义，
所以 $(-\infty,1]\subseteq(-\infty,-a]$，所以 $-a\geqslant 1$，即 $a\leqslant -1$，
所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$。

14 由题意可得 $kx^2-4kx+k+3>0$ 恒成立。
①当 $k=0$ 时，$3>0$ 恒成立，所以满足题意；
②当 $k\neq 0$ 时，须使 $\begin{cases}k>0,\\ \Delta=(4k)^2-4k(k+3)<0,\end{cases}$
解得 $0<k<1$。
综上可得，k 的取值范围为 $0\leqslant k<1$。

15 A　16 C　17 B　18 D　19 D
20 B　21 B　22 $[0,4]$　23 $[0,\frac{25}{4}]$
24 $[2a,a+b]$　25 $\{y|y\in\mathbf{R}$，且 $y\neq 3\}$
26 -5 或 10　27 $[\frac{1}{2},+\infty)$

28 (1)由 $-x^2+x+2\geqslant 0$，得函数的定义域为 $[-1,2]$。
此时 $-x^2+x+2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}\in[0,\frac{9}{4}]$。
故函数 $y=\sqrt{-x^2+x+2}$ 的值域是 $[0,\frac{3}{2}]$。
(2)设 $t=\sqrt{x-1}\geqslant 0$，则 $x=t^2+1$。
原函数可转化为 $y=2(t^2+1)-t=2(t-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{8}$。
因为 $t\geqslant 0$，所以 $y\in[\frac{15}{8},+\infty)$。
所以函数 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的值域为 $[\frac{15}{8},+\infty)$。

29 (1) $f(1)=\frac{1^2}{1^2+1}=\frac{1}{2}$，
因为 $f(2)=\frac{2^2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$，
$f(\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2+1}=\frac{1}{5}$，
所以 $f(2)+f(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$。
(2)因为 $f(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^2}{(\frac{1}{x})^2+1}=\frac{1}{x^2+1}$，
所以 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=1$，为定值。
(3)由(2)知，$f(x)+f(\frac{1}{x})=1$。
所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,018)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+\cdots+f(\frac{1}{2\,018})=f(1)+[f(2)+f(\frac{1}{2})]+[f(3)+f(\frac{1}{3})]+\cdots+[f(2\,018)+f(\frac{1}{2\,018})]=\frac{1}{2}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2017个1}=\frac{4\,035}{2}$。

解析

1 要使解析式有意义,则$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}\neq 0,\end{cases}$所以$x>0$,故选 C。

2 依题意,知$\begin{cases}x^2-2\geqslant 0,\\ 2-x^2\geqslant 0,\end{cases}$解得$x=\pm\sqrt{2}$,所以函数的定义域为$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$。

3 根据题意得$\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ 2x^2-3x-2\neq 0,\end{cases}$解得$x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1]$。

4 要使函数有意义,需满足$\begin{cases}x-1\neq 0,\\ \frac{2}{x+1}>0\end{cases}$,所以$x>-1$且$x\neq 1$,所以定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

5 要使$g(x)$有意义,则$\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 2,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$解得$0\leqslant x<1$,故定义域为$[0,1)$,选 B。

6 函数$f(x)$的定义域是$[\frac{1}{2},1]$,所以$y=f(3-x)$要有意义,则$3-x\in[\frac{1}{2},1]$,解得$x\in[2,\frac{5}{2}]$。

7 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant 2x+a\leqslant 1,\\ 0<a<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1-a}{2},\\ 0<a<1,\end{cases}$得$-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1-a}{2}$。

8 由$2x^2-1=1$,得$x_1=1,x_2=-1$,由$2x^2-1=7$,得$x_3=-2,x_4=2$,所以定义域为 2 个元素的集合有 4 个,定义域为 3 个元素的集合有 4 个,定义域为 4 个元素的集合有 1 个,因此共有 9 个“孪生函数”。

9 函数$f(x)$的定义域是实数集$\mathbf{R}$,则$x^2+ax+1\geqslant 0$恒成立,即$\Delta=a^2-4\leqslant 0$,解得$-2\leqslant a\leqslant 2$,即实数a的取值范围是$[-2,2]$。故选 D。

10 由$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2-x\neq 0,\end{cases}$得$x\geqslant -1$且$x\neq 2$。

11 由$-2\leqslant\frac{x-1}{x}\leqslant 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{x}\leqslant 1,\\ \frac{x-1}{x}\geqslant -2,\end{cases}$

所以$x\geqslant\frac{1}{3}$。

12 函数$y=f(2x-1)$的定义域是$[0,2]$,即$x\in[0,2]$,则$2x-1\in[-1,3]$,所以$f(x)$的定义域为$[-1,3]$,从而$x+1\in[-1,3]$,$x\in[-2,2]$,函数$y=f(x+1)$的定义域是$[-2,2]$。

15 由对应关系$y=x^2-2x$得$0\to 0,1\to -1,2\to 0,3\to 3$,所以值域为$\{-1,0,3\}$。

16 $f(x)=2(x-1)^2-5\in[-5,3)$。

17 由于$x\in\mathbf{R}$,所以$x^2+1\geqslant 1,0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$,即$0<y\leqslant 1$。

18 因为$x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$,

所以$\frac{8}{x^2-4x+5}\in(0,8]$。

19 因为$y=\frac{x^2-8x+15}{x^2-x-6}=\frac{(x-5)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-5}{x+2}(x\neq 3)=1-\frac{7}{x+2}$,所以$y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,且$y\neq-\frac{2}{5}$。

20 由$f(ab)=f(a)+f(b)$,可得$f(12)=f(4)+f(3)$,$f(4)=f(2)+f(2)$,所以$f(12)=2f(2)+f(3)=4+3=7$。

21 A,C,D 的值域都不是$[1,2]$。

22 因为$0\leqslant 16-x^2\leqslant 16$,所以$\sqrt{16-x^2}\in[0,4]$。

23 $f(x)=-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}\in[0,\frac{25}{4}]$。

24 依题意,$a\leqslant f(x)\leqslant b$,则$2a\leqslant f(x)+a\leqslant a+b$,即函数$y=f(x)+a$的值域为$[2a,a+b]$。

25 因为$y=\frac{3x+2}{x-2}=\frac{(3x-6)+8}{x-2}=3+\frac{8}{x-2}$,又因为$\frac{8}{x-2}\neq 0$,所以$y\neq 3$。所以函数$y=\frac{3x+2}{x-2}$的值域是$\{y|y\in\mathbf{R}$,且$y\neq 3\}$。

26 若$m>0$,则$4+m>4,4-m<4$,则由$f(4-m)=f(4+m)$,得$4(4-m)-m=-(4+m)-2m$,即$16-5m=-4-3m$,则$m=10$;若$m<0$,则$4-m>4,4+m<4$,则由$f(4-m)=f(4+m)$,得$4(4+m)-m=-(4-m)-2m$,即$16+3m=-4-m$,则$m=-5$。综上,实数m的值为-5或 10。

27 设$\mu=\sqrt{2x-1}(x\geqslant\frac{1}{2})$,则$x=\frac{1+\mu^2}{2}(\mu\geqslant 0)$,于是$y=\frac{1+\mu^2}{2}+\mu=\frac{(\mu+1)^2}{2}(\mu\geqslant 0)$。由$\mu\geqslant 0$知$(\mu+1)^2\geqslant 1$,则$y\geqslant\frac{1}{2}$。故函数$y=x+\sqrt{2x-1}$的值域为$[\frac{1}{2},+\infty)$。

【易错点拨】用换元法求函数解析式时,要注意考虑所换元的取值范围。

课时 4 分段函数与映射

➡ 正文P27

答案

1 B　2 A　3 D　4 C　5 B
6 C　7 B　8 D

9 $(\frac{1}{8},-\frac{1}{16})$　10 3　11 1 或 -1

12 (1)因为$x=-1,y=2$,

所以$3x-2y+1=-6,4x+3y-1=1$。

所以所求B中元素为$(-6,1)$。

(2)因为$\begin{cases}3x-2y+1=-1,\\ 4x+3y-1=2,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=0,\\ y=1。\end{cases}$

所以所求A中元素为$(0,1)$。

13 ①当$a\geqslant 0$时,集合A中元素的象满足$-2a\leqslant ax\leqslant 2a$。若能够建立从$A$到$B$的映射,则$[-2a,2a]\subseteq[-1,1]$,即$\begin{cases}-2a\geqslant -1,\\ 2a\leqslant 1,\end{cases}$解得$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$。

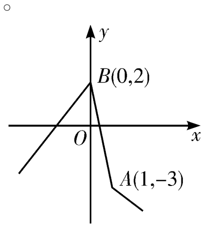
②当 $a<0$ 时，集合 A 中元素的象满足 $2a\leqslant ax\leqslant -2a$，若能建立从 A 到 B 的映射，则 $[2a,-2a]\subseteq[-1,1]$，即 $\begin{cases}2a\geqslant -1,\\ -2a\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a<0$。综合①②可知 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$。

14 能，个数为7，理由如下：
当 A 中三个元素对应0时，$f(a)+f(b)=f(c)$，有1个映射。
当 A 中三个元素对应 B 中两个元素时，
满足 $f(a)+f(b)=f(c)$ 的映射有4个，
它们是 $f(a)=1,f(b)=0,f(c)=1$；$f(a)=0,f(b)=1,f(c)=1$；$f(a)=-1,f(b)=0,f(c)=-1$；$f(a)=0,f(b)=-1,f(c)=-1$。
当 A 中三个元素对应 B 中三个元素时，有2个映射，
即 $f(a)=-1,f(b)=1,f(c)=0$；$f(a)=1,f(b)=-1,f(c)=0$。
综上所述，满足条件的映射共有7个。

15 B　16 D　17 A　18 C　19 D
20 4　21 **R**　22 2
23 $\{x\mid x>1$ 或 $x<-3\}$　24 $-\dfrac{2}{5}$

25 由题意可得 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 3x^2-2x<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1,\\ -2x^2+3<2。\end{cases}$ 由 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 3x^2-2x<2,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x<\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$。
由 $\begin{cases}x<1,\\ -2x^2+3<2,\end{cases}$ 解得 $x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1$。
综上可知满足 $f(x)<2$ 的 x 值的集合为
$\left\{x\ \middle|\ x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{或}\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right\}$。

26 当 $x\geqslant 1$ 时，$y=2(x-1)-3x=-x-2$；
当 $0\leqslant x<1$ 时，$y=-2(x-1)-3x=-5x+2$；
当 $x<0$ 时，$y=-2(x-1)+3x=x+2$。
故 $y=\begin{cases}-x-2,x\geqslant 1,\\ -5x+2,0\leqslant x<1,\\ x+2,x<0。\end{cases}$



第26题图

根据函数解析式作出函数图像，如图所示。由图像可以看出，函数的值域为 $\{y\mid y\leqslant 2\}$。

解析

1 根据映射的定义，对于 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素与之对应，故选 B。

2 因为 $|-3|=|3|=3$，$|-2|=|2|=2$，$|-1|=|1|=1$，$|4|=4$，且集合中元素具有互异性，所以 $B=\{1,2,3,4\}$，故 B 中共有4个元素。

3 对于A，集合 A 中元素1在集合 B 中有两个元素与之对应；对于B，集合 A 中元素0在集合 B 中无元素与之对应；对于C，集合 A 中元素0在集合 B 中无元素与之对应。故A，B，C均不能构成映射。

4 结合映射的定义，对(1)，(2)，集合 A 的元素在集合 B 中有的有两个元素与之对应，因而构不成映射，而(3)，(4)则符合要求，能构成映射。

5 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geqslant 1$，所以根据映射定义，元素 x 在 f 的作用下所得的结果都大于或等于1。所以若 $k\in B$，且在集合 A 中没有元素和它对应，则 $k<1$。

6 因为当 $x=4$ 时，$y=\dfrac{2}{3}\times 4=\dfrac{8}{3}\notin N$，所以C中的对应关系 f 不能构成从 M 到 N 的映射。

7 $x<0$ 时，$\varphi(x)=-x^2<0$，
所以 $f[\varphi(x)]=-x^2$。

8 因为从 A 到 B 的映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$，B 中元素为 $(4,2)$，所以 $\begin{cases}x+y=4,\\ x-y=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=1。\end{cases}$ 所以集合 A 中的元素为 $(3,1)$。

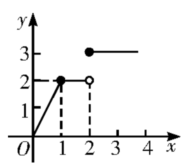
9 由 $\begin{cases}\sqrt{x}=2,\\ x+y=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\ y=-1,\end{cases}$ 即 $a=4,b=-1$，所以 $y=4x^2-x=4\left(x-\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{1}{16}$。

10 $A=\{1,2,m\}$ 的象构成的集合是 $\{4,7,3m+1\}$，所以 $3m+1=10$，得 $m=3$。

11 由 $f:x\to x$，知集合 M 中的元素映射到集合 N 中没有变化，且 N 中只有3个元素，所以 $M=N$。又因为 M 中 $-1,1$ 为相反数，所以 $a,b,b-a$ 这3个元素中有2个互为相反数，分情况讨论，知 $b=0,a=1$ 或 -1，所以 $a+b=1$ 或 -1。

15 对于②，取 $x=2$，得 $f(2)=3$ 或4，对于③，取 $x=1$，$f(1)=5$ 或1，所以②③都不合题意。

16 作出 $y=f(x)$ 的图像，如图所示。



第16题图

由图像知，$f(x)$ 的值域是 $[0,2]\cup\{3\}$。故选 D。

17 当 $x=-1$ 时，$y=0$，即图像过点 $(-1,0)$，D错；当 $x=0$ 时，$y=1$，即图像过点 $(0,1)$，C错；当 $x=1$ 时，$y=2$，即图像过点 $(1,2)$，B错。故选 A。

18 当 $0<a<1$ 时，$a+1>1$，$f(a)=\sqrt{a}$，$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$，因为 $f(a)=f(a+1)$，所以 $\sqrt{a}=2a$，解得 $a=\dfrac{1}{4}$。所以 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=f(4)=2\times(4-1)=6$。当 $a>1$ 时，$a+1>2$，所以 $f(a)=2(a-1)$，$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$，所以 $2(a-$

$1)=2a$，无解。当 $a=1$ 时，$a+1=2$，$f(1)=0$，$f(2)=2$，不符合题意。综上，$f(\frac{1}{a})=6$。

19 由于汽车在 B 地停留 1 小时期间，距离 x 不变，始终为 150 千米，故选 D。

20 因为 $f(-1)=(-1)^2+1=2$，
所以 $f[f(-1)]=f(2)=2^2+2-2=4$。

21 因为 $\{x|x>0\}\cup\{0\}\cup\{x|x<0\}=\mathbf{R}$，
所以函数 $f(x)$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$。

22 $f(3)=f(5)=f(7)=7-5=2$。

23 因为 $(x+1)f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0,\\ -x-1, x<0,\end{cases}$ 所以 $(x+1)\cdot f(x)>2$ 可转化为 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+1>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ -x-1>2,\end{cases}$ 解得 $x>1$ 或 $x<-3$。

【易错点拨】忽视分类讨论是本题最常见的错误，分段函数 $f(x)$ 到底用哪段的表达式是有条件的，必须依条件进行不重不漏的分类，求解。

24 由题意可得 $f(-\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+a$，$f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=|\frac{2}{5}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{10}$，则 $-\frac{1}{2}+a=\frac{1}{10}$，$a=\frac{3}{5}$，故 $f(5a)=f(3)=f(-1)=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$。

第三节 函数的单调性

课时 1 函数的单调性

➡ 正文P30

答案

1 B　2 D　3 A　4 D　5 D
6 C　7 $(-\infty,1]$ 和 $(1,+\infty)$
8 B　9 C　10 D　11 B
12 C　13 B　14 $[0,\frac{3}{2}]$

15 (1) 由 $x^2-1\neq 0$，得 $x\neq\pm 1$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq\pm 1\}$。

(2) 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数。证明：任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2-1}-\frac{1}{x_2^2-1}=\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$。因为 $x_2>x_1>1$，所以 $x_1^2-1>0$，$x_2^2-1>0$，$x_2-x_1>0$，$x_2+x_1>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数。

16 任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$，且 $x_1<x_2$。

$$\text{则 } f(x_2)-f(x_1)=\frac{ax_2}{x_2^2-1}-\frac{ax_1}{x_1^2-1}=\frac{a(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

因为 $-1<x_1<x_2<1$，所以 $|x_1|<1$，$|x_2|<1$，$x_1-x_2<0$，
所以 $x_1^2-1<0$，$x_2^2-1<0$，$|x_1x_2|<1$，即 $-1<x_1x_2<1$，
所以 $x_1x_2+1>0$，
所以 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}<0$，
因此，当 $a>0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，
即 $f(x_2)<f(x_1)$，此时函数 $f(x)$ 为减函数；
当 $a<0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，
即 $f(x_1)<f(x_2)$，此时函数 $f(x)$ 为增函数。

17 解：令 $u(x)=5-x^2$，则 $u(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，且 $u(0)=5$，
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ 在 $(-\infty,1]$ 上为减函数，在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，即函数 $u(x)$ 的单调性是以 0 为界划分，函数 $f(x)$ 的单调性是以 1 为界划分，令 $5-x^2=1$，解得 $x=\pm 2$，列表如下：

x	$(-\infty,-2]$	$[-2,0]$	$[0,2]$	$[2,+\infty)$
$u(x)=5-x^2$	增	增	减	减
$u(x)$	$(-\infty,1]$	$[1,5]$	$[1,5]$	$(-\infty,1]$
$f(u)$	减	增	增	减
$f(5-x^2)$	减	增	减	增

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-2]$，$[0,2]$，单调递增区间为 $[-2,0]$，$[2,+\infty)$。

18 (1) 解：由已知，可令 $m=n=0$，则有 $f(0)=f(0)+f(0)-1$，故 $f(0)=1$。令 $m=\frac{1}{2}$，$n=-\frac{1}{2}$，则有 $f(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})-1$，故有 $f(-\frac{1}{2})=f(0)+1-f(\frac{1}{2})=1+1-2=0$。(2) 证明：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_2-x_1>0$，$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=[f(x_2-x_1)+f(x_1)-1]-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1=f(x_2-x_1)+f(-\frac{1}{2})-1=f(x_2-x_1-\frac{1}{2})$。因为 $x_2-x_1>0$，所以 $x_2-x_1-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$，由已知当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x_2-x_1-\frac{1}{2})>0$，即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，所以 $f(x_2)>f(x_1)$。故函数 $y=f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数。

19 D　20 D　21 D　22 D

23 -6　24 $(\frac{1}{3},+\infty)$

25 $(-1,\sqrt{2}-1)$

26 (1) 因为 $f(3)=f(1\times 3)=f(1)+f(3)$，所以 $f(1)=0$。
(2) $f(9)=f(3\times 3)=f(3)+f(3)=2$，从而有 $f(x)+f(x-8)\leqslant f(9)$，即 $f(x(x-8))\leqslant f(9)$，因为 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，所以 $\begin{cases}x(x-8)\leqslant 9,\\ x>0,\\ x-8>0,\end{cases}$ 结合二次函数的图像解得 $8<x\leqslant 9$，即 $x\in(8,9]$。

27 (1) 因为 $f(-1)=0$，所以 $b=a+1$。① 因为 $f(x)=ax^2+bx+1(a>0)$ 的最小值为 $\frac{4a-b^2}{4a}$，$f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)\geqslant 0$，所以必有 $f(x)_{\min}=\frac{4a-b^2}{4a}\geqslant 0$，因为 $a>0$，所以 $4a-b^2\geqslant 0$，即 $b^2-4a\leqslant 0$。② 将①代入②，得 $b^2-4a=$

$(a+1)^2-4a=(a-1)^2\leqslant 0$，所以 $a=1,b=2$。所以 $f(x)=x^2+2x+1$。

(2)由(1)，得 $g(x)=f(x)-kx=x^2+(2-k)x+1$，因为 $x\in[-2,2]$时，$g(x)$是单调函数，所以 $-\frac{2-k}{2}\leqslant -2$ 或 $-\frac{2-k}{2}\geqslant 2$，解得 $k\leqslant -2$ 或 $k\geqslant 6$。即 k 的取值范围为 $\{k|k\leqslant -2$ 或 $k\geqslant 6\}$。

解析

1 由图像，可知函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间有2个。故选 B。

2 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $a^2+1>a^2$，所以 $f(a^2+1)<f(a^2)$。故选 D。

3 因为 $a+b>0$，所以 $a>-b,b>-a$，所以 $f(a)>f(-b)$，$f(b)>f(-a)$，所以 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$。故选 **A**。

4 因为是两个区间，所以不能确定 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系。

5 A 项中，并不是对任意 x_1,x_2 都成立，故 A 错；B 项中，虽然有无穷多对，但也不能代表"所有""任意"，故 B 错；C 项中，以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为例，虽然在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上均为减函数，但在整个定义域上却不具有单调性，故 C 错。故选 D。

6 由函数单调性的定义可知，若函数 $y=f(x)$ 在给定的区间上是增函数，则 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 同号，由此可知，选项 A，B，D 正确；对于 C，若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，故 C 不正确。

7 由题图可知函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1]$ 和 $(1,+\infty)$。

8 对于 A，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上单调递减；对于 B，$y=2x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；对于 C，$y=1-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；对于 D，$y=(2x-1)^2$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增。故选 B。

9 要求函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$ 的值域，只需求 $t=\sqrt{-x^2+4x}$，$x\in[0,4]$ 的值域即可。设二次函数 $f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，$x\in[0,4]$，所以 $f(x)$ 的值域是 $[0,4]$。因为 $t=\sqrt{f(x)}$，所以 t 的值域是 $[0,2]$，所以 $-t\in[-2,0]$，所以函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$ 的值域是 $[0,2]$。

【易错点拨】要注意先求函数的定义域，然后再求值域。

10 A 项，当 $k<0$ 时，函数的图像从左向右看是下降的，故为减函数，该项错误；B 项，函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图像的对称轴为直线 $x=0$，开口向上，故函数在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故该项错误；C 项，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是减函数，但两个单调区间不能用"∪"连接，故该项错误；D 项，两个在共同区间上单调性相同的函数之和在该区间上也是单调的，该项正确，故选 D。

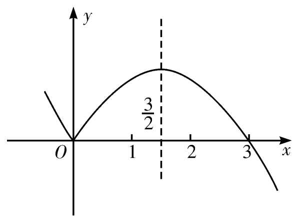
11 由于函数 $y=ax$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均为减函数，故 $a<0,b<0$，故二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 的图像开口向下，且对称轴对直线 $x=-\frac{b}{2a}<0$，故函数 $y=ax^2+bx$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

12 由题意可得 $0<x_1<x_2<x_3\leqslant 2$，而 $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$，所以 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减，所以 $\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$，选 C。

【易错警示】没有构造出新函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 而错误地运用 $f(x)$ 的单调性得结论。

13 设 $t=|x-3|$，当 $x\geqslant 3$ 时，函数 $t=|x-3|$ 单调递增，当 $x\leqslant 3$ 时，函数 $t=|x-3|$ 单调递减。因为函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减函数，所以根据复合函数的单调性之间的关系，知 $y=f(|x-3|)$ 的单调递减区间是 $[3,+\infty)$。

14 $y=-(x-3)|x|=\begin{cases}-x^2+3x,x>0,\\x^2-3x,x\leqslant 0,\end{cases}$ 作出其图像如图所示，观察图像知递增区间为 $[0,\frac{3}{2}]$。



第14题图

19 当 $a=0$ 时，$f(x)=2x-3$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是单调递增的；当 $a>0$ 时，由函数 $f(x)=ax^2+2x-3$ 的图像知，不可能在区间 $(-\infty,4)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，只有 $-\frac{2}{2a}\geqslant 4$，即 $a\geqslant -\frac{1}{4}$ 满足函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是单调递增的。综上可知，实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{4},0]$。

【易错点拨】本题容易想当然地认为该函数是二次函数，从而漏掉 $a=0$ 的情况。

20 画出图像可得函数 $f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故由 $f(2-a^2)<f(a)$，可得 $2-a^2<a$，即 $a^2+a-2>0$，结合二次函数的图像解得 $a<-2$ 或 $a>1$。故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$。

21 函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5(x\leqslant 1),\\\frac{a}{x}(x>1)\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $f(x)=-x^2-ax-5(x\leqslant 1)$ 单调递增，故 $-\frac{a}{2}\geqslant 1$，即 $a\leqslant -2$，此时 $f(x)=\frac{a}{x}(x>1)$ 也单调递增，要保证在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，只需在 $x=1$ 处满足 $-1^2-a\times 1-5\leqslant\frac{a}{1}$，即 $a\geqslant -3$。综上所述，a 的取值范围是 $-3\leqslant a\leqslant -2$。

22 依题意可得 $\begin{cases}a>0,\\-\frac{-1}{2a}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，故选 D。

23 函数 $f(x)=|2x+a|$ 的图像关于直线 $x=-\frac{a}{2}$ 对称，故有

$-\frac{a}{2}=3$,所以 $a=-6$。

24 因为 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,且 $g(t)>g(1-2t)$,所以 $t>1-2t$,所以 $t>\frac{1}{3}$,即所求 t 的取值范围为 $(\frac{1}{3},+\infty)$。

25 因为 $x^2+1\geqslant1$,所以由 $f(1-x^2)>f(2x)$ 得 $\begin{cases}1-x^2>2x,\\1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,\sqrt{2}-1)$。

课时 2　函数的最大(小)值

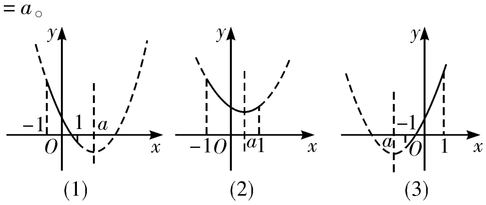
➡ 正文P33

答案

1 C　2 C　3 D　4 D　5 C　6 D
7 A　8 B　9 A　10 B　11 A　12 C
13 $(1,3]$　14 $\frac{3}{2}$　15 4　16 2　17 3

18 令 $\sqrt{x+1}=t(t\geqslant0)$,则 $x=t^2-1$,
所以 $y=t^2-t-1(t\geqslant0)$。
又 $y=t^2-t-1(t\geqslant0)$ 的图像是对称轴为直线 $t=\frac{1}{2}$、开口向上的抛物线的一部分,
所以 $y_{\min}=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$,无最大值。
故函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{5}{4}$,无最大值。

19 $f(x)=(x-a)^2+2-a^2$ 的图像开口向上,且对称轴为直线 $x=a$。



第 19 题图

当 $a\geqslant1$ 时,函数 $f(x)$ 的大致图像如图(1)中的实线部分所示,函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是减函数,最小值为 $f(1)=3-2a$;
当 $-1<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 的大致图像如图(2)中的实线部分所示,函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上先减后增,最小值为 $f(a)=2-a^2$;当 $a\leqslant-1$ 时,函数 $f(x)$ 的大致图像如图(3)中的实线部分所示,函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数,最小值为 $f(-1)=3+2a$。
于是 $f(x)_{\min}=\begin{cases}3+2a,a\leqslant-1,\\2-a^2,-1<a<1,\\3-2a,a\geqslant1。\end{cases}$

20 令 $t=\sqrt{a-4x}$,则 $x=\frac{a-t^2}{4}$,且 $t\geqslant0$,
所以原函数变形为 $y=\frac{a-t^2}{2}-3-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+\frac{a-5}{2}$。
因为 $t\geqslant0$,所以当 $t=0$ 时,$y_{\max}=\frac{a-6}{2}$。
于是 $\frac{a-6}{2}=\frac{7}{2}$,解得 $a=13$,
所以实数 a 的值为 13。

21 (1)因为 $f(x)$ 是二次函数,且 $f(0)=f(2)$,
所以 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=1$。又 $f(x)$ 的最小值为 1,
所以设 $f(x)=k(x-1)^2+1$,
又 $f(0)=3$,所以 $k=2$。
所以 $f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$。
(2)要使 $f(x)$ 在区间 $[2a,a+1]$ 上不单调,则 $2a<1<a+1$,解得 $0<a<\frac{1}{2}$。
故实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$。
(3)由(1)知,$y=f(x)$ 图像的对称轴为 $x=1$。
若 $t\geqslant1$,则 $y=f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上是增函数,$y_{\min}=2t^2-4t+3$;
若 $t+2\leqslant1$,即 $t\leqslant-1$,则 $y=f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上是减函数,$y_{\min}=f(t+2)=2t^2+4t+3$;
若 $t<1<t+2$,即 $-1<t<1$,则 $y_{\min}=f(1)=1$。
综上,当 $t\geqslant1$ 时,$y_{\min}=2t^2-4t+3$,
当 $-1<t<1$ 时,$y_{\min}=1$,
当 $t\leqslant-1$ 时,$y_{\min}=2t^2+4t+3$。

22 C　23 A　24 $[1,2]$　25 $[-1,0]$
26 $(-\infty,-5]$　27 $\frac{1}{2}$

28 (1)因为 $g(x)=m(x-1)^2-m+1+n$,
所以函数 $g(x)$ 的图像的对称轴方程为 $x=1$。
又因为 $m>0$,所以依题意得 $\begin{cases}g(1)=0,\\g(3)=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-m+1+n=0,\\3m+1+n=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=0。\end{cases}$
所以 $g(x)=x^2-2x+1$。
(2)因为 $f(x)=\frac{g(x)-2x}{x}$,
所以 $f(x)=x+\frac{1}{x}-4$。
因为 $f(x)-kx\leqslant0$ 在 $x\in[\frac{1}{8},8]$ 时恒成立,即 $x+\frac{1}{x}-4-kx\leqslant0$ 在 $x\in[\frac{1}{8},8]$ 时恒成立,所以 $k\geqslant(\frac{1}{x})^2-\frac{4}{x}+1$ 在 $x\in[\frac{1}{8},8]$ 时恒成立,只需 $k\geqslant[(\frac{1}{x})^2-\frac{4}{x}+1]_{\max}$。
令 $t=\frac{1}{x}$,由 $x\in[\frac{1}{8},8]$ 得 $t=\frac{1}{x}\in[\frac{1}{8},8]$,
设 $h(t)=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$。
所以函数 $h(t)$ 的图像的对称轴方程为 $t=2$,所以当 $t=8$ 时,函数 $h(t)$ 取得最大值 33
所以 $k\geqslant h(t)_{\max}=h(8)=33$,所以 k 的取值范围为 $[33,+\infty)$。

29 (1)由 $f(x)\geqslant0$ 对一切实数 x 恒成立知 $x^2-x+a+1\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $\Delta=1-4(a+1)\leqslant0$,解得 $a\geqslant-\frac{3}{4}$,
所以实数 a 的取值范围为 $[-\frac{3}{4},+\infty)$。
(2)因为 $f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}(x\leqslant a)$,①当 $a<\frac{1}{2}$ 时,$g(a)=f(x)_{\min}=f(a)=a^2+1$,
②当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$g(a)=f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=a+\frac{3}{4}$,所以
$g(a)=\begin{cases}a^2+1,a<\frac{1}{2},\\a+\frac{3}{4},a\geqslant\frac{1}{2}。\end{cases}$

解析

1 观察题中图像可以知道，图像的最高点坐标是$(0,3)$，从而其最大值是3；图像无最低点，即该函数不存在最小值。故选C。

2 由函数最大值的概念知②③正确。

3 容易判断函数$f(x)$在区间$[1,3]$上是增函数，所以在区间$[1,3]$上的最大值是$f(3)=1$。

4 因为$f(x)=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4},x\in(-5,5)$，

所以当$x=-\frac{3}{2}$时，$f(x)$有最小值$-\frac{1}{4}$，$f(x)$无最大值。

5 依题意，当$a>0$时，$2a+1-(a+1)=2$，即$a=2$；当$a<0$时，$a+1-(2a+1)=2$，即$a=-2$。故选C。

6 $f(x)=\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\leqslant\frac{4}{3}$，所以$f(x)$的最大值为$\frac{4}{3}$。

7 设隔墙的长度为x m，场地面积为S m^2，则$S=x\cdot\dfrac{24-4x}{2}=12x-2x^2=-2(x-3)^2+18$，所以当$x=3$时，$S$有最大值，为18，故选A。

8 作出满足题意的图像(图略)，可知函数$y=f(x)$在区间$[-7,-3]$上是增函数，且最大值为-5。故选B。

9 由题意，当$x>0$时，$f(x)$的最小值为$f(1)=2$，当$x\leqslant0$时，$f(x)$的最小值为$f(0)=a$。若$f(0)$是$f(x)$的最小值，则$a\leqslant2$。

10 利用一元二次方程根与系数的关系易得：$\alpha+\beta=2k,\alpha\beta=k+6$，所以$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2=4k^2-6k-10=4(k-\frac{3}{4})^2-\frac{49}{4}$。因为原方程有两个实数根$\alpha,\beta$，所以$\Delta=4k^2-4(k+6)\geqslant0$，结合二次函数图像解得$k\leqslant-2$或$k\geqslant3$。当$k\geqslant3$时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是8；当$k\leqslant-2$时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是18。

【易错点拨】本题极其容易漏掉“$\Delta\geqslant0$”的条件，因为两根之和、两根之积的存在并不能保证方程有实根。而α,β要求是该一元二次方程的两个实根。

11 若$x\in(-1,0]$，则$x+1\in(0,1]$。因为当$x\in(0,1]$时，$f(x)=x^2-x$，所以$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)=x^2+x$。又$f(x+1)=2f(x)$，则$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{8}$，

所以当$x=-\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最小值$-\frac{1}{8}$。故选A。

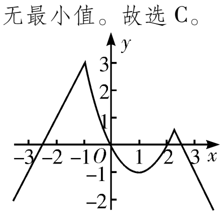
12 由$f(x)=g(x)$得$5-2|x|=x^2-2x$，当$x\geqslant0$时，$5-2x=x^2-2x$，所以$x^2=5$，所以$x=\sqrt{5}$。当$x<0$时，$5+2x=x^2-2x$，即$x^2-4x-5=0$，解得$x=-1$或$x=5$(舍去)。

故当$x\leqslant-1$时，$F(x)=f(x)=5+2x$；

当$-1<x<\sqrt{5}$时，$F(x)=g(x)=x^2-2x$；

当$x\geqslant\sqrt{5}$时，$F(x)=f(x)=5-2x$。

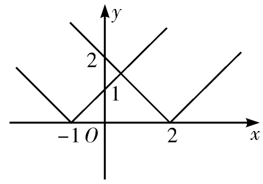
由图像可知，当$x=-1$时，$F(x)$取得最大值$F(-1)=f(-1)=5-2=3$，无最小值。故选C。



第12题图

13 因为函数$f(x)=x^2-6x+8$的图像的对称轴为直线$x=3$，且在区间$[1,a]$上，$f(x)_{\min}=f(a)$，所以$a\leqslant3$。又$a>1$，所以$1<a\leqslant3$。

14 作出函数$y=|x+1|$和$y=|x-2|$的图像，如图，由图可知$f(x)=\begin{cases}2-x,x<\frac{1}{2},\\x+1,x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$所以$f(x)$的最小值为$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$。



第14题图

15 由$g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}+1$，易知$g(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，则$g(x)_{\min}=g(1)=3$。于是$f(x)$也在$x=1$处取得最小值3，则$b=-2,c=4$，即$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$，所以$f(x)$在区间$[\frac{1}{2},2]$上的最大值为$f(2)=4$。

16 任取x_1,x_2，满足$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1-1}-\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$。因为$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，且$a>1$，所以$x_2-x_1>0,x_1>1,x_2>1,(x_1-1)(x_2-1)>0$。于是$f(x)$在$[a,b]$上为减函数，所以$\begin{cases}f(a)=1,\\f(b)=\frac{1}{3},\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{1}{a-1}=1,\\\frac{1}{b-1}=\frac{1}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$所以$b-a=2$。

17 因为$F(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\begin{cases}b,a\geqslant b,\\a,a<b,\end{cases}$所以当$f(x)\geqslant g(x)$，即$-1\leqslant x\leqslant2$时，$G(x)=F(f(x),g(x))=g(x)=x+1\in[0,3]$；当$f(x)<g(x)$，即$x<-1$或$x>2$时，$G(x)=F(f(x),g(x))=f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4\in(-\infty,3]$。

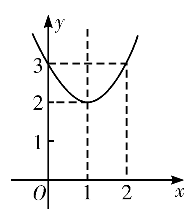
综上可知，$G(x)$的值域为$(-\infty,3]$，所以$G(x)$的最大值为3。

18 【名师点睛】本题考查无理函数的最值问题。求解这类问题常常使用的方法是换元法，通过换元将无理函数的最值问题化为二次函数的最值问题，需要注意的是换元后的新元的取值范围。

19 【方法归纳】本题考查二次函数的最值问题，其中定义域是已知的，对称轴是变化的，解题时可让对称轴从定义域对应的区间的左(右)边向右(左)边沿x轴方向移动，分析移动到不同的位置时对最值的影响。借助图像，可使问题的解决显得直观、清晰。

23 函数$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，图像的对称轴为$x=2$，$f(0)=f(4)=5,f(2)=1$。根据题意，函数$f(x)=x^2-4x+5$在区间$[0,m]$上的最大值为5，最小值为1，故实数m的取值范围是$[2,4]$。

24 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，作出图像如图所示，由图像知$1\leqslant m\leqslant2$。



第24题图

26 当$x\in(1,2)$时，不等式$x^2+mx+4<0$可化为$m<-(x+\frac{4}{x})$，又函数$f(x)=-(x+\frac{4}{x})$在$(1,2)$上递增，则$f(x)>-5$，则$m\leqslant-5$。

27 函数图像的对称轴为$x=k$。当$k\geqslant1$时，

函数的最小值为$f(1)=1-2k+k=\frac{1}{4}$，所以$k=\frac{3}{4}$(舍去)；

当 $k\leqslant 0$ 时，函数的最小值为 $f(0)=k=\frac{1}{4}$（舍去）；当 $0<k<1$ 时，函数的最小值为 $f(k)=-k^2+k=\frac{1}{4}$，所以 $k=\frac{1}{2}$。

第四节 二次函数性质的再研究

课时 1 二次函数的解析式和图像

➡ 正文P36

答案

1 B　2 $y=\frac{1}{3}(x-4)^2-2$ 或 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2-2$

3 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$

4 (1) 由题意可得：$f(1)=a+b=-1$ 且 $-\frac{b}{2a}=1$，

解得：$a=1,b=-2$。

(2) $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

因为 $k\geqslant 1$，所以 $f(x)$ 在 $[k,k+1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\max}=f(k+1)=(k+1)^2-2(k+1)=8$，

解得：$k=\pm 3$。

又 $k\geqslant 1$，所以 $k=3$。

5 (1) 设二次函数的解析式为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则由题意可知

$\begin{cases}f(0)=c=1,\\a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+bx+c+2x。\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}c=1,\\(2a-2)x+a+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c=1,\\2a-2=0,\\a+b=0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}a=1,\\b=-1,\\c=1。\end{cases}$ 故二次函数的解析式为 $f(x)=x^2-x+1$。

(2) 设二次函数的解析式为 $y=a(x+1)^2-6(a\neq 0)$，将 $(2,12)$ 代入解析式中，得 $12=a(2+1)^2-6$，解得 $a=2$，所以 $y=2(x+1)^2-6$，即 $y=2x^2+4x-4$。故二次函数的解析式为 $y=2x^2+4x-4$。

(3) 设二次函数的解析式为 $y=a(x-1)(x+3)(a\neq 0)$，因为图像与 y 轴的交点坐标为 $(0,-6)$，所以点 $(0,-6)$ 在函数图像上，所以 $-6=a(0-1)(0+3)$，解得 $a=2$。故二次函数的解析式为 $y=2(x-1)\cdot(x+3)=2x^2+4x-6$。

6 D　7 D　8 D　9 D　10 D

11 C　12 B

13 右　1　上　2　14 1

15 (1) 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，

所以 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$。

又由 $f(2)=3$，得 $f(3-2^2+2)=3-2^2+2$，

即 $f(1)=1$。

若 $f(0)=a$，则 $f(a-0^2+0)=a-0^2+0$，即 $f(a)=a$。

(2) 因为对任意 x 有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，

且只有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，

所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)-x^2+x=x_0$

在上式中令 $x=x_0$，得 $f(x_0)-x_0^2+x_0=x_0$。

又因为 $f(x_0)=x_0$，所以 $x_0-x_0^2=0$，故 $x_0=0$ 或 $x_0=1$。

若 $x_0=0$，则 $f(x)-x^2+x=0$，即 $f(x)=x^2-x$。

但方程 $x^2-x=x$ 有两个不同的实根，与题设条件矛盾，故 $x_0\neq 0$。

若 $x_0=1$，则 $f(x)-x^2+x=1$，即 $f(x)=x^2-x+1$。

易验证该函数满足题设条件。

综上可知，所求函数的解析式为 $f(x)=x^2-x+1\ (x\in\mathbf{R})$。

16 (1) 由题意设 $f(x)=ax+b(a>0)$。

从而 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=16x+5$，

所以 $\begin{cases}a^2=16,\\ab+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4,\\b=-\frac{5}{3}\end{cases}$（不合题意，舍去）。

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=4x+1$。

(2) $g(x)=f(x)(x+m)=(4x+1)(x+m)=4x^2+(4m+1)x+m$，

$g(x)$ 图像的对称轴为直线 $x=-\frac{4m+1}{8}$。

若 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $-\frac{4m+1}{8}\leqslant 1$，解得 $m\geqslant -\frac{9}{4}$，所以实数 m 的取值范围为 $[-\frac{9}{4},+\infty)$。

17 (1) 由 $f(x)>0$ 的解集为 $(-4,2)$，得二次方程 $ax^2-(b-5)x-a-ab=0$ 的根为 $x_1=-4,x_2=2$，且 $a<0$。由根与系数的关系，得 $\begin{cases}-4+2=\frac{b-5}{a},\\-4\times 2=\frac{-a-ab}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=7,\end{cases}$

故 $f(x)=-x^2-2x+8$。

(2) 当 $-1\leqslant t$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(t)=-t^2-2t+8$。

当 $t<-1<t+2$，即 $-3<t<-1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(-1)=9$，

当 $-1\geqslant t+2$，即 $t\leqslant -3$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(t+2)=-t^2-6t$，

所以 $g(t)=\begin{cases}-t^2-2t+8,t\geqslant -1,\\9,-3<t<-1,\\-t^2-6t,t\leqslant -3。\end{cases}$

解析

1 可直接列方程组求解。

2 由题意得 $y=\frac{1}{3}(x-4)^2-2$ 或 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2-2$。

3 将点 $(3,1)$ 及 $(1,3)$ 分别代入 $f(x)=ax^2-2ax+b$ 中，有 $\begin{cases}9a-6a+b=1,\\a-2a+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{5}{2}。\end{cases}$

所以 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$。

6 由 $a>0,-\frac{b}{2a}>0,c<0$ 知顶点在第四象限。

7 要得到 $y=2(x-4)^2-1$ 的图像，只需将 $y=2x^2$ 的图像向右平移 4 个单位，再向下平移 1 个单位。

8 因为 $a>b>c,a+b+c=0$，所以 $a>0,c<0$。又因为 $b=-(a+c)$，所以 $\Delta=b^2-4ac=(a-c)^2>0$，所以抛物线开口

向上，且与 x 轴有两个交点，故选 D。

9 由与 y 轴交点为 $(0,11)$ 知 $c=11$，由 $-\dfrac{b}{2a}=2$ 和 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-1$ 可求得 a、b 的值。

10 由二次函数的图像的开口方向可知，$a>0$，与 y 轴的交点在 x 轴下方可知 $c<0$。故点 (a,c) 在第四象限，故选 D。

11 由题图可知 $f(1)<0$，$f(-1)>1$，所以①②正确。

因为 $-\dfrac{b}{2a}=-1$，且 $a<0$，所以 $b=2a<0$。

因为 $f(0)=c=1$，所以③正确。

因为 $f(-2)=f(0)=1$，所以 $f(-2)=4a-2b+c>0$，

所以④不正确。

因为 $c=1$，$a<0$，所以 $c-a>1$，所以⑤正确。

12 由 $b>0$ 可排除图(1)(2)，

由(3)(4)知 $f(0)=0$，所以 $a=\pm1$。

若 $a=1$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2}<0$，不合题意；

若 $a=-1$，对称轴 $x=\dfrac{b}{2}>0$，图(3)符合题意。故选 B。

13 $y=2(x+1)^2-2$ 的图像向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度即可得到 $y=2x^2$ 的图像。

14 将二次函数 $f(x)=x^2$ 的图像向右平移 $a(a>0)$ 个单位长度后得到函数的解析式为 $f(x-a)=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$，再向上平移 a 个单位长度后得到二次函数的解析式为 $f(x-a)+a=x^2-2ax+a^2+a$，与 $f(x)=x^2-2x+2$ 对比可得 $\begin{cases}-2a=-2,\\ a^2+a=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$。

课时 2　二次函数的性质

➡ 正文P38

答案

1 A　**2** D　**3** C　**4** B　**5** A

6 A　**7** D　**8** B　**9** C

10 $(-\infty,\dfrac{7}{4})$　**11** $\{-3,0,1\}$

12 8　**13** $f(2\,017)>f(2\,014)$　**14** $(-\infty,8]$

15 $[\dfrac{3}{2},3]$　**16** $(1,3]$　**17** $(1,2]$

18 A　**19** -2　**20** $[25,+\infty)$

21 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，

则函数 $f(x)$ 图像的对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$。

因为 $f(x)$ 的最小值为 -4，

所以 $f(x)=a(x-1)^2-4=ax^2-2ax+a-4$。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$。

由 $f(x)=ax^2-2ax+a-4=0$，得 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ x_1\cdot x_2=1-\dfrac{4}{a},\end{cases}$

所以 $|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=4-4(1-\dfrac{4}{a})=\dfrac{16}{a}=16$，

所以 $a=1$，所以 $f(x)=x^2-2x-3$。

22 因为 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 的对称轴为直线 $x=1$，则其最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $3n\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $n\leqslant\dfrac{1}{6}$，所以对称轴 $x=1$ 在区间 $[m,n]$ 的右侧，所以函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 在区间 $[m,n]$ 上是单调递增的，故 $\begin{cases}f(m)=-\dfrac{1}{2}m^2+m=3m,\\ f(n)=-\dfrac{1}{2}n^2+n=3n,\\ n>m,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}m=-4,\\ n=0。\end{cases}$

23 (1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，

因为 $x\in[-5,5]$，故当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 1。

当 $x=-5$ 时，$f(x)$ 的最大值为 37。

(2) 函数 $f(x)=(x+a)^2+2-a^2$ 的图像的对称轴为 $x=-a$。

因为 $f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上是单调的，所以 $-a\leqslant-5$ 或 $-a\geqslant5$。

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$。

24 (1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$。由 $f(0)=1$ 可得 $c=1$。所以 $f(x)=ax^2+bx+1$。故 $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+(2a+b)x+(a+b+1)$，所以 $f(x+1)-f(x)=2ax+(a+b)=2x$。故有 $\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1。\end{cases}$ 所以 $f(x)=x^2-x+1$。

(2) 由题意知，$x^2-x+1>2x+m$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，即 $x^2-3x+1-m>0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立。令 $g(x)=x^2-3x+1-m=(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{5}{4}-m$，其图像的对称轴为直线 $x=\dfrac{3}{2}$。故函数 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是减函数，所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=1-3+1-m=-1-m$，由题意得 $-1-m>0$，解得 $m<-1$。所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1)$。

解析

1 函数的对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-5}{2\times\dfrac{1}{2}}=5$，

因为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4\times\dfrac{1}{2}\times1-25}{4\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2-25}{2}=-\dfrac{23}{2}$，

所以其顶点坐标为 $(5,-\dfrac{23}{2})$。

2 因为二次函数 $y=4x^2-mx+5$ 图像的对称轴为 $x=-2$，所以 $\dfrac{m}{8}=-2$，即 $m=-16$，所以 $y=4x^2+16x+5$，当 $x=1$ 时，$y=25$，故选 D。

3 因为函数 $f(x)=-x^2+2ax$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数，所以对称轴 $x=a$ 应在 $x=1$ 的右侧，$x=3$ 的左侧或与 $x=1$，$x=3$ 重合。

所以 $1\leqslant a\leqslant3$。

4 当 $y=0$ 时，$-\dfrac{1}{12}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}=0$，解得 $x=10$ 或 $x=-2$（舍去），故选 B。

5 因为 $y=x^2-2x$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，且 $m-1$，m，$m+1$ 均在 $[1,+\infty)$ 内，所以 $y_1<y_2<y_3$。

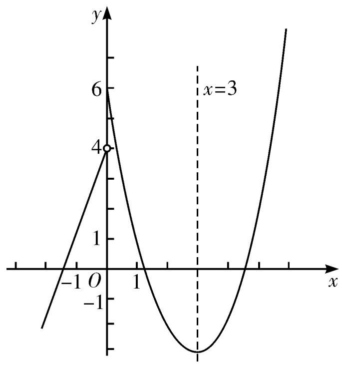
6 因为 $a>0$，所以 $f(0)=a>0$。

因为函数图像的对称轴为 $x=-\dfrac{1}{2}$，所以 $f(-1)=f(0)>0$。

又因为 $f(m)<0$，所以 $-1<m<0$，所以 $m+1>0$，所以 $f(m+1)>0$。

7 $f(x)$ 的图像如图所示，不妨设 $x_1<x_2<x_3$，则由图知 $-\dfrac{7}{3}<$

$x_1<0, x_2+x_3=6 \Rightarrow x_1+x_2+x_3 \in (\frac{11}{3}, 6)$，故选 D。



第 7 题图

8 令 $g(a)=x^2+(a-4)x+4-2a=(x-2)a+x^2-4x+4$，因为对于 $a\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值恒大于零，所以 $\begin{cases} g(-1)=x^2-5x+6>0, \\ g(1)=x^2-3x+2>0, \end{cases}$ 解得 $x<1$ 或 $x>3$。

9 由函数图像可知 $a>0, 0<-\frac{b}{2a}<1, c=-2, f(-1)>0, f(1)<0$，整理得 $b<0, 2a+b>0, a-b+c>0, a+b+c<0$，由此可知①错误，其余 4 个正确。

10 由题意，得 $\begin{cases} a-2<0, \\ \Delta=2^2+4\times4(a-2)<0, \end{cases}$ 解得 $a<\frac{7}{4}$。所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{7}{4})$。

11 当 $m=1$ 时，$f(x)=4x-1$，其图像和 x 轴只有一个交点 $(\frac{1}{4}, 0)$。当 $m\neq1$ 时，依题意得 $\Delta=4(m+1)^2+4(m-1)=0$，即 $m^2+3m=0$，解得 $m=-3$ 或 $m=0$。
所以 m 的取值的集合为 $\{-3,0,1\}$。

12 由 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，得点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，$C(-1,4)$，
所以 $|AB|=|1-(-3)|=4$，点 C 到边 AB 的距离为 4，
所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$。

13 由题意知二次函数图像的对称轴为 $x=2\ 013$。因为 $|2\ 017-2\ 013|>|2\ 014-2\ 013|$，且函数图像开口向上，所以 $f(2\ 017)>f(2\ 014)$。

14 因为函数 $f(x)=x^2-2ax+5$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数，
所以函数 $f(x)$ 图像的对称轴 $x=a\leqslant1$，
所以 $f(-1)=1+2a+5=6+2a\leqslant8$。

15 函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，且 $f(\frac{3}{2})=-\frac{25}{4}$，所以 $m\geqslant\frac{3}{2}$。

又因为 $f(0)=f(3)=-4$，所以 $m\leqslant3$。所以 $\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant3$。

【易错警示】二次函数的大小比较、函数的最值等问题，要先根据对称轴的位置，判断函数的单调性然后解题，避免直接使用二次函数的最值公式。

16 函数 $f(x)=x^2-6x+8$ 图像的对称轴为直线 $x=3$，要使 $x\in[1,a]$ 时，最小值为 $f(a)$，根据二次函数的图像可知 $a\leqslant3$，故实数 a 的取值范围是 $(1,3]$。

17 因为 $0<\frac{1}{a}<a$，所以 $a>1$。由题意可知 $\frac{1}{2a}\leqslant f(x)\leqslant 2a$ 恒成立。函数 $f(x)$ 图像的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$，因为 $\frac{a}{2}-\frac{1}{a}<a-\frac{a}{2}$，所以 $x=a$ 时 $f(x)$ 取得最大值，即 $f(a)=a^2-a^2+a^2\leqslant2a$，解得 $0\leqslant a\leqslant2$。所以 $1<a\leqslant2$。当 $x\in[\frac{1}{a},a]$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2a}$ 恒成立。

18 因为 $f(0)=f(4)>f(1)$，所以函数图像开口向上，即 $a>0$，且其对称轴为直线 $x=2$，即 $-\frac{b}{2a}=2$，所以 $4a+b=0$，故选 A。

19 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，总有 $f(1-x)=f(1+x)$，所以函数 $f(x)$ 的图像的对称轴是直线 $x=\frac{1-x+1+x}{2}=1$，所以 $-\frac{a}{2}=1$，所以 $a=-2$。

20 函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 的图像开口向上，对称轴为直线 $x=\frac{m}{8}$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上是增函数，则 $\frac{m}{8}\leqslant-2$，即 $m\leqslant-16$。所以 $f(1)=9-m\geqslant25$。

第五节　简单的幂函数

课时 1　简单的幂函数

➡ 正文P40

答案

1 B　2 C　3 D　4 $f(x)=x^{-2}$
5 -3　6 $\frac{1}{3}$　7 D　8 B
9 B　10 B　11 C
12 B　13 B　14 $\frac{\sqrt{2}}{4}$　15 第二、第四
16 $\sqrt{x}$　17 ⑤⑥

18 由题意，得 $3m-7<0$，所以 $m<\frac{7}{3}$。
因为 $m\in\mathbf{N}$，所以 $m=0,1$ 或 2。
因为幂函数的图像关于 y 轴对称，所以 $3m-7$ 为偶数。
因为 $m=0$ 时，$3m-7=-7$，$m=1$ 时，$3m-7=-4$，$m=2$ 时，$3m-7=-1$，所以当 $m=1$ 时，$y=x^{-4}$ 符合题意，即 $f(x)=x^{-4}$。
所以不等式 $f(x+2)<16$ 可化为 $(x+2)^{-4}<16$，
即 $-2<(x+2)^{-1}<2$，解得 $x>-\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{5}{2}$，所以该不等式的解集为 $(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(-\frac{3}{2},+\infty)$。

19 C　20 A　21 A　22 D　23 B
24 A　25 C　26 C
27 2　28 1　29 $(1,+\infty)$

30 (1) 函数 $y=x^{-\frac{5}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，又 $3<3.1$，所以 $3^{-\frac{5}{2}}>3.1^{-\frac{5}{2}}$。
(2) $-8^{-\frac{7}{8}}=-\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{7}{8}}$，函数 $y=x^{\frac{7}{8}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，又 $\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$，则 $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{7}{8}}>\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7}{8}}$，从而 $-8^{-\frac{7}{8}}<-\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7}{8}}$。

(3) $(-\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}=(\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}$，$(-\frac{\pi}{6})^{-\frac{2}{3}}=(\frac{\pi}{6})^{-\frac{2}{3}}$，

函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，又 $\frac{2}{3}>\frac{\pi}{6}$，所以

$(-\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}<(-\frac{\pi}{6})^{-\frac{2}{3}}$。

(4) $4.1^{\frac{2}{5}}>1^{\frac{2}{5}}=1$，$0<3.8^{-\frac{2}{3}}<1^{-\frac{2}{3}}=1$，$(-1.9)^{\frac{3}{5}}<0$，

所以 $(-1.9)^{\frac{3}{5}}<3.8^{-\frac{2}{3}}<4.1^{\frac{2}{5}}$。

31 因为 $m\in\{x\mid -2<x<2, x\in\mathbf{Z}\}$，

所以 $m=-1,0,1$。因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)+f(x)=0$，

即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数。

当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^2$ 只满足条件(1)，而不满足条件(2)；

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^0$ 条件(1)、(2)都不满足。

当 $m=0$ 时，$f(x)=x^3$ 条件(1)、(2)都满足，且在区间 $[0,3]$ 上是增函数。

所以 $x\in[0,3]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,27]$。

解析

1 函数 $y=5^x$ 是指数函数，不是幂函数；函数 $y=5x$ 是正比例函数，不是幂函数；函数 $y=(x+1)^3$ 的底数不是自变量 x，不是幂函数；函数 $y=x^5$ 是幂函数。

2 函数 $y=x^{-2}$，$y=x^{-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}, x\neq0\}$，函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant0\}$，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$。故选 C。

3 由幂函数定义可知 $a^2-2a-2=1$，所以 $a=-1$ 或 $a=3$。当 $a=3$ 时，$y=x^3$，满足在实数集 $\mathbf{R}$ 上单调；当 $a=-1$ 时，$y=x^{-1}$，不满足在实数集 $\mathbf{R}$ 上单调，所以 $a=3$，故选 D。

4 因为 $t+2=1$，所以 $t=-1$，所以 $f(x)=x^{-2}$。

5 因为函数 $f(x)=(m^2+3m+1)\cdot x^{m^2+m-1}$ 是幂函数，所以 $m^2+3m+1=1$，解得 $m=0$ 或 -3。当 $m=0$ 时，$f(x)=x^{-1}$，其图像不过原点，舍去；当 $m=-3$ 时，$f(x)=x^5$，其图像过原点。

【易错警示】幂函数的图像过原点，则指数大于0；图像不过原点，则指数小于等于0。

6 因为 $\frac{f(4)}{f(2)}=3$，所以 $\frac{4^a}{2^a}=3$，即 $2^a=3$，所以 $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^a=2^{-a}=3^{-1}=\frac{1}{3}$。

7 当 $\alpha=0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0, x\in\mathbf{R}\}$，其图像为两条射线，故 A 选项不正确；当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 的图像不过 $(0,0)$ 点，故选项 B 不正确；幂函数 $y=x^{-1}$ 的图像关于原点对称，但其在定义域内不是增函数，故选项 C 不正确；当 $x>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$y=x^\alpha>0$，则幂函数的图像都不在第四象限，故选项 D 正确。

8 直接由幂函数的图像特征判定。

9 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像在第一象限，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}-1$ 的图像可看作是由 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像向下平移一个单位长度得到的，将 $y=x^{\frac{1}{2}}-1$ 的图像关于 x 轴对称后即为选项 B 所示图像。

10 注意到函数 $y=x^2\geqslant0$，其图像关于 y 轴对称，该函数图像应与②对应；$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域、值域都是 $[0,+\infty)$，该函数图像应与③对应；$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$，其图像应与④对应。

11 当 $a<0$ 时，函数 $y=ax-\frac{1}{a}$ 是减函数，且在 y 轴上的截距 $-\frac{1}{a}>0$，$y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 A，D项均不正确。对于 B，C 项，若 $a>0$，则 $y=ax-\frac{1}{a}$ 是增函数，B 项错，C 项正确，故选 C。

12 由幂函数的定义，可得 $m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 2。

当 $m=1$ 时，$y=x^{-2}$，其图像不过原点；当 $m=2$ 时，$y=x^0$，其图像不过原点。故 $m=1$ 或 2。

13 函数 $y=x^{-2}$，$y=x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 中令 $x=4$ 得到的函数值依次为 $\frac{1}{16}$，16，2，函数值由大到小对应的解析式为 $y=x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-2}$，因此相应于曲线 C_1，C_2，C_3 的 n 值依次为 2，$\frac{1}{2}$，-2，故选 B。

14 设幂函数为 $y=x^\alpha$（α 为常数）。

因为函数 $f(x)$ 的图像过点 $(4,2)$，所以 $2=4^\alpha$，

所以 $\alpha=\frac{1}{2}$。所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

所以 $f(\frac{1}{8})=(\frac{1}{8})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

15 $\alpha=-1,1,3$ 时图像在第一，第三象限，$\alpha=\frac{1}{2}$ 时，图像仅在第一象限。

16 由一次函数的性质知函数 $y=a(x-4)+2$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图像恒过定点 $P(4,2)$。

设幂函数为 $f(x)=x^\alpha$，由 P 在幂函数 $f(x)$ 的图像上，

可得 $4^\alpha=2$，解得 $\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$。

17 幂函数 $y=x^n$，只有当 $n>0$ 时，则其图像才都经过点 $(1,1)$ 和点 $(0,0)$，故①错误；幂函数 $y=x^n$，当 $n=1$ 时，其图像就是一条直线，故②错误；幂函数 $y=x^n$，当 $n=0$ 时，其图像是 $y=1$ 这条直线上去除 $(0,1)$ 点后的剩余部分，故③错误；④显然不对，例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数。根据幂函数的性质可知：只有⑤⑥是正确的。

19 因为 $f(x)=x^3$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图像关于原点对称。

20 因为幂函数 $f(x)=x^{m-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $m-1>0$，解得 $m>1$。

21 由题意知 $m^2-m-6<0$，解得 $-2<m<3$。又因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m\in\{-1,0,1,2\}$，故选 A。

22 因为 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是增函数，所以 $1.2^{\frac{1}{2}}>(\frac{10}{9})^{\frac{1}{2}}>1.1^{\frac{1}{2}}$，即 $a>b>c$。

23 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 $3m-5<0$（$m\in\mathbf{N}$），则 $m=0$ 或 $m=1$，当 $m=0$ 时，$f(x)=x^{-5}$ 是奇函数，不合题意。当 $m=1$ 时，$f(x)=x^{-2}$ 是偶函数，因此 $m=1$，故选 B。

24 $a=2^{0.3}=8^{0.1}$，$b=3^{0.2}=9^{0.1}$，$c=7^{0.1}$，由幂函数 $y=x^{0.1}$ 在 $(0,$

$+\infty$)上单调递增，可知 $c<a<b$。

25 因为函数 $y=(\frac{2}{5})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，又 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，所以 $(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}<(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，即 $a<b$。又因为函数 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，

所以 $(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}>(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，即 $c>b$，所以 $a<b<c$。

26 由已知得 $2^\alpha=\frac{1}{2}$，解得 $\alpha=-1$，所以 $g(x)=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$。因为 $g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=-3$。

27 根据幂函数的定义得，$m^2-m-1=1$，

解得 $m=2$ 或 $m=-1$，

因为函数在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

所以 $-5m-3<0$，即 $m>-\frac{3}{5}$，

故 $m=-1$ 舍去，所以 $m=2$。

28 因为幂函数 $y=x^{\frac{1}{n-3}}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减。所以指数 $\frac{1}{n-3}<0$。即可得 $n<3$。又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=1$ 或 2。当 $n=1$ 时，函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$，则定义域为 $(0,+\infty)$，且单调递减。符合题意；当 $n=2$ 时，函数 $y=x^{-1}$ 的定义域是 $x\neq0$。不符合题意。综上 $n=1$。

29 因为 $x^{\frac{1}{2}}-x<0$，所以 $x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})<0$。因为 $x\geqslant0$，所以 $1-x^{\frac{1}{2}}<0$，所以 $x^{\frac{1}{2}}>1$，所以 $x>1$。

课时 2　函数的奇偶性

正文P42

答案

1 C	2 C	3 C	4 C	5 B	6 B
7 D	8 2	9 1	10 B	11 B	12 A
13 B	14 A	15 A			

16 $[-1,0],[1,+\infty)$　**17** ②④

18 (1)当 $x\in Q$ 时 $-x\in Q$，$f(-x)=1=f(x)$。同理，x 为无理数时，$-x$ 也为无理数。此时 $f(-x)=-1=f(x)$，综上可知 $f(x)$ 为偶函数。(2)①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为偶函数。②当 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数。

19 (1)证明：由已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=-x$ 得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，令 $x=y=0$ 得 $f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$。所以 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数。

(2)因为 $f(x)$ 为奇函数。

所以 $f(-3)=-f(3)=a$，

所以 $f(3)=-a$。

又 $f(12)=f(6)+f(6)=2f(3)+2f(3)=4f(3)$，所以 $f(12)=-4a$。

20 C	21 B	22 D	23 A	24 A	25 C
26 0	27 0	28 14			

29 (ⅰ)由 $f(x)$ 是奇函数，求 a 的值，过程如下：

若 $f(x)$ 是奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$。

当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=a(-x)^2+(-x)=ax^2-x$，

又当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+x$，所以 $-f(x)=x^2-x$。

由 $f(-x)=-f(x)$，得 $ax^2-x=x^2-x$，故 $a=1$。

(ⅱ)证明 $f(x)=\begin{cases}-x^2+x,x>0,\\0,x=0,\\x^2+x,x<0\end{cases}$ 是奇函数，过程如下：

当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=-(-x^2+x)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=-(-x)^2+(-x)=-(x^2+x)=-f(x)$；

当 $x=0$ 时，$-x=0$，则 $f(-x)=0=-f(x)$。

所以 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数。

故当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 是奇函数。

30 由 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(m)+f(m-1)>0$，得 $f(m)>-f(m-1)=f(1-m)$。

因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，且在 $[-2,2]$ 上为奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，

则 $\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant2,\\-2\leqslant1-m\leqslant2,\\m<1-m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant2,\\-1\leqslant m\leqslant3,\\m<\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$，

故实数 m 的取值范围为 $[-1,\frac{1}{2})$。

31 (1)因为函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-3)=f(3)=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$。

(2)当 $x\geqslant0$ 时，由 $f(x)=\frac{1}{3}$ 得，$\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{3}$，解得 $x=2$。又函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-2)=f(2)=\frac{1}{3}$。

所以 $x=-2$ 或 $x=2$。

(3)当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=\frac{(-x)-1}{(-x)+1}=\frac{x+1}{x-1}$，又函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$。所以 $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1},x\geqslant0,\\\frac{x+1}{x-1},x<0。\end{cases}$

解析

1 由奇函数、偶函数的性质，知①②说法正确；对于③，如 $f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它是奇函数，但它的图像不过原点，所以③说法错误；对于④，如 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它是偶函数，但它的图像不与 y 轴相交，所

以④说法错误。故选 C。

2 $y=-x$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 都是奇函数，$y=x^2+2$ 是偶函数，$y=\frac{x-1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq-1\}$，不关于原点对称，故 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 既不是奇函数也不是偶函数，故选 C。

3 因为 $f(x)=0,x\in\{-2,2\}$，满足 $f(-x)=\pm f(x)$。所以该映射表示的既是奇函数又是偶函数。

4 由 $f(-x)=-f(x)$，知 $x=-a$ 时。$f(x)=f(-a)=-f(a)$。

5 因为 $f(-x)=-f(x)$。所以 $f(0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$。

6 由偶函数的定义，知 $[a-1,2a]$ 关于原点对称，所以 $2a=1-a$，解得 $a=\frac{1}{3}$。又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b=0$，所以 $a+b=\frac{1}{3}$。

7 因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$，所以 $f(-1)=-f(1)=-(1+1)=-2$。故选 D。

8 偶函数的定义域关于原点对称，故 $t-4=-t$，得 $t=2$。

9 一个函数的定义域关于原点对称，不一定是奇函数，还必须要看 $f(-x)$ 与 $-f(x)$ 是否相等，所以①是错误的；②正确；$f(x)=0(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于 y 轴对称，$f(x)$ 既是奇函数又是偶函数，③不正确。

10 由于 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，其图像关于 y 轴对称。

11 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$。又因为 $x\in(-a,a)$ 关于原点对称，所以 $F(x)$ 是偶函数。

12 函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，又因为 $f(-x)=\frac{1}{-x}-x^3=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，故其图像关于坐标原点对称。

13 由题意可知：$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，逐一考查所给的函数：选项 A 中，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$，该函数为偶函数，说法正确；选项 B 中，$-g(-x)=-g(x)$，该函数为偶函数，说法不正确；选项 C 中 $f(|-x|)+g(-x)=f(|x|)+g(-x)=f(|x|)+g(x)$，该函数为偶函数，说法正确；选项 D 中 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)\neq f(x)+g(x)$ 且 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)\neq-[f(x)+g(x)]$，该函数为非奇非偶函数，说法正确。

14 因为 $\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\|x+2|-2\neq0,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$，关于原点对称，此时 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+2|-2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$。又 $f(-x)=\frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+2|-2}$ 为奇函数。

15 若 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，即 $ax^2+bx+c=ax^2-bx+c$，所以 $b=0$。故 $g(x)=ax^3+bx^2+cx=ax^3+cx$，故有 $g(-x)=a(-x)^3+c(-x)=-(ax^3+cx)=-g(x)$，故函数 $g(x)$ 为奇函数。

16 偶函数的图像关于 y 轴对称，可知函数 $f(x)$ 的增区间为 $[-1,0]$，$[1,+\infty)$。

17 对于函数 $f(x)=x^2$，满足 $f(0)=0$，$f(0)<f(4)$，但 $f(x)$ 是偶函数，在定义域 $\mathbf{R}$ 内不具有单调性，所以①③错误，易知②④正确。

20 因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)-f(-x)=2f(x)$，其值与 $f(x)$ 的取值有关，$f(x)\cdot f(-x)=-f^2(x)\leqslant0$，故选 C。

21 设 $g(x)=x^5+ax^3+bx$，则 $g(x)$ 为奇函数，由题设可得 $f(-3)=g(-3)-8=5$，求得 $g(-3)=13$。

又 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(3)=-g(-3)=-13$，于是 $f(3)=g(3)-8=-13-8=-21$。

22 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$，则 $f(4)=-f(0)=0$。又 $f(x)=-f(-x)$ 且 $f(x-4)=-f(x)$，所以 $f(3)=-f(-3)=-f(1-4)=f(1)$。又 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上是增函数，所以 $f(1)>f(0)$，即 $f(1)>0$，所以 $f(-1)=-f(1)<0$，$f(3)=f(1)>0$，于是 $f(-1)<f(4)<f(3)$。

23 因为 $f(x)$ 为奇函数，$f(3)=0$，所以 $f(-3)=0$。因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，所以 $\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)>0$。当 $x>0$ 时，$f(x)>f(3)$，所以 $x>3$；当 $x<0$ 时，所以 $f(x)>f(-3)$，所以 $-3<x<0$。所以原不等式的解集为 $(-3,0)\cup(3,+\infty)$。

24 由于 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则不等式 $f(2x-1)<f(\frac{1}{3})$，即 $-\frac{1}{3}<2x-1<\frac{1}{3}$，解得 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$。

25 因为对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$，所以令 $x_1=x_2=0$，得 $f(0)=-1$；令 $x_1=x$，$x_2=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)+1$，所以 $g(x)=f(x)+1=-f(-x)-1=-[f(-x)+1]=-g(-x)$，所以 $g(x)=f(x)+1$ 为奇函数。故选 C。

26 由题意，知函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，所以其图像与 x 轴的四个交点也两两成对关于 y 轴对称，即方程 $f(x)=0$ 的实根两两互为相反数，故其所有实根之和是 0。

27 $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=-(1+\sqrt{2})$。因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(\frac{1}{1-\sqrt{2}})=f(-(1+\sqrt{2}))=f(1+\sqrt{2})$，故 $f(1+\sqrt{2})-f(\frac{1}{1-\sqrt{2}})=f(1+\sqrt{2})-f(1+\sqrt{2})=0$。

28 因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-2)=-f(2)=-(2^2-\frac{m}{2})=\frac{m}{2}-4=3$，解得 $m=14$。

课时 3 函数性质的应用

➡ 正文P45

答案

1 B　2 D　3 A　4 D　5 B

6 D　7 A　8 0

9 $f(x)=-\sqrt[3]{-x+1}$

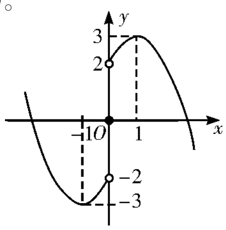
10 $f(1)<f(2)<f(-3)$

11 $\{x\mid -2<x<-1$ 或 $0<x<1$ 或 $2<x<3\}$

12 $f(x)=-2x^2+4$　13 -8

14 (1)设 $x<0$,则 $-x>0$,所以 $f(-x)=-(-x)^2+2\times(-x)+2=-x^2-2x+2$,又函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=x^2+2x-2$。又 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数,$f(0)=0$,所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-2,x<0,\\0,x=0,\\-x^2+2x+2,x>0。\end{cases}$

(2)先画出 $y=f(x)(x>0)$ 的图像,然后利用奇函数图像的对称性,作出已知函数图像关于原点对称的图像即可得到相应函数的图像,如图所示。由图可知,函数的单调增区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$;单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$。



第 14 题图

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 -3。

15 (1)若函数 $f(x)=\dfrac{mx+1}{1+x^2}$ 是 **R** 上的偶函数,

则 $f(-x)=f(x)$,即 $\dfrac{m(-x)+1}{1+(-x)^2}=\dfrac{mx+1}{1+x^2}$,解得 $m=0$。

(2)由(1)知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

设任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{1+x_1^2}-\dfrac{1}{1+x_2^2}=\dfrac{1+x_2^2-1-x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\dfrac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$,因为 $x_1<x_2\leqslant0$,所以 $x_2+x_1<0$,$x_2-x_1>0$,$(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增。

(3)由(2)知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数。

又 $f(x)$ 是偶函数,则 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数,又 $f(-3)=\dfrac{1}{10}$,$f(0)=1$,$f(2)=\dfrac{1}{5}$,所以 $f(x)$ 在 $[-3,2]$ 上的最大值为 1,最小值为 $\dfrac{1}{10}$。

16 (1)由 $f(1-a^2)+f(1-a)<0$,

得 $f(1-a^2)<-f(1-a)$。

因为 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数,

所以 $-f(1-a)=f(a-1)$,所以 $f(1-a^2)<f(a-1)$。

又 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减,

所以 $\begin{cases}-1\leqslant1-a^2\leqslant1,\\-1\leqslant1-a\leqslant1,\\-1\leqslant a-1\leqslant1,\\1-a^2>a-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0\leqslant a^2\leqslant2,\\0\leqslant a\leqslant2,\\-2<a<1。\end{cases}$

所以 $0\leqslant a<1$。所以 a 的取值范围是 $[0,1)$。

(2)因为函数 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(x)=f(|x|)$。

所以 $f(1-m)=f(|1-m|)$,$f(m)=f(|m|)$。

所以原不等式等价于 $\begin{cases}-2\leqslant1-m\leqslant2,\\-2\leqslant m\leqslant2,\\|1-m|>|m|,\end{cases}$

解得 $-1\leqslant m<\dfrac{1}{2}$。

所以实数 m 的取值范围是 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$。

17 (1)因为函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ 是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,故 $\dfrac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$,即 $\dfrac{ax^2+1}{-bx+c}=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$,所以 $-bx+c=-(bx+c)$,即 $c=-c$,解得 $c=0$。所以 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx}$。而 $f(1)=\dfrac{a\times1^2+1}{b\times1}=\dfrac{a+1}{b}=3$,所以 $a+1=3b$①。又 $f(2)=5$,所以 $\dfrac{a\times2^2+1}{b\times2}=\dfrac{4a+1}{2b}=5$,即 $4a+1=10b$②,解①②组成的方程组,得

$\begin{cases}a=\dfrac{7}{2},\\b=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a=\dfrac{7}{2},\\b=\dfrac{3}{2},\\c=0。\end{cases}$

(2)因为函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ 是偶函数,

所以 $f(-x)=f(x)$,

故 $\dfrac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$,即 $\dfrac{ax^2+1}{-bx+c}=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$。所以 $-bx+c=bx+c$,即 $b=-b$,解得 $b=0$。故 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{c}$。

由题意知 $f(1)=2$,$f(2)=6$,即

$\begin{cases}\dfrac{a\times1^2+1}{c}=2,\\\dfrac{a\times2^2+1}{c}=6,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a+1=2c,\\4a+1=6c。\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\c=\dfrac{3}{2}。\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a=2,\\b=0,\\c=\dfrac{3}{2}。\end{cases}$

18 (1)由题意,得 $f(-2)=f(2)=2\times(3-2)=2$。

(2)当 $x<-3$ 时,$-x>3$,

所以 $f(x)=f(-x)=(-x-3)(a+x)=-(x+3)\cdot(a+x)$,

所以当 $x<-3$ 时，$f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-(x+3)(a+x)$。

(3) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以它在区间 $[-5,5]$ 上的最大值为它在区间 $[0,5]$ 上的最大值。

当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x^2+3x,0\leqslant x\leqslant3,\\-x^2+(a+3)x-3a,x>3。\end{cases}$

①当 $a\leqslant3$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\frac{3}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{3}{2},5]$ 上单调递减，所以 $g(a)=f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$。

②当 $3<a<7$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\frac{3}{2}]$ 与 $[3,\frac{3+a}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{3}{2},3]$ 与 $[\frac{3+a}{2},5]$ 上单调递减，

所以此时只需比较 $f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$ 与 $f(\frac{3+a}{2})=\frac{(a-3)^2}{4}$ 的大小。

（ⅰ）当 $3<a\leqslant6$ 时，$\frac{9}{4}\geqslant\frac{(a-3)^2}{4}$，

所以 $g(a)=f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$；

（ⅱ）当 $6<a<7$ 时，$\frac{9}{4}<\frac{(a-3)^2}{4}$，

所以 $g(a)=f(\frac{3+a}{2})=\frac{(a-3)^2}{4}$，

③当 $a\geqslant7$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\frac{3}{2}]$ 与 $[3,5]$ 上单调递增，在 $[\frac{3}{2},3]$ 上单调递减，且 $f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}<f(5)=2(a-5)$，所以 $g(a)=f(5)=2(a-5)$。

综上所述，$g(a)=\begin{cases}\frac{9}{4},a\leqslant6,\\\frac{(a-3)^2}{4},6<a<7,\\2(a-5),a\geqslant7。\end{cases}$

19 (1) 设 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ 的定义域为 D，因为 $h(x)$ 为奇函数，

所以对任意 $x\in D$，$h(-x)=-h(x)$ 成立，解得 $b=0$。

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，

所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $2x+b\leqslant x^2+bx+c$，

即 $x^2+(b-2)x+c-b\geqslant0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立。

由 $(b-2)^2-4(c-b)\leqslant0$，得 $c\geqslant\frac{b^2}{4}+1$，即 $c\geqslant1$，

于是 b,c 满足的条件为 $b=0,c\geqslant1$。

(2) 当 $b=0$ 时，$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+c}{2x}=\frac{1}{2}x+\frac{c}{2x}(c\geqslant1)$。

因为 $h(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，

所以任取 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$h(x_2)-h(x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(1-\frac{c}{x_1x_2})>0$ 恒成立，

即任取 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$1-\frac{c}{x_1x_2}>0$ 恒成立，

也就是 $c<x_1x_2$ 恒成立，所以 $c\leqslant4$，

结合(1)，得实数 c 的取值范围是 $[1,4]$。

解析

1 因为 $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $[3,7]$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是增函数；又奇函数的图像关于原点对称，所以 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上有最大值 -5。

2 $y=(x+2)(x-a)=x^2+(2-a)x-2a$，由函数为偶函数可得 $2-a=0$，解得 $a=2$。

3 要使函数式有意义，则 $x\neq-\frac{1}{2}$，$x\neq a$，而函数为奇函数，所以其定义域应关于原点对称，由此得 $a=\frac{1}{2}$。经验证，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 是奇函数。

4 由 $x\cdot f(x)<0$，得 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<0,\end{cases}$ 而 $f(-3)=0$，且 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(3)=0$，即 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>f(-3)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<f(3)。\end{cases}$ 因为 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 内是增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数，所以原不等式的解集为 $\{x|-3<x<0$ 或 $0<x<3\}$。

5 由题意知 $f(-1)+g(1)=-f(1)+g(1)=2$，$f(1)+g(-1)=f(1)+g(1)=4$。两式相加，解得 $g(1)=3$。

6 令 $g(x)=x^5-ax^3+bx$，则 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)=g(x)+2$。因为 $f(-5)=17$，所以 $g(-5)+2=17$，

所以 $g(-5)=15$。所以 $f(5)=g(5)+2=-g(-5)+2=-15+2=-13$。

7 令 $x=-\frac{1}{2}$，则 $-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$，得 $f(\frac{1}{2})=0$。由 $xf(x+1)=(1+x)\cdot f(x)$，得 $f(x+1)=\frac{x+1}{x}\cdot f(x)(x\neq0)$，所以 $f(\frac{5}{2})=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\cdot f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}\cdot f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}f(\frac{1}{2})=0$，故 $f(\frac{5}{2})=0$，故选 A。

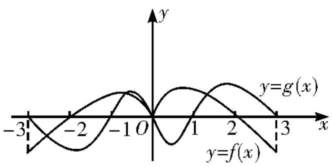
8 显然 $x\in\mathbf{R}$，由已知得 $f(-x)=(-x)^2-|-x+a|=x^2-|x-a|$，又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，即 $x^2-|x+a|=x^2-|x-a|$，即 $|x+a|=|x-a|$，又 $x\in\mathbf{R}$，所以 $a=0$。

9 当 $x<0$ 时，$-x>0$，又 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(x)=-f(-x)=-\sqrt[3]{-x+1}$。

10 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,-1]$ 上是单调减函数，所以 $f(-1)<f(-2)<f(-3)$。又函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，即 $f(-1)=f(1)$，$f(-2)=f(2)$，所以 $f(1)<f(2)<f(-3)$。

11 $y=f(x)$ 是偶函数，$y=g(x)$ 是奇函数。根据函数图像的对称

性画出 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 在 $[-3,0]$ 上的图像如图所示。



第 11 题图

$\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 等价于 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$，或 $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)>0,\end{cases}$

可求得其解集是 $\{x|-2<x<-1$ 或 $0<x<1$ 或 $2<x<3\}$。

12 因为 $f(x)=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$ 是偶函数，则 $b(-x)^2+(2a+ab)(-x)+2a^2=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$，所以 $-(2a+ab)=2a+ab$，即 $2a+ab=0$，所以 $a=0$ 或 $b=-2$。当 $a=0$ 时，$f(x)=bx^2$，因为 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$，而 $f(x)=bx^2$ 的值域不可能为 $(-\infty,4]$，所以 $a\neq0$。当 $b=-2$ 时，$f(x)=-2x^2+2a^2$，值域为 $(-\infty,2a^2]$，所以 $2a^2=4$。于是所求函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-2x^2+4$。

13 因为 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时是单调函数，由偶函数的性质可知，若 $f(x)=f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$，则只有两种情况：①$x=\frac{x+3}{x+4}$；②$x+\frac{x+3}{x+4}=0$。由①知 $x^2+3x-3=0$，则两根之和 $x_1+x_2=-3$；由②知 $x^2+5x+3=0$，则两根之和 $x_3+x_4=-5$。所以满足条件的所有 x 之和为 -8。

单元综合

第二章 专题 突破专练

正文 P47

答案

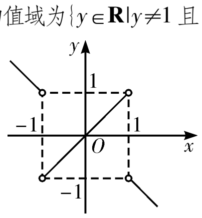
1 A　**2** C

3 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x+3, x\in[-2,0),\\-\frac{1}{2}x+3, x\in[0,2),\\2, x\in[2,4)\end{cases}$　**4** $(1,5)$

5 6　**6** $-\frac{1}{2}$

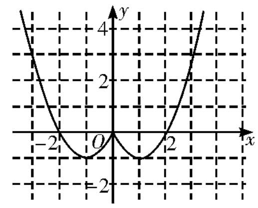
7 由题意，得 $y=\begin{cases}x, & -1<x<1,\\-x, & x<-1 \text{ 或 } x>1。\end{cases}$ 作出图像如图所示。

根据图像可知函数的值域为 $\{y\in\mathbf{R}|y\neq1$ 且 $y\neq-1\}$。



第 7 题图

8 (1) 由 $f(x)$ 为偶函数可知，其图像关于 y 轴对称，作出已知图像关于 y 轴对称的图像，即得该函数的完整图像，如图所示。



第 8 题图

由图可知，函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$。

(2) 由题意知，当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$。由偶函数的性质可得 $f(x)\geqslant-1$，即函数的值域为 $\{y|y\geqslant-1\}$。

9 C　**10** B　**11** A　**12** C

13 $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

14 由 $-1\leqslant x-5\leqslant5$，得 $4\leqslant x\leqslant10$，所以函数 $f(x-5)$ 的定义域是 $[4,10]$。

15 $-\frac{x(x+1)}{2}$

16 (1) $f(1)=\frac{1}{2-1}=1$，$g(1)=1+4=5$。

(2) $f(g(1))=f(5)=\frac{1}{2-5}=-\frac{1}{3}$，

$g(f(1))=g(1)=1+4=5$。

(3) $f(g(x))=f(x+4)=\frac{1}{2-(x+4)}=\frac{1}{-2-x}$，$x\neq-2$。

$g(f(x))=g\left(\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2-x}+4$，$x\neq2$。

17 C

18 令 $x=y$，得 $[f(x)]^2+[g(x)]^2=g(0)$。令 $x=0$，易得 $g(0)=0$ 或 $g(0)=1$。若 $g(0)=0$，令 $x=y=1$，则 $[g(1)]^2+[f(1)]^2=g(0)=0$，则 $[g(1)]^2=-1$，不符合题意，舍去；若 $g(0)=1$，则 $1=[g(1)]^2+1$，所以 $g(1)=0$，$g(2)=g(1-(-1))=g(1)g(-1)+f(1)\cdot f(-1)=-1$。

综上，$g(0)=1$，$g(1)=0$，$g(2)=-1$。

19 (1) 令 $x_1=x_2>0$，得 $f(1)=f(x_1)-f(x_1)=0$，故 $f(1)=0$。

(2) 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，则 $\frac{x_1}{x_2}>1$，

由于当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<0$，即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，因此 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数。

(3) 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数，

所以 $f(x)$ 在 $[2,9]$ 上的最小值为 $f(9)$。

由 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$，得 $f\left(\frac{9}{3}\right)=f(9)-f(3)$，而 $f(3)=-1$，所以 $f(9)=-2$，所以 $f(x)$ 在 $[2,9]$ 上的最小值为 -2。

20 因为对任意的正实数 x,y,都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$,
所以令 $x=y=1$,则 $f(1\times1)=f(1)+f(1)=2f(1)$,所以 $f(1)=0$。

(1)令 $y=\frac{1}{x}$,得 $f(x\cdot\frac{1}{x})=f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$,所以 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$。

(2)任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则 $\frac{x_2}{x_1}>1$,则 $f(\frac{x_2}{x_1})<0$,又由(1)知 $-f(x)=f(\frac{1}{x})$,所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(\frac{1}{x_1})=f(\frac{x_2}{x_1})<0$,

所以 $f(x_2)<f(x_1)$,所以 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数。

(3)因为 $f(1)=f(2\times\frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{2})=0$,$f(\frac{1}{2})=1$,

所以 $f(2)=-1$,所以 $f(4)=f(2\times2)=2f(2)=-2$,
所以 $f(2)+f(5-x)\geqslant-2\Leftrightarrow f(10-2x)\geqslant f(4)$,
因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,

所以 $\begin{cases}10-2x>0,\\10-2x\leqslant4,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant x<5$,

所以不等式的解集为 $\{x|3\leqslant x<5\}$。

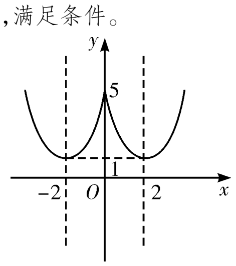
解析

1 定义域中的每一个 x 都有且仅有一个 y 值与之相对应,满足条件的只有①⑤。

2 刚开始交易时,即时价格和平均价格应该相等,A,D 错误;开始交易后,平均价格应该跟随即时价格变动,即即时价格与平均价格同增同减,B 错误。故选 C。

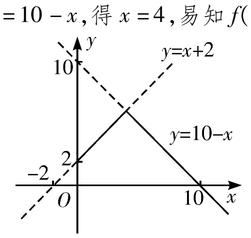
3 此函数在三个区间上的图像各不相同,故分别写出其在各区间内的函数表达式。

4 令 $f(x)=x^2-4|x|+5$,作出其图像,如图所示。由图像可知,当 $1<m<5$ 时,满足条件。



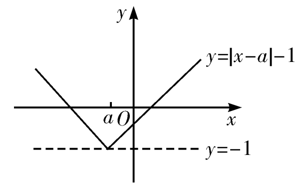
第 4 题图

5 如图,在同一平面直角坐标系内画出函数 $y=x+2$ 和 $y=10-x$ 的图像。根据 $\min\{x+2,10-x\}(x\geqslant0)$ 的含义可知,$f(x)=\begin{cases}x+2,0\leqslant x\leqslant4,\\10-x,x>4,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的图像应为图中的实线部分。令 $x+2=10-x$,得 $x=4$,易知 $f(x)_{\max}=f(4)=6$。



第 5 题图

6 函数 $y=|x-a|-1$ 的大致图像如图所示。



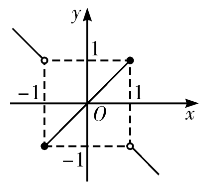
第 6 题图

若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|x-a|-1$ 的图像只有一个交点,只需 $2a=-1$,可得 $a=-\frac{1}{2}$。

7 【点评】作函数图像时,一般先对所给解析式进行变形,研究函数性质,再进行作图。要注意变形过程中定义域的等价性。

【易错警示】本题易出现以下错误:

$y=\begin{cases}x,-1\leqslant x\leqslant1,\\-x,x<-1\text{ 或 }x>1\text{。}\end{cases}$ 作出图像如图所示。根据图像可知函数的值域为 $\mathbf{R}$。



易错警示图

【错因分析】由原函数可知,定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$,上述解法将原函数改写成分段的形式时,人为地扩大了定义域的取值范围,从而产生了错误。

9 对于选项 A,$f(2x)=|2x|=2|x|=2f(x)$;对于选项 B,$f(x)=x-|x|=\begin{cases}0(x\geqslant0),\\2x(x<0),\end{cases}$ 当 $x\geqslant0$ 时,$f(2x)=0=2f(x)$,当 $x<0$ 时,$f(2x)=4x=2\cdot2x=2f(x)$,恒有 $f(2x)=2f(x)$;对于选项 D,$f(2x)=-2x=2(-x)=2f(x)$;对于选项 C,$f(2x)=2x+1=2f(x)-1$。

10 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,又 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以 $f(6)=f(2)=f(0+2)=-f(0)=0$。

11 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1,\\0\leqslant2x+a\leqslant1,\\0<a<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant1-a,\\-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1-a}{2},\\0<a<1\end{cases}$ 得 $-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1-a}{2}$。

12 设 $t=f(x)$,由题意可得 $g(x)=f(t)=at^2+bt+c,t\geqslant k$,函数 $y=at^2+bt+c,t\geqslant k$ 的图像为 $y=f(x)$ 的图像的一部分,即有 $g(x)$ 的值域为 $f(x)$ 的值域的子集,即 $[2,+\infty)\subseteq[k,+\infty)$,可得 $k\leqslant2$,即有 k 的最大值为 2。故选 C。

13 由题意知 $0\leqslant2x-1<\frac{1}{3}$,故 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$。

15 当 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时,有 $0\leqslant x+1\leqslant1$,所以 $f(1+x)=(1+x)[1-(1+x)]=-x(1+x)$,又 $f(x+1)=2f(x)$,所以 $f(x)=\frac{1}{2}f(1+x)=-\frac{x(x+1)}{2}$。

17 根据题意,令 $x=y=\sqrt{2}$,由 $f(xy)=f(x)+f(y)$,得 $f(\sqrt{2}\times\sqrt{2})=f(\sqrt{2})+f(\sqrt{2})$,

即 $f(2)=2f(\sqrt{2})=1$,所以 $f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$。

【点评】在定义域内,对抽象函数中的变量巧妙赋值是解决抽象函数问题的关键,常用 0,1 等赋值。

第二章 真题 分类专练

➡正文 P49

答案

1 D　2 B　3 D　4 D　5 B

6 1　7 C　8 C　9 A

10 $(0,\frac{1}{6})$

11 (1)由于 $a\geqslant 3$,故

当 $x\leqslant 1$ 时,$(x^2-2ax+4a-2)-2|x-1|=x^2+2(a-1)\cdot(2-x)>0$,

当 $x>1$ 时,$(x^2-2ax+4a-2)-2|x-1|=(x-2)\cdot(x-2a)$。

由 $(x-2)(x-2a)\leqslant 0$ 得 $2\leqslant x\leqslant 2a$。

所以使得等式 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围为 $[2,2a]$。

(2)(ⅰ)设函数 $f(x)=2|x-1|$,$g(x)=x^2-2ax+4a-2$,则 $f(x)_{\min}=f(1)=0$,$g(x)_{\min}=g(a)=-a^2+4a-2$,

所以由 $F(x)$ 的定义知 $m(a)=\min\{f(1),g(a)\}$,即

$$m(a)=\begin{cases}0,3\leqslant a\leqslant 2+\sqrt{2},\\ -a^2+4a-2,a>2+\sqrt{2}。\end{cases}$$

(ⅱ)当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,

$F(x)=f(x)\leqslant\max\{f(0),f(2)\}=2=F(2)$,

当 $2\leqslant x\leqslant 6$ 时,

$F(x)=g(x)\leqslant\max\{g(2),g(6)\}=\max\{2,34-8a\}=\max\{F(2),F(6)\}$。

所以 $M(a)=\begin{cases}34-8a,3\leqslant a<4,\\ 2,a\geqslant 4。\end{cases}$

解析

1 设 $x\in(0,+\infty)$,则 $-x\in(-\infty,0)$,

所以 $f(-x)=-2x^3+x^2$,

因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)=2x^3-x^2$,故选 D。

3 因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减,且 $f(1)=-1$,所以 $f(-1)=-f(1)=1$,由 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$,得 $-1\leqslant x-2\leqslant 1$,所以 $1\leqslant x\leqslant 3$。

5 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,故 $f(x)g(x)$ 为奇函数,$|g(x)|$,$|f(x)|$ 都是偶函数,因此 $f(x)|g(x)|$ 为奇函数,$|f(x)|g(x)$ 为偶函数,$|f(x)g(x)|$ 为偶函数。

6 方法一　因为函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $(-x)^3+(a-1)(-x)^2+a(-x)=-[x^3+(a-1)\cdot x^2+ax]$,所以 $2(a-1)x^2=0$,因为 $x\in\mathbf{R}$,所以 $a=1$。

方法二　因为函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$ 为奇函数,所以 $f(-1)+f(1)=0$,所以 $-1+a-1-a+(1+a-1+a)=0$,解得 $a=1$。

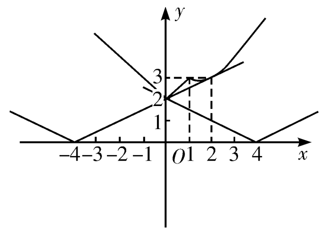
方法三　易知 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax=x[x^2+(a-1)x+a]$,因为 $f(x)$ 为奇函数,所以函数 $g(x)=x^2+(a-1)x+a$ 为偶函数,所以 $a-1=0$,解得 $a=1$。

7 当 $0<a<1$ 时,$a+1>1$,$f(a)=\sqrt{a}$,$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$,因为 $f(a)=f(a+1)$,所以 $\sqrt{a}=2a$,解得 $a=\frac{1}{4}$。所以 $f(\frac{1}{a})=f(4)=2\times(4-1)=6$。当 $a>1$ 时,$a+1>2$,所以 $f(a)=2(a-1)$,$f(a+1)=2(a+1-1)=2a$,所以 $2(a-1)=2a$,无解。当 $a=1$ 时,$a+1=2$,$f(1)=0$,$f(2)=2$,不符合题意。综上 $f(\frac{1}{a})=6$。

8 由已知得 $\begin{cases}-1+a-b+c=-8+4a-2b+c,\\ -1+a-b+c=-27+9a-3b+c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6,\\ b=11。\end{cases}$ 又 $0<f(-1)=c-6\leqslant 3$,所以 $6<c\leqslant 9$。

【思路点拨】根据已知三个函数值相等,建立方程组求出 a,b,再建立关于 c 的不等式即可求出 c 的取值范围。

9 作出 $f(x)$ 的图像如图所示,



第 9 题图

当 $y=\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 的图像经过点 $(0,2)$ 时,可知 $a=\pm 2$。

当 $y=\frac{x}{2}+a$ 的图像与 $y=x+\frac{2}{x}$ 的图像相切时,由 $\frac{x}{2}+a=x+\frac{2}{x}$,得 $x^2-2ax+4=0$,由 $\Delta=0$,并结合图像可得 $a=2$。要使 $f(x)\geqslant\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 恒成立,当 $a\leqslant 0$ 时,需满足 $-a\leqslant 2$,即 $-2\leqslant a\leqslant 0$,当 $a>0$ 时,需满足 $a\leqslant 2$,所以 $-2\leqslant a\leqslant 2$。

10 由图像知,要使 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)>f(x-1)$,只需 $3a-(-3a)<1$,即 $a<\frac{1}{6}$,又 a 为正实数,故 $a\in(0,\frac{1}{6})$。

第二章 单元测试卷

➡正文 P50

答案

1 B　2 B　3 D　4 B　5 A

6 B　7 D　8 B　9 B　10 D

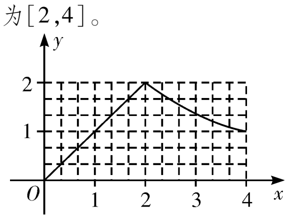
11 C　12 B

13 $[-\frac{3}{2},1)\cup(1,+\infty)$　14 6

15 $(x-1)^2+3(x\geqslant 1)$　16 $[1,9]$

17 (1)函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示。

(2)由函数 $f(x)$ 的图像得出,$f(x)$ 的最大值为 2,函数的单调递减区间为 $[2,4]$。



第 17 题图

18 (1)设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$。

由题意得 $\begin{cases}a-b=5,\\ a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-2。\end{cases}$

所以 $f(x)=3x-2$。

(2)$g(x)=f(x)-x^2=3x-2-x^2$。

由 $g(x)=0$,得 $3x-2-x^2=0$,解得 $x=1$ 或 $x=2$,

所以方程 $g(x)=0$ 的解为 1,2。

19 (1)当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时,由 $3-ax\geqslant 0$ 得 $x\leqslant\frac{3}{a}$,即函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\frac{3}{a}]$。

(2)当 $a-1>0$,即 $a>1$ 时,要使 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是减函数,则需 $3-a\times 1\geqslant 0$,此时 $1<a\leqslant 3$。

当 $a-1<0$,即 $a<1$ 时,要使 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是减函数,则需 $-a>0$,且 $3-a\times 1\geqslant 0$,此时 $a<0$。

综上所述,所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(1,3]$。

20 (1)因为 $f(-1)=0$,所以 $b=a+1$。由 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,得 $a>0,\Delta=b^2-4a=(a+1)^2-4a=(a-1)^2\leqslant 0$,

所以 $a=1$,所以 $f(x)=x^2+2x+1$,

所以 $F(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x>0,\\-(x+1)^2,x<0。\end{cases}$

(2)由(1)可知 $f(x)=x^2+2x+1$,

所以 $g(x)=f(x)-kx=x^2+(2-k)x+1$。

由 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是单调函数,知 $-\dfrac{2-k}{2}\leqslant -2$ 或 $-\dfrac{2-k}{2}\geqslant 2$,

解得 $k\leqslant -2$ 或 $k\geqslant 6$。

21 (1)由题意得,每天的销售利润 y(元)与每件的销售价 x(元)之间的函数关系式为 $y=(x-42)\cdot(-3x+204)=-3x^2+330x-8\ 568(42<x<68,x\in\mathbf{N})$。

(2)由(1)得 $y=-3(x-55)^2+507(42<x<68,x\in\mathbf{N})$,则当 $x=55$ 时,y 取得最大值,即 $y_{max}=507$。

故当每件的销售价定为 55 元时,每天可获得最大的销售利润,最大销售利润为 507 元。

22 (1)由题图可知,当函数 $f(x)$ 取得最大值时,$0<x<2$;此时 $f(x)=a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+47.42$,

又 $f(1)=44.42$,所以 $\dfrac{1}{4}a+47.42=44.42$,解得 $a=-12$;

所以 $f(x)=-12\times\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+47.42$,

当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值为 $y_{max}=47.42$,

故喝一瓶啤酒 1.5 h 血液中的酒精含量达到最大值47.42 mg/百毫升。

(2)由题意知,当车辆驾驶人员血液中的酒精含量小于 20 mg/百毫升时可以驾车,此时 $x>2$;

由 $54.27\cdot e^{-0.3x}+10.18<20$,得 $e^{-0.3x}<\dfrac{9.82}{54.27}$,

两边取自然对数,得 $\ln e^{-0.3x}<\ln\dfrac{9.82}{54.27}$,

即 $-0.3x<\ln 9.82-\ln 54.27$,

所以 $x>\dfrac{\ln 9.82-\ln 54.27}{-0.3}=\dfrac{2.28-3.99}{-0.3}=5.7$,

故喝啤酒后需 6 h 后才可以合法驾车。

解析

1 ①③正确,②④错误。

2 由题意知,函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,则 $x^2+1\geqslant 1$,所以 $y\geqslant 1$。

3 因为 $y=f(x+4)$ 为偶函数,所以 $f(-x+4)=f(x+4)$。令 $x=2$,得 $f(2)=f(-2+4)=f(2+4)=f(6)$,同理 $f(3)=f(5)$。又因为 $f(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上为减函数,$5<6$,所以 $f(5)>f(6)$。所以 $f(2)<f(3)$,$f(2)=f(6)<f(5)$,$f(3)=f(5)>f(6)$。故选 D。

4 $f(x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$,其单调减区间为 $(a,+\infty)$,$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数,则 $a\leqslant 1$,$g(x)=\dfrac{a}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数,则 $a>0$。所以 $0<a\leqslant 1$。选 B。

5 因为函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ 是定义在 $[-1-a,2a]$ 上的偶函数,所以 $-1-a+2a=0$,所以 $a=1$,所以函数定义域为 $[-2,2]$。因为函数图像的对称轴为直线 $x=0$,所以 $b=0$,故 $f(x)=x^2+1$,所以当 $x=\pm 2$ 时函数取得最大值,最大值为 5。

6 设 $\dfrac{1}{2}x-1=t$,则 $x=2t+2,t\in\mathbf{R}$,所以 $f(t)=2(2t+2)-5=4t-1$,所以 $f(x)=4x-1$。由 $f(a)=6$ 得 $4a-1=6$,即 $a=\dfrac{7}{4}$。

7 选项 A 中,一次函数中 $b<0$,二次函数中 $b=0$,排除 A;选项 B,C 中,一次函数中 $b>0$,二次函数中 $b=0$,排除 B,C。故选 D。

8 方法一　当 x 除以 10 的余数为 0,1,2,3,4,5,6 时,由题设知 $y=[\dfrac{x}{10}]$,且易验证此时 $[\dfrac{x}{10}]=[\dfrac{x+3}{10}]$。

当 x 除以 10 的余数为 7,8,9 时,由题设知 $y=[\dfrac{x}{10}]+1$,且易验证此时 $[\dfrac{x}{10}]+1=[\dfrac{x+3}{10}]$。

综上可知,必有 $y=[\dfrac{x+3}{10}]$。

方法二　由题意知,若 $x=16$,则 $y=1$,由此检验知选项 C,D 错误;若 $x=17$,则 $y=2$,由此检验知选项 A 错误。故由排除法知,本题应选 B。

9 由于函数 $f(2-x)=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $4-x^2\geqslant 0$,即 $-2\leqslant x\leqslant 2$,则 $0\leqslant 2-x\leqslant 4$。故 $0\leqslant\sqrt{x}\leqslant 4$,得 $0\leqslant x\leqslant 16$。

10 函数表达式中含有参数 a,要对参数进行分类讨论。若 $a=0$,则 $f(x)=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$,选项 C 符合;若 $a>0$,则函数定义域为 $\mathbf{R}$,选项 B 符合;若 $a<0$,则 $x\neq\pm\sqrt{-a}$,选项 A 符合,所以不可能是选项 D。

11 由奇函数在 $x=0$ 处有定义知,$f(0)=0$,故①正确;

由图像的对称性可知②正确;

由于奇函数在关于原点对称的两个区间上的单调性相同,故③不正确;

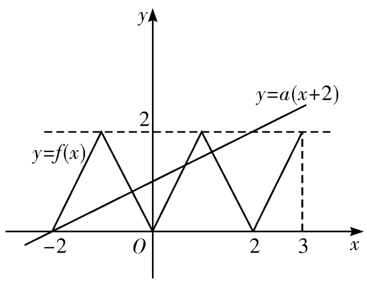
对于④,当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$,

所以 $-f(x)=f(-x)=x^2+2x$,所以 $f(x)=-x^2-2x$,故④正确。

综上可知,正确结论的序号为①②④,共 3 个。

12 方程 $ax+2a-f(x)=0$ 可转化为 $a(x+2)=f(x)$,于是问题转化为函数 $y=f(x)$ 与 $y=a(x+2)$ 的图像的交点问题。在

同一坐标系下作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=a(x+2)$ 的图像，如图所示。$y=a(x+2)$ 为过点 $(-2,0)$ 的直线，此直线在 $[-2,3]$ 上与函数 $y=f(x)$ 的图像有 4 个不同的交点，只需当 $x=1$，$x=3$ 时对应的两点的不等式满足 $\begin{cases}3a<f(1)=2,\\5a>f(3)=2,\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{5}<a<\frac{2}{3}$，故选 B。



第 12 题图

13 由 $\begin{cases}x-1\neq 0,\\2x+3\geqslant 0\end{cases}$，可得 $x\geqslant -\frac{3}{2}$ 且 $x\neq 1$，故所求函数的定义域为 $[-\frac{3}{2},1)\cup(1,+\infty)$。

14 根据已知条件，得 $g(-2)=f(-2)+9$，又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-2)=-f(2)$，则 $3=-f(2)+9$，解得 $f(2)=6$。

15 令 $\sqrt{x}+1=t$，
所以 $x=(t-1)^2(t\geqslant 1)$，
所以 $f(t)=(t-1)^2+3$，所以 $f(x)=(x-1)^2+3(x\geqslant 1)$。

16 由题意知 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}\geqslant 0$ 恒成立。
当 $a^2-1=0$ 时，$a=\pm 1$。当 $a=1$ 时不等式恒成立，当 $a=-1$ 时，无意义；
当 $a^2-1\neq 0$ 时，$\begin{cases}a^2-1>0,\\\Delta=(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot\frac{2}{a+1}\leqslant 0,\end{cases}$
解得 $a\in(1,9]$。综上所述，$a\in[1,9]$。

第三章　指数函数和对数函数

第一节　正整数指数函数

➡ 正文P53

答案

1 D　2 B　3 C　4 C　5 D　6 D

7 0 或 -1

8 D　9 D　10 D　11 B　12 A　13 B

14 $\{1,2\}$　15 $(1,4)$

16 8　17 $<$　$>$　$<$　$>$　$<$

18 (1)(3)

19 (1)设正整数指数函数为 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1,x\in\mathbf{N}^*)$，
因为函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(3,27)$，
所以 $f(3)=27$，即 $a^3=27$，解得 $a=3$，
所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=3^x(x\in\mathbf{N}^*)$。
(2) $f(5)=3^5=243$。
(3)因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{N}^*$，且在定义域上单调递增，所以 $f(x)$ 有最小值，最小值是 $f(1)=3$，$f(x)$ 无最大值。

20 B　21 A　22 A　23 A　24 D

25 $x(1+12\%)^{12}$　26 2 400 元

27 农民人均收入来源于两部分，一是工资性收入，即 $7\,800\times(1+6\%)^5=7\,800\times 1.06^5\approx 10\,452$（元），二是其他收入，即 $5\,350+5\times 160=6\,150$（元），所以 2019 年该地区农民人均收入约为 $10\,452+6\,150=16\,602$（元）。

28 (1)1999 年年底的人口数为 13 亿；
经过 1 年，2000 年年底的人口数为
$13+13\times 1‰=13(1+1‰)$（亿）；
经过 2 年，2001 年年底的人口数为
$13(1+1‰)+13(1+1‰)\times 1‰=13(1+1‰)^2$（亿）；
经过 3 年，2002 年年底的人口数为
$13(1+1‰)^2+13(1+1‰)^2\times 1‰=13(1+1‰)^3$（亿）。
所以经过 x 年后的人口数为 $13(1+1‰)^x$（亿），
所以 $y=f(x)=13(1+1‰)^x$。
(2)理论上指数函数定义域为 $\mathbf{R}$，
因为此问题以年作为单位时间，
所以 $x\in\mathbf{N}^*$ 是此函数的定义域。
(3) $y=f(x)=13(1+1‰)^x$，
因为 $1+1‰>1$，$13>0$，
所以 $y=f(x)=13(1+1‰)^x$ 是增函数。
其实际意义是随着时间的推移，人口的总数总在增长。

解析

1 由正整数指数函数的定义知①错误，②③④正确。故选 D。

2 由正整数指数函数的定义知，①③④都不是正整数指数函数，②是。故选 B。

3 $\begin{cases}a^2-3a+3=1,\\a>0,且\ a\neq 1,\end{cases}$ 所以 $a=2$。

4 因为 $3^{x^2-1}=\frac{1}{9}=3^{-2}$，所以 $x^2-1=-2$，即 $x^2=-1$，无解。

5 因为 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$，$x\in\mathbf{N}^*$，所以 $f(2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$。故选 D。

6 因为 $A=\{2,4,8,16,32,\cdots\}$，$B=\{1,4,9,16,25,\cdots\}$，所以 $2\in A$ 但 $2\notin B$，$9\in B$ 但 $9\notin A$。故选 D。

7 由题意得 $m^2+m+1=1$，解得 $m=0$ 或 -1。

8 因为函数 $y=7^x, x\in\mathbf{N}^*$ 的定义域是 $\mathbf{N}^*$，而 $\mathbf{N}^*$ 不是区间，所以该函数不存在单调递增区间。

9 底数 $0<\frac{1}{2}<1$，函数为减函数，图像下降。因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以其图像为一系列下降的点。

10 因为 $0<\frac{3}{8}<1$，所以当 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 x 由小变大时，函数值由大变小，故选 D。

11 因为函数 $f(x)=(a+1)^x$ 是正整数指数函数，且 $f(x)$ 为减函数，所以 $0<a+1<1$，所以 $-1<a<0$。故选 B。

12 由 $f(x_1)=g(x_2)=4$，$x_1>x_2$，且 $a>1$，$b>1$，可知 $f(x)=a^x$ 比 $g(x)=b^x$ 增加得慢，故 $a<b$。也可以找两个特殊函数 $y=2^x$ 与 $y=4^x$ 来验证。故选 A。

13 因为 $f(x)=3^x(x\in\mathbf{N}$ 且 $x>0)$，

所以 $y=f(-x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，

所以函数 $y=f(-x)$ 为减函数，故选 B。

14 由 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x^2}<3^{2x}$ 得 $3^{x^2-3}<3^{2x}$。

因为函数 $y=3^x, x\in\mathbf{N}^*$ 为增函数，

所以 $x^2-3<2x$，即 $x^2-2x-3<0$，

所以 $(x-3)(x+1)<0$，解得 $-1<x<3$。

又因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x=1$ 或 2。

15 令 $x-1=0$，可得 $x=1$，$f(1)=4$，所以函数 $f(x)=a^{x-1}+3$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图像必过定点 $(1,4)$。

16 $f(2)=f(3)=2^3=8$。

17 因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1, 2^x>1$。所以 $2^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$。又根据对正整数指数函数图像的研究知 $2^x<3^x$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x$。

18 由 $f(x_1)\cdot f(x_2)=2^{x_1}\cdot2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$ 知(1)正确。令 $x_1=1, x_2=2$，由 $f(x_1x_2)=2^2=4$，$f(x_1)+f(x_2)=2+4=6$ 知(2)错。由图像变化趋势知(3)正确，(4)不正确。

20 设这三种债券的月利率分别为 x,y,z，则 $100(1+x)^{12}=103\Rightarrow x\approx0.002\ 47$，$50(1+y)^6=51.4\Rightarrow y\approx0.004\ 61$，$97(1+z)^{12}=100\Rightarrow z\approx0.002\ 54$，所以选 B。

21 设商品原价格为 a，两年后价格为 $a(1+20\%)^2$，四年后价格为 $a(1+20\%)^2(1-20\%)^2=a(1-0.04)^2=0.921\ 6a$，所以 $\frac{a-0.921\ 6a}{a}\times100\%=7.84\%$。故选 A。

24 将点 $(2,4)$ 代入可得 $a=2$，故①正确；当 $t=5$ 时，$y=2^5=32>30$，故②正确；对于③，当浮萍从 4 m^2 开始，经过 1.5 个月后，浮萍蔓延为 $8\sqrt{2}\text{ m}^2<12\text{ m}^2$，故③错；由 $4-2\neq8-4$ 知④错；对于⑤，由于 $6=2\times3$，因此 $2^{t_3}=2^{t_1}\cdot2^{t_2}=2^{t_1+t_2}$，所以 $t_3=t_1+t_2$，故⑤对。

25 2011 年生产总值为 $x(1+12\%)$ 万元；

2012 年生产总值为 $x(1+12\%)^2$ 万元；…；

所以 2022 年生产总值为 $x(1+12\%)^{12}$ 万元。

26 5 年后价格为 $8\ 100\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$；10 年后价格为 $8\ 100\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$；15 年后价格为 $8\ 100\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=2\ 400$（元）。

第二节　指数扩充及其运算性质

课时1　根式与分数指数幂

➡ 正文P55

答案

1 B　**2** C　**4** C　**4** C　**5** D

6 0

7 $\sqrt{(a-3)(a^2-9)}=\sqrt{(a-3)^2(a+3)}$

$=|a-3|\sqrt{a+3}$，

已知 $\sqrt{(a-3)(a^2-9)}=(3-a)\sqrt{a+3}$，

所以 $\begin{cases}a+3\geqslant0,\\3-a\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a\leqslant3$。

8 (1) 原式 $=\sqrt[4]{0.5^4}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}-1-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$

$=0.5+\frac{5}{2}-1-\frac{3}{2}$

$=0.5$；

(2) 原式 $=-8+|\sqrt{3}-2|-(2-\sqrt{3})$

$=-8+2-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}$

$=-8$。

9 B　**10** C　**11** C　**12** B　**13** C

14 C　**15** $x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{12}}$　**16** 4　**17** 14

18 (1) 原式 $=7\times3^{\frac{1}{3}}-3\times3^{\frac{1}{3}}\times2-6\times3^{-\frac{2}{3}}+(3\times3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$

$=3^{\frac{1}{3}}-6\times3^{-\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}=2\times3^{\frac{1}{3}}-2\times3\times3^{-\frac{2}{3}}$

$=2\times3^{\frac{1}{3}}-2\times3^{\frac{1}{3}}=0$。

(2) 原式 $=\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{0.1^2}+\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3+\frac{37}{48}$

$=\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+100+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}}-3+\frac{37}{48}$

$=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}-3+\frac{37}{48}=100$。

(3) 原式 $=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{2}{3}}}\div\left(\frac{a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}}{ba^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\div(a^{-1-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}-1})^{-\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{7}{6}}b\div(ab)=a^{\frac{1}{6}}$。

19 B　**20** C　**21** B　**22** B　**23** A

24 $-9a$　**25** $-\sqrt[4]{a-1}$

26 (1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}}}$

$=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{4}}}}$

$=\sqrt{a\cdot a^{\frac{7}{8}}}=a^{\frac{15}{16}}$。

(2) $\sqrt{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a}\sqrt{\frac{a}{b^3}}}}=\sqrt{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a}\cdot\left(\frac{a}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}}}}$

$=\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot\left(\frac{b^3}{a}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot\left(\frac{b^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}}=\left(\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{8}}}{b^{\frac{3}{8}}}=a^{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\cdot b^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}}$

$=a^{\frac{7}{8}}b^{-\frac{1}{8}}$。

27 (1) 原式 $=\frac{(a^{-\frac{2}{3}})^3+(b^{-\frac{2}{3}})^3}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}-\frac{(a^{-\frac{2}{3}})^3-(b^{-\frac{2}{3}})^3}{a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}}=(a^{-\frac{2}{3}})^2-a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+(b^{-\frac{2}{3}})^2-[(a^{-\frac{2}{3}})^2+a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}+(b^{-\frac{2}{3}})^2]=-2a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}=-2(ab)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2\sqrt[3]{ab}}{ab}$。

(2) 原式 $=[(a^{-3})^2-(a^3)^2]\div[(a^{-4}+a^4+1)\cdot(a^{-1}-a)]=\frac{(a^{-2})^3-(a^2)^3}{(a^{-4}+a^4+1)(a^{-1}-a)}=\frac{(a^{-2}-a^2)(a^{-4}+1+a^4)}{(a^{-4}+a^4+1)(a^{-1}-a)}=\frac{(a^{-1}-a)(a^{-1}+a)}{a^{-1}-a}=a^{-1}+a=\frac{1}{a}+a$。

28 (1) $\frac{9^a\cdot 3^b}{\sqrt{3^a}}=\frac{3^{2a}\cdot 3^b}{3^{\frac{a}{2}}}=3^{2a+b}\div 3^{\frac{a}{2}}=3^{2a+b-\frac{a}{2}}=3^{\frac{3}{2}a+b}$。

因为 $\frac{3}{2}a+b=1$，所以 $\frac{9^a\cdot 3^b}{\sqrt{3^a}}=3$。

(2) 原式 $=\frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{100}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}\cdot b^2=\frac{4}{25}a^0\cdot b^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}$。

解析

6 原式 $=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2})=0$。

9 $\left(\frac{81}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{3}$。

10 原式 $=1+\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}+\pi-3=\pi$。

11 原式 $=-3\cdot a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\div\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{5}{6}}\right)=-9a^{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{5}{6}-\frac{5}{6}}=-9a$。

12 ①错误，$a<0$ 时，$(a^2)^{\frac{3}{2}}=|a|^3=-a^3$；

②错误，当 n 为奇数 a 为负数时不成立；

③错误，少了条件 $3x-7\neq 0$，即 $x\neq\frac{7}{3}$；

对于④，$100^a=10^{2a}=5$，$10^b=2$，

所以 $10^{2a}\times 10^b=5\times 2$，即 $10^{2a+b}=10$，

所以 $2a+b=1$，④正确。

13 原式 $=2^{-2k-1}-2^{-2k+1}+2^{-2k}=2^{-2k-1}-2^{-2k}(2-1)=2^{-2k-1}(1-2)=-2^{-(2k+1)}$。

14 原式 $=\frac{(1-2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})}{1-2^{-\frac{1}{32}}}\times(1+2^{-\frac{1}{8}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{4}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{2}})=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-2^{-\frac{1}{32}}}=\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$。

15 $\frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[4]{y^3}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{12}}$。

16 $8^{\frac{2}{3}}-(0.5)^{-3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}-(2^{-1})^{-3}+(3^{-\frac{1}{2}})^{-6}\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}=2^2-2^3+3^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=4-8+27\times\frac{8}{27}=4$。

17 因为 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$，所以 $(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=12$，所以 $x+x^{-1}-2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=12$，即 $x+x^{-1}=14$。

18 (1) 基本原则：

式子中既有分数指数幂又有根式时，一般把根式统一化成分数指数幂的形式，再用有理数指数幂的运算性质化简，可总结为：先统一，再运算。

(2) 常规方法：

①化负指数幂为正指数幂；②化根式为分数指数幂；③化小数为分数进行运算。

19 ①中 $a<0$，且 n 为偶数时不成立；②对；③错；④中左为负，右为正，不相等。

20 原式 $=\frac{[(ab^2)^{\frac{1}{3}}\cdot a^3\cdot b^2]^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^2}=a^{\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}-2}=\frac{a}{b}$，故选 C。

21 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=m^{\frac{1}{3}}\cdot\left(m^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}m^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}m$。

22 因为 $x^{9x}=(9x)^x$，$(x^9)^x=(9x)^x$，所以 $x^9=9x$，所以 $x^8=9$，所以 $x=\sqrt[8]{9}=\sqrt[4]{3}$。

23 因为 $f(-1)=\frac{3}{4}$，所以 $f(1)=-\frac{3}{4}$，即 $2^{1+a}-1=-\frac{3}{4}$，即 $1+a=-2$，得 $a=-3$。

24 $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)=-9a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=-9a$，故答案为 $-9a$。

25 要使原式有意义，需 $a-1>0$。

所以 $(1-a)\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(a-1)^3}}=(1-a)(a-1)^{-\frac{3}{4}}=-(a-1)\cdot(a-1)^{-\frac{3}{4}}=-(a-1)^{\frac{1}{4}}=-\sqrt[4]{a-1}$。

26 根式一般先转化成分数指数幂，然后再利用有理数指数幂的运算性质进行运算，在将根式化为分数指数幂的过程中，一般采用由内到外逐层变换为指数的方法，然后运用运算性质准确求解，对于计算结果，不强求统一用什么形式表示，若没有特别要求，就用分数指数幂的形式表示，如果有特殊要求，可根据要求给出结果，但结果不能同时含有根号和分数指数幂，也不能既有分母又含有负指数幂。

课时2　指数的综合运算

➡ 正文P57

答案

1 D　**2** B　**4** D　**4** D　**5** D

6 C　**7** D　**8** C

9 -4　**10** $\frac{8}{\sqrt[3]{9}}$　**11** $3\cdot 2^{n-3}$

12 ③　**13** 4

14 (1)将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 两边平方，得 $a+a^{-1}+2=9$，即 $a+a^{-1}=7$。

(2)将式子 $a+a^{-1}=7$ 两边平方，得 $a^2+a^{-2}+2=49$，所以 $a^2+a^{-2}=47$。

(3)由于 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3$，

所以有 $\frac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{-1}+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

$=a+a^{-1}+1=7+1=8$。

15 (1)由 $x=a^{-3}+b^{-2}$，得 $x-a^{-3}=b^{-2}$，

所以 $\sqrt[4]{x^2-2a^{-3}x+a^{-6}}=\sqrt[4]{(x-a^{-3})^2}=\sqrt[4]{(b^{-2})^2}=\frac{1}{|b|}$。

(2)令 $a^{\frac{1}{3}}=A,b^{\frac{1}{3}}=B$，则

$x=A^3+3AB^2,y=B^3+3A^2B$，

$x+y=A^3+3AB^2+3A^2B+B^3=(A+B)^3$，

$x-y=A^3+3AB^2-3A^2B-B^3=(A-B)^3$。

所以 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=(A+B)^2+(A-B)^2=2(A^2+B^2)=2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=8$。

16 令 $3^a=4^b=6^c=t(t>0)$，则 $3=t^{\frac{1}{a}},2=t^{\frac{1}{2b}},6=t^{\frac{1}{c}}$。

因为 $3\times2=6$，所以 $t^{\frac{1}{a}}\cdot t^{\frac{1}{2b}}=t^{\frac{1}{c}}$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{c}$，

所以 $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$。

17 令 $ax^3=by^3=cz^3=t$，

则 $ax^2=\frac{t}{x},by^2=\frac{t}{y},cz^2=\frac{t}{z}$，因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，所以 $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}=t$，即 $ax^2+by^2+cz^2=t$。

所以 $(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}=t^{\frac{1}{3}}=t^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{(ax^3)^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{(by^3)^{\frac{1}{3}}}{y}+\frac{(cz^3)^{\frac{1}{3}}}{z}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$。

18 因为 $a^x=70^\omega$，且 x,ω 为非零实数，所以 $a^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{x}}$。

同理，可得 $b^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{y}},c^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{z}}$，

所以 $a^{\frac{1}{\omega}}\cdot b^{\frac{1}{\omega}}\cdot c^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{x}}\cdot70^{\frac{1}{y}}\cdot70^{\frac{1}{z}}$，

即 $(abc)^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$。

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{\omega}$，$a,b,c$ 为正整数，

所以 $abc=70=2\times5\times7$。

因为 $a\leqslant b\leqslant c$，所以 $a=2,b=5,c=7$。

19 (1)因为 $x=\sqrt{2+\sqrt{2}},y=2-\sqrt{2}$，所以原式 $=x^2-y^{-1}=2+\sqrt{2}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(2)由 $a^{2x}=\sqrt{2}-1$，得 $a^{-2x}=\sqrt{2}+1$，所以 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}-1=2\sqrt{2}-1$。

20 (1) $[f(x)]^2-[g(x)]^2$

$=[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]$

$=(e^x-e^{-x}+e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x}-e^x-e^{-x})$

$=2e^x\cdot(-2e^{-x})=-4e^0=-4$。

(2)由 $f(x)f(y)=(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})$

$=e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{x-y}-e^{-(x-y)}$

$=g(x+y)-g(x-y)=4$。

同理可得 $g(x)g(y)=g(x+y)+g(x-y)=8$，

所以 $g(x+y)=6,g(x-y)=2$，

所以 $\frac{g(x+y)}{g(x-y)}=\frac{6}{2}=3$。

21 (1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^1}{2+2^1}=\frac{1}{2}$。

(2) $f(x)+f(1-x)=\frac{2^{2x}}{2+2^{2x}}+\frac{2^{2(1-x)}}{2+2^{2(1-x)}}=\frac{4^x}{2+4^x}+\frac{4^{1-x}}{2+4^{1-x}}=\frac{4^x}{2+4^x}+\frac{4}{2\cdot4^x+4}=\frac{4^x}{2+4^x}+\frac{2}{4^x+2}=\frac{4^x+2}{2+4^x}=1$。

(3)由(1)(2)知 $f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\frac{98}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)=\frac{99}{2}$。

解析

1 因为 $\left(\frac{n}{m}\right)^7=\frac{n^7}{m^7}=n^7\cdot m^{-7}$，A 错误；因为 $\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[12]{3^4}=3^{\frac{1}{3}}\neq(-3)^{\frac{1}{3}}$，所以 B 错误；因为 $\sqrt[4]{x^3+y^3}=(x^3+y^3)^{\frac{1}{4}}\neq(x+y)^{\frac{3}{4}}$，所以 C 错误；因为 $\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[6]{9}=3^{\frac{1}{3}}$，所以 D 正确。故选 D。

2 由 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$，可得 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=3^2$，解得 $a+a^{-1}=11$。故 $(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=11^2$，解得 $a^2+a^{-2}=119$。所以 $\frac{a^4+1}{a^2}=a^2+a^{-2}=119$。故选 B。

3 $(a^2-a^{-2})^2=(a^2+a^{-2})^2-4=8-4=4$，又 $a>1$，所以 $a^2>$

a^{-2}，所以 $a^2-a^{-2}=2$。

4 由 $x=1+2^m$ 得 $2^m=x-1$，故 $2^{-m}=\frac{1}{x-1}$。所以 $y=1+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$。故选 D。

5 因为 $f(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-4$，
所以 $f(x+1)=(x+1)^2-4=x^2+2x-3$。故选 D。

6 $3^a\cdot 9^b=3^a\cdot 3^{2b}=3^{a+2b}=\frac{1}{3}=3^{-1}$，则 $a+2b=-1$。

7 由 $x^3+x^2+x=-1$，得 $x^2(x+1)+x+1=0$，即 $(x+1)(x^2+1)=0$，解得 $x=-1$。
所以 $x^{-28}+x^{-27}+\cdots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1+x^2+\cdots+x^{27}+x^{28}=1$。

8 因为 $3^b+3^{-b}=\sqrt{13}$，所以 $(3^b-3^{-b})^2=(3^b+3^{-b})^2-4=13-4=9$，所以 $|3^b-3^{-b}|=3$。
因为 $b<0$，所以 $3^b-3^{-b}<0$，所以 $3^b-3^{-b}=-3$。

9 原式 $=4x^{\frac{1}{2}}-2^3-4x^{\frac{1}{2}}+4=-4$。

10 $100^{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\beta}{3}}=10^{2\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\beta}{3}\right)}=10^{3\alpha-\frac{2\beta}{3}}=(10^\alpha)^3\div(10^\beta)^{\frac{2}{3}}$。由已知 $10^\alpha=2$，$10^\beta=3$，则原式 $=2^3\div 3^{\frac{2}{3}}=\frac{8}{\sqrt[3]{9}}$。

11 $a_{10}=2^{10}$，$a_3=2^3$，所以$\frac{a_{10}}{a_3}=2^7$，所以原式 $=3[(2^7)^{\frac{1}{7}}]^{n-3}=3\cdot 2^{n-3}$。

12 对于①，$-\sqrt{x}=-x^{\frac{1}{2}}$，故①错误；对于②，当 $y<0$ 时，$\sqrt[6]{y^2}>0$，$y^{\frac{1}{3}}<0$，故②错误；对于③，$x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}\,(x>0)$，故③正确；对于④，$x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$，故④错误。综上，填③。

13 因为 $\begin{cases}a^{2m+n}=2^{-2},①\\a^{m-n}=2^8,\quad②\end{cases}$ ①×②，得 $a^{3m}=2^6$，所以 $a^m=2^2$。将 $a^m=2^2$ 代入②，得 $2^2\times a^{-n}=2^8$，所以 $a^n=2^{-6}$，所以 $a^{4m+n}=a^{4m}\cdot a^n=(a^m)^4\cdot a^n=(2^2)^4\times 2^{-6}=2^2=4$。

15 对于(1)，若把 $x-a^{-3}$ 看成一个整体，其值为 b^{-2}，则可快速求解；对于(2)，可用换元法将分数指数幂转化为整数指数幂进行运算。

【方法点拨】解决有关指数幂的综合应用问题时，首先，要善于观察、分析，并对条件与结论进行适当的化简变形，以创造运用公式和指数幂的有关性质的条件；其次，进行化简、求值；最后，要注意方程思想、整体思想、转化与化归思想、换元思想等数学思想的运用。

16 【易错警示】根据已知条件 $3^a=4^b=6^c$，设一个参数 t，用含 t 的式子表示 a,b,c，从而找到 a,b,c 的关系。
这是解答本题的关键，否则计算麻烦且极易出错。

17 根据已知条件 $ax^3=by^3=cz^3$，设一个参数 t，用含 t 的式子表示 $ax^2+by^2+cz^2$ 和 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$，从而找到 $ax^2+by^2+cz^2$ 和 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ 的关系。

【点评】设辅助参数是对数学问题的"层次性"的深刻认识的体现，是把复杂问题转化为两个或多个基本问题的重要的分析方法。

【解题通法】对于指数幂等式的证明问题常常是将指数幂化为同底，利用指数幂相等的规律进行证明，解决此类问题的关键是通过指数运算进行等价代换，以及利用参数找到已知与结论的联系，这样才能使问题迅速得到解决。

第三节 指数函数

课时 1 指数函数的概念与图像

➡ 正文P59

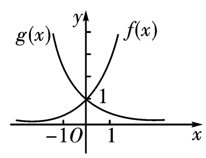
答案

1 A　2 C　4 D　4 D　5 A

6 1　$e^{\frac{1}{\pi}}$　$\frac{1}{e}$　7 23

8 B　9 B　10 B　11 A　12 C　13 A

14 (1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像如图所示，



第 14 题图

(2)$f(1)=3^1=3$，$g(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$；

$f(\pi)=3^\pi$，$g(-\pi)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}=3^\pi$；$f(m)=3^m$，$g(-m)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-m}=3^m$。

从以上计算的结果看，上述两个函数当自变量取值互为相反数时，其函数值相等，即当指数函数的底数互为倒数时，它们的图像关于 y 轴对称。

15 (1)因为函数 $f(x)=a^{x-1}\,(x\geqslant 0)$ 的图像经过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$，所以$\frac{1}{2}=a^{2-1}$，所以 $a=\frac{1}{2}$。

(2)由(1)知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，因为 $x\geqslant 0$，所以 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，所以$0<2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 2$，

所以函数 $y=f(x)\,(x\geqslant 0)$ 的值域为 $(0,2]$。

16 C　17 B

18 (1)易得定义域为 **R**；值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。

(2)易得定义域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$；值域为 $[0,+\infty)$。

(3)由 $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$。

又因为 $a^x>0$，所以 $a^x+1>1$。

所以 $0<\dfrac{1}{a^x+1}<1$，所以 $0<\dfrac{2}{a^x+1}<2$，

即 $-2<-\dfrac{2}{a^x+1}<0$，所以 $y\in(-1,1)$。

所以可得定义域为 $\mathbf{R}$；值域为 $(-1,1)$。

19 (1) 由 $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\geqslant 0$，得 $x\geqslant 0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$。

(2) 依题意有 $\begin{cases}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^a}=\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\dfrac{3}{4},\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\dfrac{2}{3},\end{cases}$

故 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a+b}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a+b=1$。

20 方程 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=4a-3$ 有负根，即 $x<0$。

由 $x<0$ 且 $\dfrac{4}{3}>1$，所以 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x\in(0,1)$，

所以 $0<4a-3<1$，所以 $\dfrac{3}{4}<a<1$。

解析

1 ①是二次函数；②底数小于 0，故不是指数函数；③指数为 x+1，故不是指数函数；④是指数函数。

2 由指数函数的定义可得 $\begin{cases}(a-1)^2=1,\\ a>0,a\neq 1,\end{cases}$

所以 $a=2$。故选 C。

3 因为 $\dfrac{1}{x}\neq 0$，所以 $x\neq 0$ 且 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\in(0,1)\cup(1,+\infty)$。

4 因为函数 $f(x)$ 是指数函数，所以 $\dfrac{1}{2}a-3=1$，所以 $a=8$。

所以 $f(x)=8^x$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$。

5 因为 $f[g(1)]=f(a-1)=5^{|a-1|}=1$，所以 $|a-1|=0$，解得 $a=1$。

6 设 $f(x)=a^x$ 将 (π,e) 代入得 $f(x)=e^{\frac{x}{\pi}}$。

7 $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$，若 $f(a)=5$，则 $f(a)=2^a+\dfrac{1}{2^a}=5$，所以

$f(2a)=(2^a)^2+\left(\dfrac{1}{2^a}\right)^2=\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^2-2=23$。

8 因为 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,x\geqslant 0,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x},x<0,\end{cases}$ 所以选 B。

9 方法一：由题设知 $y=\begin{cases}a^x,x\geqslant 0,\\ \left(\dfrac{1}{a}\right)^x,x<0。\end{cases}$

因为 $a>1$，所以由指数函数的图像易知答案为 B。

方法二：因为 $y=a^{|x|}$ 是偶函数，且 $a>1$，

所以 $a^{|x|}\geqslant 1$，排除 A，C。又当 $x\geqslant 0$ 时，$y=a^x$，由指数函数的图像知选 B。

10 由函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\cdot 2^x=\begin{cases}2^x,x>0,\\ -2^x,x<0,\end{cases}$

可得函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且此时函数值大于 1；

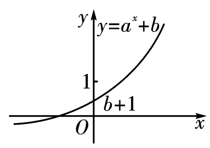
在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且此时函数值大于 -1 且小于 0。

结合所给的选项，只有 B 满足条件，故选 B。

11 当 $a>2$ 时，$y=a^x$ 的图像从左到右呈上升型，$y=(a-1)x^2$ 的图像为开口向上的抛物线，故选 A。

12 令 $x=0$，则 $f(0)=a^0+2\,018=2\,019$，故函数图像恒过点 $(0,2\,019)$。故选 C。

13 因为 $a>1$，且 $-1<b<0$，故其图像如图所示。



第 13 题图

16 因为函数经过第一、三、四象限，所以函数单调递增且图像与 y 轴的交点在负半轴上。而当 $x=0$ 时，$y=a^0-b=1-b$，由题意得 $\begin{cases}a>1,\\ 1-b<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a>1,\\ b>1。\end{cases}$ 故选 C。

17 对于函数 $f(x)=a^x$，当 $x=0$ 时，$f(0)=a^0=1$，当 $x=2$ 时，$f(2)=a^2$。

由于指数函数是单调函数，则有 $a^2>1$，即 $a>1$。

所以函数 $f(x)$ 的图像是上升的，且在 x 轴上方，结合选项可知 B 正确。

课时 2　指数函数的性质

➡ 正文P61

答案

1 C　**2** C　**4** D　**4** D　**5** B　**6** C

7 B　**8** B　**9** $f(3.14)<f(\pi)$

10 $\dfrac{1}{2}$　**11** $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　**12** $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

13 $(-3,1)$

14 (1) 因为 $0<0.8<1$，所以指数函数 $y=0.8^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数。所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$。

(2) 因为 $1.7^{0.3}>1$，$0.9^{3.1}<1$，所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$。

(3) 当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数，此时 $a^{1.3}<a^{2.5}$；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 是减函数，此时 $a^{1.3}>a^{2.5}$，即当 $0<a<1$ 时，$a^{1.3}>a^{2.5}$，当 $a>1$ 时，$a^{1.3}<a^{2.5}$。

15 对于函数$f(x)$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$。

因为对定义域内的每一个x,

都有$f(-x)=\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}=\frac{2^x-1}{2^x+1}=-\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$,

所以函数$f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$为奇函数。

16 (1)因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,

所以$f(0)=0$。所以$\frac{b-1}{4}=0$,所以$b=1$。

经检验,$b=1$满足$f(x)$是奇函数,所以$b=1$。

(2)$f(x)=\frac{1-2^x}{2^{x+1}+2}=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$。

因为$y=2^x$在$\mathbf{R}$上是单调递增,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减。

(3)因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,且在$\mathbf{R}$上单调递减,

所以$f(t^2-2t)<f(k-2t^2)$。所以$t^2-2t>k-2t^2$。

所以$k<3t^2-2t$对一切$t\in\mathbf{R}$恒成立。

因为$3t^2-2t=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}$,所以$k<-\frac{1}{3}$。

17 B　**18** A　**19** C　**20** D

21 $(-1,0)\cup(0,1)$

22 $f(x)+f(-x)=a-\frac{1}{2^x-1}+a-\frac{1}{2^{-x}-1}=2a+1$。

因为$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上为奇函数,

所以$2a+1=0$,即$a=-\frac{1}{2}$,

所以$f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x-1}$。

设$t=2^x-1$,则$t\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$,

所以$\frac{1}{t}\in(-2,-1)\cup(0,1)$,所以$-\frac{1}{t}\in(-1,0)\cup(1,2)$,

得$-\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\in\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,

即函数$f(x)$的值域为$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$。

23 因为$y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$,

所以令$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$,则$y=t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$。

又$x\in[0,2]$,所以$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant1$,

则当$t=\frac{1}{2}$时,y取得最小值$\frac{7}{4}$,

当$t=1$时,y取得最大值2,

所以$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+2,x\in[0,2]$的最大值为2,最小值为$\frac{7}{4}$。

24 (1)因为无论$0<a<1$还是$a>1$,函数$f(x)$的最大值都是a和a^2中的一个,最小值为另一个,

所以$a^2+a=6$,解得$a=2$或$a=-3$(舍去),

故实数a的值为2。

(2)当$0<a<1$时,函数$f(x)=a^x$在区间$[1,2]$上是减函数,其最大值为$m=f(1)=a$,最小值为$n=f(2)=a^2$,

所以由题意,得$a=2a^2$,解得$a=0$(舍去)或$a=\frac{1}{2}$,所以$a=\frac{1}{2}$。

当$a>1$时,函数$f(x)=a^x$在区间$[1,2]$上是增函数,其最大值为$m=f(2)=a^2$,最小值为$n=f(1)=a$,

所以由题意,得$a^2=2a$,解得$a=0$(舍去)或$a=2$,所以$a=2$。

综上,知实数a的值为$\frac{1}{2}$或2。

解析

1 设点(x,y)为函数$f(x)=\pi^x$的图像上任意一点,则点$(-x,y)$为$g(x)=\pi^{-x}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$的图像上的点。因为点$(x,y)$与点$(-x,y)$关于$y$轴对称,所以函数$f(x)=\pi^x$与$g(x)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$的图像关于$y$轴对称,选C。

2 由已知,得$0<2a-1<1$,则$\frac{1}{2}<a<1$,所以实数a的取值范围是$\left(\frac{1}{2},1\right)$。

3 由$f(x)+g(x)=e^x$,可得$f(-x)+g(-x)=e^{-x}$,

由$f(x)$与$g(x)$的奇偶性,可得$f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=e^{-x}$。

所以$f(x)-g(x)-[f(x)+g(x)]=e^{-x}-e^x$,

整理得$-2g(x)=e^{-x}-e^x$,即$g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。故选D。

4 依题意,得$f(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数。当$x>0$时,$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,该指数函数是单调递减函数。故选D。

5 因为函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上为减函数,所以$2a+1>3-2a$。解得$a>\frac{1}{2}$,故选B。

6 因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的单调递增函数,所以$f_1(x)=a^x$单调递增,$f_2(x)=\left(4-\frac{a}{2}\right)x+2$单调递增,即$\begin{cases}a>1,\\4-\frac{a}{2}>0,\\f_1(1)\geqslant f_2(1),\end{cases}$所以$\begin{cases}a>1,\\a<8,\\a\geqslant4,\end{cases}$解得$4\leqslant a<8$。

7 若 $x+y<0$，则 $x<-y$，$y<-x$。因为指数函数 $y=2^x$，$y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $3^x<3^{-y}$，$2^y<2^{-x}$。两式相加，得 $3^x+2^y<2^{-x}+3^{-y}$，与题意相符，因此 $x+y<0$ 满足条件，故选 B。

8 由已知 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b$，知①②⑤可能成立。

9 因为 $f(x)$ 是指数函数，所以可设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，由已知，得 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$，$a^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}=3^{-\frac{3}{2}}$，即 $a=3$，所以 $f(x)=3^x$。因为 $3.14<\pi$，所以 $f(3.14)<f(\pi)$。

10 因为函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的图像与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称，所以 $a=\frac{1}{2}$。

11 因为 $a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$，

所以 $y=(a^2+a+2)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $x>1-x$ 即 $x>\frac{1}{2}$。

12 指数函数 $f(x)=(2a-1)^x$，且 $f(-3)>f(-2)$，

所以函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $0<2a-1<1$，解得 $\frac{1}{2}<a<1$，

故答案为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$。

13 当 $a<0$ 时，$f(a)=\left(\frac{1}{2}\right)^a-7<1$，$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$，即 $-3<a<0$；

当 $a\geqslant0$ 时，$f(a)=\sqrt{a}<1$，即 $0\leqslant a<1$。

综上得，$a\in(-3,1)$。

17 $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，$f[f(-1)]=f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$。

18 因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为单调递减函数，$y=3^x$ 为单调递增函数，所以函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3^x$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，所以其最大值为 $f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-3^{-2}=4-\frac{1}{9}=\frac{35}{9}$。故选 A。

19 因为函数 $f(x)=2^{-|x|}-c$ 的图像与 x 轴有交点，所以 $2^{-|x|}-c=0$ 有解，即 $2^{-|x|}=c$ 有解。因为 $-|x|\leqslant0$，所以 $0<2^{-|x|}\leqslant1$，所以 $0<c\leqslant1$。故选 C。

20 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 a^2，最小值为 a，

故有 $a^2-a=\frac{a}{2}$，解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$（舍去）。

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 a，最小值为 a^2，

故有 $a-a^2=\frac{a}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=0$（舍去）。

综上，$a=\frac{3}{2}$ 或 $a=\frac{1}{2}$。

21 由 $x<0$，得 $0<2^x<1$；由 $x>0$，得 $-1<-2^{-x}<0$。所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,0)\cup(0,1)$。

23 【点拨】解题过程中主要用到化归与转化的数学思想，对于函数 $y=a^{2x}-a^x+2(a>0$ 且 $a\neq1)$，通过换元（令 $t=a^x$），将其转化为二次函数。在转化过程中，要注意转化的等价性。

课时3　指数函数性质的综合应用

➡正文P64

答案

1 B　**2** C　**4** B　**4** C　**5** B　**6** B

7 A　**8** C　**9** B　**10** C　**11** A　**12** B

13 D　**14** $(-\infty,1)$

15 1　**16** 12　**17** $[-3,1]$

18 $(-\infty,0)$　**19** $\left(0,\frac{1}{4}\right]$

20 $(-2)^3<0$，$\left(\frac{5}{6}\right)^0=1$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>1$，$3^{\frac{2}{3}}>1$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>1$，

$0<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<1$，$0<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<1$，$0<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<1$。

因为 $\frac{3^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}>1$，所以 $3^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$。

故 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{2}{3}}$。

同理，$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，

所以 $(-2)^3<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{5}{6}\right)^0<\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{2}{3}}$。

21 由题意得 $1+2^x+4^xa>0$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立，即 $a>-\frac{1+2^x}{4^x}$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立。

又因为 $-\frac{1+2^x}{4^x}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^x=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}$，

因为 $x\in(-\infty,1]$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，

令 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，则 $f(t)=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$t\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，

因为 $f(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上为减函数，

所以 $f(t)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$，

即 $f(t)\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$，

因为 $a>f(t)$，所以 $a\in\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$。

22 (1) 设 $g(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，则 $a^3=8$，

所以 $a=2$。

所以 $g(x)=2^x$，所以 $f(x)=\frac{n-2^x}{m+2^{x+1}}$。

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $\frac{n-1}{2+m}=0$，解得 $n=1$。

所以 $f(x)=\frac{1-2^x}{2^{x+1}+m}$。

又 $f(-1)=-f(1)$，

所以$\dfrac{1-\frac{1}{2}}{m+1}=-\dfrac{1-2}{4+m}$，解得 $m=2$。

经检验知$f(-x)=-f(x)$恒成立，

所以$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2+2^{x+1}}$。

(2)由(1)知$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$，

易知$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为减函数。

又$f(x)$是奇函数，则$f(2t-3)+f(t-k)>0$，

即$f(2t-3)>-f(t-k)=f(k-t)$。

所以$2t-3<k-t$，即对一切$t\in[1,4]$，$3t-3<k$恒成立。

令 $m(t)=3t-3$，$t\in[1,4]$，易知 $m(t)$在$[1,4]$上递增，

所以 $m(t)_{\max}=3\times4-3=9$，所以 $k>9$。

故实数 k 的取值范围是$(9,+\infty)$。

23 (1)由题意得$\begin{cases}a\cdot b=6,\\ b\cdot a^3=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=3,\end{cases}$

所以$f(x)=3\cdot2^x$。

(2)设 $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x+\left(\dfrac{1}{b}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$，则 $y=g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，所以当$x\leqslant1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=\dfrac{5}{6}$。所以$\left(\dfrac{1}{a}\right)^x+\left(\dfrac{1}{b}\right)^x+1-2m\geqslant0$ 在 $x\in(-\infty,1]$上恒成立，即 $2m-1\leqslant\dfrac{5}{6}$，所以 $m\leqslant\dfrac{11}{12}$，故 m 的取值范围为 $m\leqslant\dfrac{11}{12}$。

解析

1 ①$a<0$ 时，$(a^2)^{\frac{3}{2}}>0$，$a^3<0$，故错误。

②错误。

③$x-2\geqslant0$ 且 $3x-7\neq0$，$x\in\left[2,\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3},+\infty\right)$，故错误。

④$10^{2a}=5$，$10^b=2$，相乘得 $10^{2a+b}=10$，所以 $2a+b=1$，正确。

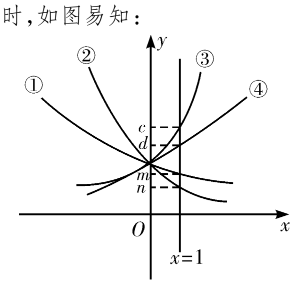
2 因为$f(-2)=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$，所以$f[f(-2)]=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1-\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，故答案选 C。

3 $y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$，因为 $y=2^x$ 是增函数，且 $1.8>1.5>1.44$，所以$y_1>y_3>y_2$，故选 B。

4 $f(x+y)=a^{x+y}=a^xa^y=f(x)f(y)$。故选 C。

5 设平均每年的减少率为 m，则有 $1\cdot(1-m)^{100}=0.957\ 6\Rightarrow m=1-0.957\ 6^{\frac{1}{100}}$，将 m 的值代入 $y=(1-m)^x$，即可得 B。

6 设图像①，②，③，④对应的函数分别为 $y=m^x$，$y=n^x$，$y=c^x$，$y=d^x$，当 $x=1$ 时，如图易知：



第 6 题图

$c^1>d^1>m^1>n^1$。

又因为 $m,n,c,d\in\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},2,3\right\}$，

所以 $c=3$，$d=2$，$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{1}{3}$。

7 $f(x)=\begin{cases}1(x\geqslant0),\\ 2^x(x<0),\end{cases}$故选 A。

8 由二次函数常数项为 0 可知函数图像过原点，排除 A，D；B，C 中指数函数单调递减，因此$\dfrac{a}{b}\in(0,1)$，因此二次函数图像的对称轴 $x=-\dfrac{a}{2b}<0$。故选 C。

9 根据题意，结合指数函数的性质，得 $0<y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}\leqslant1$，故方程$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}-a-1=0$ 有解，知$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}=a+1\Leftrightarrow a+1\in(0,1]$，可得 a 的取值范围是 $-1<a\leqslant0$。故选 B。

10 由于底数$\dfrac{1}{2}\in(0,1)$，所以函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 的单调性与 $y=\dfrac{1}{x}$ 的单调性相反。因为 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是减函数，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是增函数。选 C。

11 指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

$y=x^2-3x-2$ 在$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$上是减函数，

所以函数 $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x^2-3x-2}$ 的增区间为$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$。

12 因为$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，

又$f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$， ①

所以$f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=a^{-x}-a^x+2$， ②

①+②，化简得 $g(x)=2$，①-②，化简得$f(x)=a^x-a^{-x}$。

又 $g(2)=a$，所以 $a=2$，所以$f(x)=2^x-2^{-x}$，

所以$f(2)=2^2-2^{-2}=\dfrac{15}{4}$。

13 因为 $x^2+2x=(x+1)^2-1\geqslant-1$，所以 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x}\leqslant\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$。又因为$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x}>0$，所以 $0<y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x}\leqslant3$。因为 $m\in B$，所以 $0<m\leqslant3$。故 D 正确。

14 原不等式变形为 $0.5^{2x-3}<0.5^{3x-4}$，由指数函数 $y=0.5^x$ 的单调性可知 $2x-3>3x-4$，解得 $x<1$。故 x 的取值范围是$(-\infty,1)$。

15 令 $f(a)=3-a-2^a$，则 $f(a)$ 为单调递减函数，且 $f(1)=3-1-2=0$，所以 $a=1$。

16 函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 在定义域内单调递减，所以 $m=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$，$n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9$。所以 $m+n=12$。

17 (1)当 $x<0$ 时，由$|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x<0,\\ \left|\dfrac{1}{x}\right|\geqslant\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow-3\leqslant x<0$；

(2)当 $x\geqslant0$ 时，由$|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant0,\\ \left|\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right|\geqslant\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow0\leqslant x\leqslant1$，

所以不等式$|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{3}$的解集为$\{x|-3\leqslant x\leqslant1\}$，

所以应填$[-3,1]$。

18 因为$f(x)$的定义域为$(0,1)$，

所以$0<3^x<1$，所以$x<0$。

19 由$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$，得$f(x)$是减函数，因此$\begin{cases}0<a<1,\\ a-3<0,\\ a^0\geqslant 4a,\end{cases}$解得$0<a\leqslant\frac{1}{4}$。

第四节　对数

课时 1　对数的概念

➡ 正文P66

答案

1 C　**2** B　**4** A　**4** B　**5** B　**6** B

7 (1)因为$\log_2(\log_5 x)=0$，所以$\log_5 x=2^0=1$，

所以$x=5^1=5$。

(2)因为$\log_3(\lg x)=1$，所以$\lg x=3^1=3$，

所以$x=10^3=1\ 000$。

(3)因为$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，

所以$\log_{(\sqrt{2}-1)}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}-1)=1$。

8 B　**9** B　**10** C　**11** D　**12** B

13 -13　**14** $\sqrt{10}$　**15** $\frac{4}{3}$　**16** ①②　**17** 4 947

18 (1)因为$5^3=125$，所以$\log_5 125=3$。

(2)因为$4^{-2}=\frac{1}{16}$，所以$\log_4\frac{1}{16}=-2$。

(3)因为$\log_{\frac{1}{2}}8=-3$，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$。

(4)因为$\log_3\frac{1}{27}=-3$，所以$3^{-3}=\frac{1}{27}$。

19 (1)因为$\log_{18}9=a$，$\log_{18}54=b$，

所以$18^a=9$，$18^b=54$。

所以$18^{2a-b}=\frac{18^{2a}}{18^b}=\frac{9^2}{54}=\frac{3}{2}$。

(2)$\log_x 27=3^{1+\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3 2}=3\times 2=6$。

所以$x^6=27$，所以$x^6=3^3$。又$x>0$，所以$x=\sqrt{3}$。

20 因为$\log_{\frac{1}{2}}x=m$，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^m=x$，$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$。

因为$\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$，所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}=y$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}$。

所以$\frac{x^2}{y}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\div\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-(2m+4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$。

21 (1)①把对数式化为指数式，得$x=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

②把对数式化为指数式，得$x^{-\frac{1}{3}}=3$，

所以$(x^{-\frac{1}{3}})^{-3}=3^{-3}$，即$x=3^{-3}=\frac{1}{27}$。

(2)①把已知指数式化为对数式可得$m=\log_3 8$；②由已知指数式可得$3^m=8=2^3$，所以$(3^m)^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}$，即$3^{\frac{m}{3}}=2$。化为对数式可得$\frac{m}{3}=\log_3 2$；③由已知指数式可得$(3^m)^{\frac{1}{m}}=8^{\frac{1}{m}}$，即$3=8^{\frac{1}{m}}$，化为对数式可得$\frac{1}{m}=\log_8 3$。

22 由题意得$\begin{cases}\lg a+\lg b=1, & ①\\ \lg a\cdot\lg b=m, & ②\\ (\lg a)^2+4(1+\lg a)=0, & ③\end{cases}$

由③得$(\lg a+2)^2=0$，所以$\lg a=-2$，即$a=\frac{1}{100}$。

代入①得$\lg b=1-\lg a=1+2=3$，所以$b=1\ 000$。

代入②得$m=\lg a\cdot\lg b=-2\times 3=-6$。

23 (1)$\log_a x=2$，$\log_b x=3$，$\log_c x=6$。所以$x=a^2$，$x=b^3$，$x=c^6$，

所以$a=x^{\frac{1}{2}}$，$b=x^{\frac{1}{3}}$，$c=x^{\frac{1}{6}}$，所以$abc=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$，所以$\log_{abc}x=\log_x x=1$。

(2)由已知得$0.8^x=3^{1-2x}=(0.8^y)^{1-2x}=0.8^{y-2xy}$，

所以$x=y-2xy$即$y-x=2xy$，所以$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$。

解析

1 ①③④正确，②不正确，只有$a>0$且$a\neq 1$时，$a^x=N$才能化为对数式。

2 由对数的定义直接可得$\log_a c=b$。

3 因为$\log_a\sqrt[7]{b}=c$，所以$a^c=\sqrt[7]{b}$，所以$(a^c)^7=(\sqrt[7]{b})^7$，所以$a^{7c}=b$。

4 由$a^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}$，得$a=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$，

所以$\log_{\frac{2}{3}}a=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^3=3$。

5 $\log_3 9=2$化为指数式为$3^2=9$，故选 B。

6 由$\lg(x^2-1)=\lg(2x+2)$，得$x^2-1=2x+2$，即$x^2-2x-3=0$，解得$x=-1$或$x=3$。当$x=-1$时$x^2-1=0$，$\lg(x^2-1)$无意义，所以原方程的根为$x=3$。

8 由$x^2+y^2-4x-2y+5=0$，得$(x-2)^2+(y-1)^2=0$，所以$x=2$，$y=1$。所以$\log_x(y^x)=\log_2(1^2)=0$。

9 由$a\log_2 3=1$，$4^b=3$得$a=\log_3 2$，$b=\log_4 3=\frac{1}{2}\log_2 3$，所以$a\cdot b=\log_3 2\cdot\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{1}{2}$。

10 由条件，知$\log_3(\log_2 x)=1\Rightarrow\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8$，所以$x^{-\frac{1}{2}}=8^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

11 由已知，得$\begin{cases}6-2a>0,\\ 2a-1>0,\\ 2a-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<3,\\ a>\frac{1}{2},\\ a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<a<3$且$a\neq 1$，故选 D。

12 由已知得$5^a=b$，$10^c=b$，所以$5^a=10^c$，因为$5^d=10$，所以$5^{dc}=10^c$，所以$5^{dc}=5^a$，所以$dc=a$，故选 B。

13 因为$\log_3\frac{1-2x}{9}=1$，所以$\frac{1-2x}{9}=3$，所以$x=-13$。

14 因为$4^a=2$，所以$a=\frac{1}{2}$。因为$\lg x=a$，所以$x=10^a=\sqrt{10}$。

15 因为 $a=\lg 2$，所以 $10^a=2$。因为 $b=\lg 3$，所以 $10^b=3$。

所以 $100^{a-\frac{b}{2}}=\frac{(10^a)^2}{10^b}=\frac{4}{3}$。

16 因为 $\lg 10=1$，所以 $\lg(\lg 10)=\lg 1=0$，①正确；

因为 $\ln e=1$，所以 $\lg(\ln e)=\lg 1=0$，②正确；

若 $10=\lg x$，则 $x=10^{10}$，③错误；

由 $\log_{25}x=\frac{1}{2}$，得 $x=25^{\frac{1}{2}}=5$，④错误。

17 根据定义，$[\lg 1]=[\lg 2]=[\lg 3]=[\lg 4]=\cdots=[\lg 9]=0$，

$[\lg 10]=[\lg 11]=[\lg 12]=\cdots=[\lg 99]=1$，

$[\lg 100]=[\lg 101]=[\lg 102]=\cdots=[\lg 999]=2$，

$[\lg 1\ 000]=[\lg 1\ 001]=[\lg 1\ 002]=\cdots=[\lg 2\ 018]=3$，

所以 $[\lg 1]+[\lg 2]+[\lg 3]+[\lg 4]+\cdots+[\lg 2\ 018]=1\times(99-9)+2\times(999-99)+3\times(2\ 018-999)=90+2\times 900+3\times 1\ 019=4\ 947$。

课时 2 对数的运算性质及应用

➡ 正文P68

答案

1 B	2 C	4 A	4 A	5 B	6 A
7 C	8 C	9 D	10 C	11 A	
12 C	13 2	14 6	15 0		
16 $x=2$	17 0	18 $-\sqrt{2}$ 或 $\ln 2$			

19 (1) 原式 $=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1-1=1$。

(2) 原式 $=\frac{1}{2}-3+\log_6 5\cdot\log_5 6+3=\frac{3}{2}$。

20 (1) 原式 $=\lg 5\cdot(2+2\lg 2)+(\sqrt{2}\lg 2)^2$

$=2\lg 5+2\lg 2\cdot\lg 5+2(\lg 2)^2$

$=2\lg 5+2\lg 2\cdot(\lg 5+\lg 2)$

$=2\lg 5+2\lg 2=2$。

(2) 因为 $x=\log_2 3$，所以 $2^x=3$，

所以 $\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{(2^x+2^{-x})(4^x-1+4^{-x})}{2^x+2^{-x}}=4^x-1+4^{-x}=9-1+\frac{1}{9}=\frac{73}{9}$。

21 因为 $(\lg x+\lg 2)(\lg x+\lg 3)=0$。

所以 $\lg x_1=-\lg 2$，$\lg x_2=-\lg 3$，

所以 $\lg(x_1x_2)=\lg x_1+\lg x_2=-\lg 2-\lg 3=\lg\frac{1}{6}$，

所以 $x_1x_2=\frac{1}{6}$。

22 设 6.9 级和 7.8 级地震的相对能量程度分别为 I_1 和 I_2，

由题意得 $\begin{cases}6.9=0.6\lg I_1,\\7.8=0.6\lg I_2,\end{cases}$

因此 $0.6(\lg I_2-\lg I_1)=0.9$，即 $\lg\frac{I_2}{I_1}=1.5$，

所以 $\frac{I_2}{I_1}=10^{1.5}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}\approx 32$。

因此，7.8 级地震的相对能量程度约为 6.9 级地震的相对能量程度的 32 倍。

23 因为 $f(x)=(\lg a)x^2+2x+4\lg a$ 存在最小值为 3，

所以 $\lg a>0$，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{\lg a}\right)=\lg a\times\frac{1}{(-\lg a)^2}+2\times\left(-\frac{1}{\lg a}\right)+4\lg a=4\lg a-\frac{1}{\lg a}=3$，

即 $4(\lg a)^2-3\lg a-1=0$，所以 $(4\lg a+1)\cdot(\lg a-1)=0$，则 $\lg a=1$，所以 $a=10$。

所以 $(\log_a 5)^2+\log_a 2\cdot\log_a 50=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg 50=(\lg 5)^2+\lg 2(\lg 5+1)=\lg 5(\lg 5+\lg 2)+\lg 2=1$。

解析

1 在 A 中，当 $M=N\leqslant 0$ 时，$\log_a M$ 与 $\log_a N$ 均无意义，因此 $\log_a M=\log_a N$ 不成立，故 A 错误；在 B 中，当 $\log_a M=\log_a N$ 时，必有 $M>0$，$N>0$，且 $M=N$，因此 $M=N$ 成立，故 B 正确；在 C 中，当 $\log_a M^2=\log_a N^2$ 时，有 $M\neq 0$，$N\neq 0$，且 $M^2=N^2$，即 $|M|=|N|$，但未必有 $M=N$，例如 $M=2$，$N=-2$ 时，也有 $\log_a M^2=\log_a N^2$，但 $M\neq N$，故 C 错误；在 D 中，若 $M=N=0$，则 $\log_a M^2$ 与 $\log_a N^2$ 均无意义，因此 $\log_a M^2=\log_a N^2$ 不成立，故 D 错误。

【易错警示】特别容易忽视真数必须大于 0，易产生错误答案 A 或 C。

2 原式 $=\log_5 10^2+\log_5 0.25=\log_5(10^2\times 0.25)=\log_5 25=2$。

3 $\log_3 8-2\log_3 6=3\log_3 2-2(\log_3 2+\log_3 3)=3a-2(a+1)=a-2$。

4 $\left(\lg\frac{1}{4}-\lg 25\right)\div 100^{-\frac{1}{2}}+7^{1+\log_7 2}=\lg\frac{1}{100}\div\frac{1}{10}+7\times 7^{\log_7 2}=-2\times 10+7\times 2=-6$。

5 $\sqrt{(\log_2 3)^2-4\log_2 3+4}=\sqrt{(\log_2 3-2)^2}=2-\log_2 3$，所以原式 $=2-\log_2 3+\log_2 3^{-1}=2-2\log_2 3$。

6 因为 $2^x=3$，所以 $x=\log_2 3$。又 $\log_4\frac{8}{3}=y$，

所以 $x+2y=\log_2 3+2\log_4\frac{8}{3}=\log_2 3+2(\log_4 8-\log_4 3)=\log_2 3+2\left(\frac{3}{2}\log_2 2-\frac{1}{2}\log_2 3\right)=\log_2 3+3-\log_2 3=3$。故选 A。

7 原式 $=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{31}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}=-5$。

8 $\frac{\lg 12}{\lg 5}=\frac{\lg 3+\lg 4}{\lg 5}=\frac{\lg 3+2\lg 2}{1-\lg 2}=\frac{2a+b}{1-a}$。

9 $\log_3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y\cdot\sqrt[3]{y}}}=\log_3\sqrt{x}-\log_3\sqrt{y\cdot\sqrt[3]{y}}=\log_3 x^{\frac{1}{2}}-\log_3(y\cdot y^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{2}{3}\log_3 y=\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}n$。

10 由对数运算法则 $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$，$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$，知③⑥正确，其他都不正确，故选 C。

11 $\lg\frac{25}{16}-2\lg\frac{5}{9}+\lg\frac{32}{81}=\lg\left(\frac{25}{16}\div\frac{25}{81}\times\frac{32}{81}\right)=\lg 2$。

12 设 $t=a-a^x$，则 $y=\sqrt{t}$ 为增函数，则函数 $y=\sqrt{a-a^x}$ $(a>0$，

$a\neq1$)为单调函数,

由 $x=1$ 时,$y=0$,得函数为减函数,故 $a>1$,

则当 $x=0$ 时 $y=1$,即 $y=\sqrt{a-1}=1$,即 $a-1=1$,则 $a=2$,

则 $\log_a\frac{5}{6}+\log_a\frac{48}{5}=\log_a\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{48}{5}\right)=\log_2 8=3$。

13 原式 $=\frac{2(\lg 4+\lg 3)}{1+\lg\sqrt{0.36}+\lg\sqrt[3]{8}}=\frac{2\lg 12}{1+\lg 0.6+\lg 2}=\frac{2\lg 12}{\lg(10\times0.6\times2)}=2$。

14 原式 $=|1+\lg 10^{-3}|+\sqrt{(\lg 2)^2-4\lg2+4}+\lg6-\lg\frac{3}{100}$

$=|1-3|+\sqrt{(\lg2-2)^2}+\lg6-\lg3+2$

$=2+2-\lg2+\lg6-\lg3+2$

$=6+\lg\frac{6}{2\times3}=6$。

15 因为 $\lg(10m)+\lg\frac{1}{m}=\lg(10m\cdot\frac{1}{m})=\lg 10=1$,所以 $10^x=1$,解得 $x=0$。

16 方程变形为 $\lg[x(x-1)]=\lg 2$,所以 $x(x-1)=2$,解得 $x=2$ 或 $x=-1$。

经检验 $x=-1$ 不合题意,舍去,所以原方程的根为 $x=2$。

【易错点津】本题容易忽略真数大于 0 这个隐含条件从而产生增根。

17 $\lg(x+y)=\lg x+\lg y=\lg(xy)\Rightarrow x+y=xy$,

$\lg(1-x)+\lg(1-y)=\lg[(1-x)(1-y)]=\lg(1-x-y+xy)=\lg 1=0$。

18 当 $a\geqslant0$ 时,$f(a)=e^a=2$,所以 $a=\ln 2$;当 $a<0$ 时,$f(a)=a^2=2$,所以 $a=-\sqrt{2}$($a=\sqrt{2}$ 舍去),所以实数 a 的值为 $-\sqrt{2}$ 或 $\ln 2$。

【易错警示】容易忽视分段函数表达式的选择前提,而填 $\pm\sqrt{2}$,$\ln 2$。

课时 3　对数的换底公式及综合应用

➡ 正文P70

答案

1 D　**2** D　**4** B　**4** D　**5** D　**6** B

7 A　**8** D　**9** B　**10** A

11 $\frac{5}{4}$　**12** $\frac{a+2}{5a}$　**13** 2　**14** 1　**15** 36

16 (1)原式 $=2\log_2 5\times\frac{3}{2}\log_3 2\times2\log_5 3=6\times\frac{\lg 5}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}\times\frac{\lg 3}{\lg 5}=6$。

(2)因为 $\log_2 3\cdot\log_3 2=1$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_4 3}=4^{\log_4 3}=3$,

$\left(\frac{49}{256}\right)^{0.5}=\left(\frac{49}{256}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{16}$,

$\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3\times(-\frac{2}{3})}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$,

所以 $\log_2 3\cdot\log_3 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_4 3}+\left(\frac{49}{256}\right)^{0.5}+\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=1-3+\frac{7}{16}+\frac{9}{16}=-1$。

17 (1)首先,方程中的 x 应满足 $x>10$,

其次,原方程可化为 $\lg\sqrt{\frac{x}{3}}=\lg\frac{5}{\sqrt{x-10}}$,

所以 $\sqrt{\frac{x}{3}}=\frac{5}{\sqrt{x-10}}$,即 $x^2-10x-75=0$。

解得 $x=15$ 或 $x=-5$(舍去),

经检验 $x=15$ 是原方程的解。

(2)首先,$x>0$ 且 $x\neq\frac{1}{10}$,其次,原方程可化为 $\lg x+\frac{2\lg x}{1+\lg x}=2$,即 $\lg^2 x+\lg x-2=0$。令 $t=\lg x$,则 $t^2+t-2=0$,

解得 $t=1$ 或 $t=-2$,即 $\lg x=1$ 或 $\lg x=-2$。

所以 $x=10$ 或 $x=\frac{1}{100}$。

经检验 $x=10$,$x=\frac{1}{100}$ 都是原方程的解。

(3)首先,$x^2-1>0$ 且 $x^2-1\neq1$,即 $x>1$ 或 $x<-1$ 且 $x\neq\pm\sqrt{2}$。

又 $2x^2-3x+1>0$,得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$。

综上 $x>1$ 或 $x<-1$ 且 $x\neq\pm\sqrt{2}$。

其次,原方程可化为 $x^2-1=2x^2-3x+1$。

所以 $x^2-3x+2=0$,所以 $x=1$ 或 $x=2$。

又因为 $x>1$ 或 $x<-1$ 且 $x\neq\pm\sqrt{2}$,所以 $x=2$。

经检验 $x=2$ 是原方程的解。

18 (1)因为 $\log_2(9^x-5)=\log_2(4\cdot3^x-8)$,

所以 $\begin{cases}9^x-5=4\cdot3^x-8,\\9^x-5>0,\\4\cdot3^x-8>0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}(3^x)^2-4\cdot3^x+3=0,\\9^x>5,\\3^x>2。\end{cases}$

所以 $x=1$。

(2)因为 $\log_a x+3\log_x a-\log_x y=3$,

$\log_a x+\frac{3}{\log_a x}-\frac{\log_a y}{\log_a x}=3$,所以 $\log_a y=(\log_a x)^2-3\log_a x+3=\left(\log_a x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$。

当 $\log_a x=\frac{3}{2}$ 时,$\log_a y$ 有最小值 $\frac{3}{4}$。

又因为 $0<a<1$,所以 y 有最大值 $a^{\frac{3}{4}}$,即 $a^{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以 $a=\frac{1}{4}$。

19 (1)设 $3^x=4^y=6^z=k(k>1)$,则 $x=\log_3 k$,$y=\log_4 k$,$z=\log_6 k$。

由 $2x=py$,得 $2\log_3 k=p\log_4 k=p\cdot\frac{\log_3 k}{\log_3 4}$。

因为 $\log_3 k\neq0$,所以 $p=2\log_3 4$。

(2)【证明】因为 $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_6 k}-\frac{1}{\log_3 k}=\log_k 6-\log_k 3=\log_k 2$，

又因为 $\frac{1}{2y}=\frac{1}{2}\log_k 4=\log_k 2$，所以 $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$。

解析

1 原式 $=\log_2 3^2\cdot\log_3 2^2=4\log_2 3\cdot\log_3 2=4\cdot\frac{\lg3}{\lg2}\cdot\frac{\lg2}{\lg3}=4$。

2 $\frac{\log_8 49}{\log_2 7}=\frac{\log_2 7^2}{\log_2 2^3}\div\log_2 7=\frac{2}{3}$。

3 因为 $\log_2 x\cdot\log_3 4\cdot\log_5 9=\frac{\lg x}{\lg2}\cdot\frac{\lg4}{\lg3}\cdot\frac{\lg9}{\lg5}=\frac{\lg x}{\lg 2}\cdot\frac{2\lg2}{\lg3}\cdot\frac{2\lg3}{\lg5}=8$，所以 $\lg x=2\lg5=\lg25$，所以 $x=25$。

4 原式 $=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{15}{16}\right)=\log_2\frac{1}{16}=-4$。

5 原式可化为 $\log_8 m=\frac{2}{\log_3 4}$，所以 $\frac{1}{3}\log_2 m=2\log_4 3$，所以 $m^{\frac{1}{3}}=3$，$m=27$。

6 $\log_3 6=\frac{\lg 6}{\lg 3}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 3}=\frac{a+b}{b}$，故选 B。

7 $a<0$，$b=\frac{\log_2\sqrt{3}}{\log_2 8}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{3}=\frac{1}{6}\log_2 3=\log_2\sqrt[6]{3}$，$c=\log_2\sqrt[4]{2}$。

又 $\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{9}$，$\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{8}$，所以 $b>c>0>a$。

8 由根与系数的关系可得 $\alpha+\beta=\log_2 6$，$\alpha\beta=\log_2 3$。所以 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\log_3 6$，故 $3^{\frac{1}{\alpha}}\times3^{\frac{1}{\beta}}=3^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}=3^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}=3^{\log_3 6}=6$。故选 D。

9 由已知得 $\log_m(xyz)=\log_m x+\log_m y+\log_m z=\frac{1}{12}$，

$\log_m x=\frac{1}{24}$，$\log_m y=\frac{1}{40}$，

故 $\log_m z=\frac{1}{12}-\log_m x-\log_m y=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}$，

所以 $\log_z m=60$。

10 因为 $x=\log_{2.5}1\ 000$，$y=\log_{0.25}1\ 000$，

所以 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_{2.5}1\ 000}=\frac{1}{\frac{\log_{1\ 000}1\ 000}{\log_{1\ 000}2.5}}=\log_{1\ 000}2.5$，同理 $\frac{1}{y}=\log_{1\ 000}0.25$，

所以 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\log_{1\ 000}2.5-\log_{1\ 000}0.25=\log_{1\ 000}10=\frac{\lg 10}{\lg 1\ 000}=\frac{1}{3}$。

【易错警示】换底公式理解不透彻，在逆用的时候会造成障碍，使计算无法完成。

11 原式 $=\left(\frac{\log_2 3}{\log_2 4}+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 3^2}\right)=\frac{5}{4}$。

12 因为 $\log_3 2=a$，所以 $\log_2 3=\frac{1}{a}$，所以 $\log_{32}18=\frac{1}{5}\log_2(2\times3^2)=\frac{1}{5}(1+2\log_2 3)=\frac{1}{5}\left(1+2\times\frac{1}{a}\right)=\frac{a+2}{5a}$。

13 由根与系数的关系，得 $\lg a+\lg b=2$，$\lg a\cdot\lg b=\frac{1}{2}$，所以 $\left(\lg\frac{a}{b}\right)^2=(\lg a-\lg b)^2=(\lg a+\lg b)^2-4\lg a\cdot\lg b=2^2-4\times\frac{1}{2}=2$。

14 原方程可变为 $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$，即 $\log_2[x(x+1)]=1$，所以 $x(x+1)=2$，解得 $x=1$ 或 $x=-2$，又 $\begin{cases}x>0,\\x+1>0,\\x+1\neq1,\end{cases}$ 即 $x>0$，所以 $x=1$。

15 因为 $f(x)=x+\log_2\frac{x}{9-x}$，所以 $f(9-x)=9-x+\log_2\frac{9-x}{x}$，故 $f(x)+f(9-x)=9$；故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=f(1)+f(8)+\cdots+f(4)+f(5)=4\times9=36$。

第五节 对数函数

课时 1 对数函数的概念与图像

➡正文P72

答案

1 A　2 D　4 $(2,3)\cup(3,5)$

4 A　5 -2

6 因为 $y=3^x-4$，所以 $3^x=y+4$，所以 $x=\log_3(y+4)$。

又因为 $x\geqslant2$，所以 $3^x-4\geqslant5$，

所以函数 $y=3^x-4(x\geqslant2)$ 的反函数为 $y=\log_3(x+4)(x\geqslant5)$。

7 C　8 C　9 $(-\infty,1]$

10 (1) $(2,+\infty)$　(2) -1

11 (1) 由题意得 $\begin{cases}\lg(2-x)\geqslant0,\\2-x>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-x\geqslant1,\\2-x>0,\end{cases}$ 所以 $x\leqslant1$。即 $y=\sqrt{\lg(2-x)}$ 的定义域为 $\{x|x\leqslant1\}$。

(2) 由 $\begin{cases}\log_3(3x-2)\neq0,\\3x-2>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}3x-2\neq1,\\3x>2,\end{cases}$ 解得 $x>\frac{2}{3}$，且 $x\neq1$。所以 $y=\frac{1}{\log_3(3x-2)}$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{2}{3}，且\ x\neq1\right\}$。

(3) 由题意得 $\begin{cases}-4x+8>0,\\2x-1>0,\\2x-1\neq1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x<2,\\x>\frac{1}{2},\\x\neq1。\end{cases}$ 所以 $y=\log_{(2x-1)}(-4x+8)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2，且\ x\neq1\right\}$。

12 D　13 A　14 C　15 C　16 $\frac{1}{4}$

17 (1) 因为 $3\log_4 5=\log_4 125$，$2\log_2 3=\log_2 9=\log_4 81$，且函数 $y=\log_4 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $125>81$，所以 $3\log_4 5>2\log_2 3$。

(2) 因为 $0>\log_{0.2}3>\log_{0.2}4$，所以 $\frac{1}{\log_{0.2}3}<\frac{1}{\log_{0.2}4}$，即 $\log_3 0.2<\log_4 0.2$。

(3) 因为函数 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $\pi>3$，所以 $\log_3\pi>\log_3 3=1$。

同理，$1=\log_\pi\pi>\log_\pi 3$，所以 $\log_3\pi>\log_\pi 3$。

(4) 因为函数 $y=\log_{0.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $0.1<0.2$，所以 $\log_{0.2}0.1>\log_{0.2}0.2=1$。

因为函数 $y=0.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且 $0<0.1$，

所以 $0.2^{0.1}<0.2^0=1$。

所以 $\log_{0.2}0.1>0.2^{0.1}$。

18 因为 $1+x>1, 0<1-x<1, 0<1-x^2<1$，

所以 $\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|$

$=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}$

$=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$，

所以 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

19 因为 $x+2y=\frac{1}{2}$，所以 $2y=\frac{1}{2}-x$。

设 $p=8xy+4y^2+1=4x\left(\frac{1}{2}-x\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+1=-3x^2+x+\frac{5}{4}=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{4}{3}$。

又因为 $x\geqslant0, y\geqslant0, x+2y=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{2}-x=2y\geqslant0$，即 $x\leqslant\frac{1}{2}$，

所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，在此范围内，$p$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$，p 的最小值为 1。

因为 $t=\log_{\frac{1}{2}}p$ 是关于 p 的单调减函数，

因此，函数 $t=\log_{\frac{1}{2}}(8xy+4y^2+1)$ 的最大值是 $\log_{\frac{1}{2}}1=0$，最小值是 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{3}$。

20 (1) 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即 $x^2-cx=x^2+xc$，所以 $cx=0$，因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $c=0$，所以 $f(x)=x^2$。

任意取 $\mathbf{R}$ 上两个不相等的实数 x_1,x_2，则

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$

$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}>0$，

所以 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 $f(x)$ 为凹函数。

(2) $g(x)=\log_2 x$ 不是凹函数。

理由：当 $x_1=1, x_2=2$ 时，$g(x_1)=0, g(x_2)=1$，

$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}$。

因为 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}=\frac{1}{2}$，$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$。故 $g(x)=\log_2 x$ 不是凹函数。

解析

1 形如 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的函数才是对数函数，只有 A 是对数函数，故选 A。

2 由于对数函数的图像过点 $M(16,4)$，所以 $4=\log_a 16$，得 $a=2$。所以对数函数的表达式为 $y=\log_2 x$。

3 由对数函数的定义可知 $\begin{cases}a-2>0,\\ a-2\neq1,\\ 5-a>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>2,\\ a\neq3,\\ a<5。\end{cases}$ 因此 $2<a<5$ 且 $a\neq3$。

4 反函数的值域为原函数的定义域 $(0,+\infty)$。

5 因为函数 $f(x)=\log_2 x$ 的反函数为 $y=2^x$，即 $g(x)=2^x$。

又因为 $g(a)=\frac{1}{4}$，所以 $2^a=\frac{1}{4}$，所以 $a=-2$。

7 由 $x^2-x>0$，解得 $x<0$ 或 $x>1$，则定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，故选 C。

8 当 $x\geqslant1$ 时，$\log_2 x\geqslant0$，所以 $y=2+\log_2 x\geqslant2$。

9 $M=(0,1]$，$N=(-\infty,0]$，所以 $M\cup N=(-\infty,1]$。

10 (1) 由 $f(x)=\log_2[\log_2(\log_2 x)]$ 知 $\log_2(\log_2 x)>0$，即 $\log_2 x>1$，所以 $x>2$。

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，所以 $ax+1>0$ 的解集为 $(-\infty,1)$。所以 $x=1$ 是方程 $ax+1=0$ 的根，所以 $a+1=0$，即 $a=-1$。

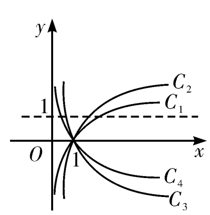
【易错警示】(1) 中的定义域特别容易因考虑不严密而出错，$\begin{cases}x>0,\\ \log_2 x>0,\\ \log_2(\log_2 x)>0,\end{cases}$ 一个也不能遗漏。

12 $y=3^{-x}$ 的反函数为 $y=-\log_3 x$，其为减函数与所给图像相似，故选 D。

13 由题意得，函数 $g(x)=\log_2\frac{x}{8}=\log_2 x-\log_2 8=\log_2 x-3$，所以只需将函数 $g(x)=\log_2\frac{x}{8}$ 的图像向上平移 3 个单位长度，即可得到函数 $f(x)=\log_2 x$ 的图像，故选 A。

14 方法一：C_1,C_2 的底数都大于 1，当 $x>1$ 时图低的底数大，所以 C_1,C_2 对应的 a 分别为 $\frac{5}{3},\sqrt{2}$。C_3,C_4 的底数都小于 1，当 $x<1$ 时底数大的图低，C_3,C_4 对应的 a 分别为 $\frac{2}{5},\frac{3}{10}$。综合以上分析，可得 C_1,C_2,C_3,C_4 对应的 a 值依次为 $\frac{5}{3},\sqrt{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10}$。故选 C。

方法二：如图，作直线 $y=1$ 与四条曲线交于四点，由 $y=\log_a x=1$，得 $x=a$（即交点的横坐标等于底数），所以横坐标小的底数小，所以 C_1,C_2,C_3,C_4 对应的 a 值分别为 $\frac{5}{3},\sqrt{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10}$。故选 C。



第 14 题图

15 $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$，因为 $a>1$，所以 $0<\frac{1}{a}<1$，则 $y=a^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，过定点 $(0,1)$；对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，过定点 $(1,0)$。故选 C。

16 设对数函数为 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$，则由题意可得 $f(8)=-3$，即 $\log_a 8=-3$，所以 $a^{-3}=8$，即 $a=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$。所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，故由 $B(n,2)$ 在函数图像上可得 $f(n)=\log_{\frac{1}{2}}n=2$，所以 $n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$。

课时 2　对数函数的性质

➡ 正文P74

答案

1 B　**2** A　**4** $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$

4 (1) 使函数 $f(x)-g(x)$ 有意义，必须有 $\begin{cases}3+2x>0,\\3-2x>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$。

所以函数 $f(x)-g(x)$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$。

(2) 由(1)知函数 $f(x)-g(x)$ 的定义域关于原点对称。

$f(-x)-g(-x)=\log_a(3-2x)-\log_a(3+2x)$

$=-[\log_a(3+2x)-\log_a(3-2x)]$

$=-[f(x)-g(x)]$，

所以函数 $f(x)-g(x)$ 是奇函数。

(3) $f(x)-g(x)>0$，即 $\log_a(3+2x)>\log_a(3-2x)$。

当 $a>1$ 时，有 $\begin{cases}3+2x>3-2x,\\3-2x>0,\\3+2x>0,\end{cases}$ 解得 x 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$。

当 $0<a<1$ 时，有 $\begin{cases}3+2x<3-2x,\\3-2x>0,\\3+2x>0,\end{cases}$ 解得 x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$。

综上所述，当 $a>1$ 时，x 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$；

当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$。

5 D　**6** D　**7** D　**8** D　**9** C　**10** D

11 D　**12** $>$　**13** $(1,2)$　**14** $m<n$　**15** $(-4,4]$

16 (1) 要使函数有意义，x 的取值需满足 $|x|>0$，解得 $x\neq0$，

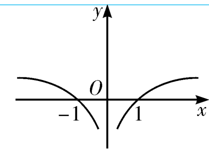
即函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

$f(-x)=\lg|-x|=\lg|x|=f(x)$，

所以 $f(-x)=f(x)$。

所以函数 $f(x)$ 是偶函数。

(2) 由于函数 $f(x)$ 是偶函数，则其图像关于 y 轴对称，将函数 $y=\lg x$ 的图像对称到 y 轴的左侧与函数 $y=\lg x$ 的图像合起来得函数 $f(x)$ 的图像，如图所示。



第 16 题图

(3) 证明：设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\lg|x_1|-\lg|x_2|=\lg\frac{|x_1|}{|x_2|}=\lg\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$，

因为 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，

所以 $|x_1|>|x_2|>0$。

所以 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|>1$。所以 $\lg\left|\frac{x_1}{x_2}\right|>0$。

所以 $f(x_1)>f(x_2)$。

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数。

17 B　**18** D　**19** 2 或 $\frac{1}{2}$

20 (1) 由 $2^x\leqslant256$，得 $x\leqslant8$，由 $\log_2 x\geqslant\frac{1}{2}$，得 $x\geqslant\sqrt{2}$，故 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant8$。

(2) 由(1)得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant8$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant3$。

又 $f(x)=\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\log_2\left(\frac{x}{4}\right)=(\log_2 x-1)\cdot(\log_2 x-2)=\left(\log_2 x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

所以当 $\log_2 x=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$；当 $\log_2 x=3$ 时，$f(x)_{\max}=2$。

21 (1) 因为 $2^{2a+1}>2^{5a-2}$，所以 $2a+1>5a-2$，即 $3a<3$，所以 $a<1$，即 $0<a<1$。

(2) 由(1)知 $0<a<1$，因为 $\log_a(3x+1)<\log_a(7-5x)$，所以 $\begin{cases}3x+1>0,\\7-5x>0,\\3x+1>7-5x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>-\frac{1}{3},\\x<\frac{7}{5},\\x>\frac{3}{4},\end{cases}$

所以 $\frac{3}{4}<x<\frac{7}{5}$，即不等式的解集为 $\left(\frac{3}{4},\frac{7}{5}\right)$。

(3) 由(1)知 $0<a<1$，所以函数 $y=\log_a(2x-1)$ 在区间 $[1,3]$ 上为减函数，所以当 $x=3$ 时，y 有最小值，为 -2，即 $\log_a 5=-2$，所以 $a^{-2}=\frac{1}{a^2}=5$，解得 $a=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(a=-\frac{\sqrt{5}}{5}\text{舍去}\right)$。

解析

1 因为 $3^x+3^{-x}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$。

又因为 $f(-x)=\log_2(3^{-x}+3^x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

2 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $f(-x)+f(x)=\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)+\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$

$=\lg\frac{1}{(x^2+1)-x^2}$

$=\lg 1=0$。

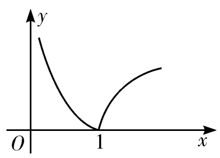
所以 $f(x)$ 为奇函数，故选 A。

3 由题意可知 $-\frac{1}{2}<\log_4 x<\frac{1}{2}$，即 $\log_4 4^{-\frac{1}{2}}<\log_4 x<\log_4 4^{\frac{1}{2}}$，解得 $\frac{1}{2}<x<2$。

5 由已知，得 $y=\log_{(2a-3)}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $2a-3>1$，解得 $a>2$，故选 D。

6 选项 A，C 中函数为减函数，$(0,2)$ 不是选项 B 中函数的定义域。选项 D 中，函数 $y=x^2-4x+5$ 在 $(0,2)$ 上为减函数，又 $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，故 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^2-4x+5)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数。

7 $f(x)$ 的图像如图所示，由图像可知单调递增区间为 $[1,+\infty)$。



第 7 题图

8 因为 $0<\frac{1}{2}<1$，$\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n<0$，所以 $m>n>1$，故选 D。

9 设 $u(x)=3-2ax$，因为 $f(x)=\log_a(3-2ax)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数，所以 $\begin{cases}0<a<1,\\u(2)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<a<1,\\3-4a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{3}{4}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right)$，故选 C。

【反思】在解决与对数相关的问题时，一定要注意对数的真数大于 0。

10 因为 $f(x)=\ln(1+x^2)+|x|$，

所以 $f(-x)=\ln(1+x^2)+|-x|=\ln(1+x^2)+|x|=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是偶函数，

当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=\ln(1+x^2)+x$ 为增函数，则不等式 $f(2x-1)>f(x+1)$ 等价于 $f(|2x-1|)>f(|x+1|)$，

即 $|2x-1|>|x+1|$，平方得 $(2x-1)^2>(x+1)^2$，$x^2-2x>0$，结合图像得 $x>2$ 或 $x<0$。

11 由于底数 $\frac{1}{3}\in(0,1)$，所以函数 $f(x)$ 的单调性与 $y=(2a-1)|x|+3$ 的单调性相反。因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $(2a-1)|x|+3>0$ 对于任意的实数 x 恒成立，所以 $2a-1>0$，即 $a>\frac{1}{2}$。

又当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$y=(2a-1)|x|+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，故选 D。

12 因为函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $2>\sqrt{3}$，所以 $\log_2 2>\log_2\sqrt{3}$。

13 由题意，得 $\begin{cases}0<3-a<1,\\0<a<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3-a>1,\\a>1,\end{cases}$ 解得 $1<a<2$。

14 因为 $2<\sqrt{5}<3$，所以 $1<\sqrt{5}-1<2$，$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$，

所以 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数。由 $f(m)>f(n)$，得 $m<n$。

15 二次函数 $y=x^2-ax+3a$ 的图像的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$，由已知，可得 $\frac{a}{2}\leqslant 2$，且满足当 $x\geqslant 2$ 时 $y=x^2-ax+3a>0$，所以

$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 2,\\4-2a+3a>0,\end{cases}$ 解得 $-4<a\leqslant 4$。

【易错警示】对数型函数的单调性既要考虑“内层”函数的单调性，又要考虑“外层”函数的单调性，学生往往顾此失彼而造成错误，要深刻理解函数单调性的定义，并掌握对数型函数复合形式的单调性的判断方法。

17 依题可知，$a^0+\log_a(0+1)+a^1+\log_a(1+1)=a$，整理得，$1+a+\log_a 2=a$，即 $\log_a 2=-1$，解得，$a=\frac{1}{2}$。

18 由题意得，二次函数 $y=x^2-2ax+a$ 有零点，因此 $\Delta=4a^2-4a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 0$，$a\geqslant 1$，故选 D。

19 (1) 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $[2,4]$ 上是增函数，所以 $\log_a 4-\log_a 2=1$，即 $\log_a\frac{4}{2}=1$，所以 $a=2$。

(2) 当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $[2,4]$ 上是减函数，所以 $\log_a 2-\log_a 4=1$，即 $\log_a\frac{2}{4}=1$，所以 $a=\frac{1}{2}$。

由 (1)(2) 知 $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2}$。

20 【易错点拨】复合函数的定义域容易被忽视，隐藏较深，要特别注意对应关系，在同一对应关系作用下，其制约条件是一致的，即都在同一取值范围内。

21 【易错点拨】在求解与对数函数或者对数型函数有关的不等式、定义域、值域问题时，容易忽略真数大于 0 这个基本要求而导致出错。

课时 3　指数函数、对数函数的综合问题　➡ 正文P76

答案

1 C	2 B	4 A	4 A	5 C	6 D
7 A	8 B	9 C	10 C	11 A	12 B

13 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

14 A　**15** C　**16** C　**17** $[1,2)$

18 (1) 由函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-mx-m)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 可得：不等式 $x^2-mx-m>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，所以 $\Delta=m^2+4m<0$，解得 $-4<m<0$，所以所求 m 的取值范围是 $(-4,0)$。

(2) 由函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上是递增的，

得 $g(x)=x^2-mx-m$ 在区间 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上是递减的，且 $g(x)>0$ 在区间 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立，

则$\begin{cases}\dfrac{m}{2}\geqslant -\dfrac{1}{2},\\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}m-m\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$。

19 (1)因为 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1-ax}{x-1}+x$ 为奇函数，

所以 $f(-x)+f(x)=0$ 对定义域内的任意 x 都成立，所以

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+ax}{-x-1}-x+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1-ax}{x-1}+x=0$，

所以 $\dfrac{1+ax}{-x-1}\cdot\dfrac{1-ax}{x-1}=1$，

解得 $a=-1$ 或 $a=1$(舍去)。

(2)由(1)知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x}{x-1}+x$，

任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，设 $x_1<x_2$，

则 $\dfrac{1+x_1}{x_1-1}-\dfrac{1+x_2}{x_2-1}=\dfrac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$，

所以 $\dfrac{1+x_1}{x_1-1}>\dfrac{1+x_2}{x_2-1}>0$，所以 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x_1}{x_1-1}<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x_2}{x_2-1}$，所以

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x_1}{x_1-1}+x_1<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x_2}{x_2-1}+x_2$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以

$f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上是增函数。

(3)令 $g(x)=f(x)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$x\in[3,4]$，

因为 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $x\in[3,4]$ 上是减函数，

所以由(2)知 $g(x)=f(x)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$x\in[3,4]$ 是增函数，

所以 $g(x)_{\min}=g(3)=\dfrac{15}{8}$，所以对于区间 $[3,4]$ 上的每个

x 值，不等式 $f(x)>\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+m$ 恒成立，即 $m<g(x)$ 恒成

立，所以 $m<\dfrac{15}{8}$。

20 (1)幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+3}$ $(m\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$

上单调递增，则 $\begin{cases}(m-1)^2=1,\\ m^2-4m+3>0,\end{cases}$ 解得：$m=0$，

故 $f(x)=x^3$。

(2)由于 $f(x)=x^3$，

故函数 $g(x)=-\sqrt[3]{f(x)^2}+2ax+1-a=-x^2+2ax+1-a$，

函数为开口方向向下的抛物线，对称轴为 $x=a$。

由于在 $[0,2]$ 上的最大值为3，

①当 $a\geqslant 2$ 时，$g(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

故：$g(x)_{\max}=g(2)=3a-3=3$，解得 $a=2$。

②当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，

故：$g(x)_{\max}=g(0)=1-a=3$，解得：$a=-2$。

③当 $0<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增，在 $[a,2]$ 上单调递减，

故：$g(x)_{\max}=g(a)=a^2+1-a=3$，

解得：$a=-1$(舍去)，或 $a=2$(舍去)，

综上所述：$a=\pm 2$。

解析

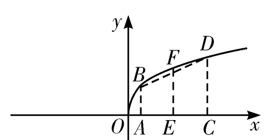
1 因为 $y=2^x$ 与 $y=\log_2x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均为增函数，又 $0<m<n$，所以 $2^m<2^n$，$\log_2m<\log_2n$，所以 A，D 错误；因为 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 均为减函数，又 $0<m<n$，所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^m>\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\log_{\frac{1}{2}}m>\log_{\frac{1}{2}}n$，所以 B 错误，C 正确，故选 C。

2 由函数 $y=\log_3x$ 的单调性，可知 $a=\log_37\in(1,2)$。由函数 $y=2^x$ 的单调性，可知 $b=2^{1.3}>2$。由函数 $y=x^{1.1}$ 的单调性，可知 $c=0.8^{1.1}\in(0,1)$，所以 $c<a<b$，故选 B。

【易错点拨】在不能用同一函数的单调性得出大小的情况下，找不到适当的"中间值"比较得出大小，是这类题出错的主要原因，这里 0,1,2 就是"中间值"，是根据基本函数的单调性得出来的。

3 因为 $a=\log_{\frac{1}{2}}9<\log_{\frac{1}{2}}1=0$，函数 $y=\log_3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\log_31<\log_32<\log_33$，即 $0<\log_32<1$；$c=\log_57>\log_55=1$。所以 $a<b<c$。故选 A。

4 幂函数 $f(x)=x^{\frac{4}{5}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，大致图像如图所示。设 $A(x_1,0)$，$C(x_2,0)$，其中 $0<x_1<x_2$，则 AC 的中点 E 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},0\right)$，$|AB|=f(x_1)$，$|CD|=f(x_2)$，$|EF|=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$。因为 $|EF|>\dfrac{1}{2}(|AB|+|CD|)$，所以 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故选 A。

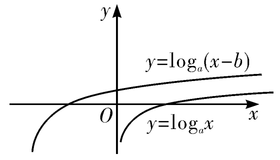


第 4 题图

5 由题意可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(a)=f(|a|)$，$f(b)=f(|b|)$，$f(c)=f(|c|)$。又 $|a|=\ln\pi>1$，$|b|=(\ln\pi)^2>|a|$，$|c|=\dfrac{1}{2}\ln\pi$，且 $0<\dfrac{1}{2}\ln\pi<|a|$，故 $|b|>|a|>|c|$，所以 $f(|c|)>f(|a|)>f(|b|)$，即 $f(c)>f(a)>f(b)$。

6 因为 $a>1$，所以函数 $y=\log_ax$ 的图像如图所示，函数 $y=\log_a(x-b)(b<-1)$ 的图像就是把函数 $y=\log_ax$ 的图像向左平移 $|b|(|b|>1)$ 个单位长度，如图所示。

由图可知函数 $y=\log_a(x-b)$ 的图像不经过第四象限。



第 6 题图

7 根据函数的奇偶性可知，$y=x$ 是奇函数，$y=\ln|x|$ 是偶函数。因为 $f(x)$ 表示的为奇函数与偶函数之积，所以得到的函数是奇函数，因此排除选项 C，D；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以选项 B 错误。故选 A。

8 因为 $\lg a+\lg b=0$，所以 $ab=1$，所以 $b=\frac{1}{a}$。

所以 $g(x)=-\log_b x=\log_a x$。又因为 $f(x)=a^x$，

所以函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 互为反函数，故选 B。

9 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶函数，所以 $f(x)\cdot g(x)$ 也是偶函数，由此可排除 A，D。又由 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\cdot g(x)\to-\infty$，可排除 B。故选 C。

10 因为 $f(x)=ka^x-a^{-x}=ka^x-\frac{1}{a^x}$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $k-1=0$，所以 $k=1$，所以 $f(x)=a^x-\frac{1}{a^x}$。又因为函数 $y=a^x$，$y=-\frac{1}{a^x}$ 在定义域上单调性相同，函数 $f(x)$ 是增函数，所以 $a>1$，所以函数 $g(x)=\log_a(x+k)=\log_a(x+1)$。$g(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，在其定义域上单调递增。故选 C。

11 由题意知 $f(x)=\log_a x$，又因为 $f(\sqrt{a})=a$，所以 $\log_a\sqrt{a}=a$，所以 $a=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，故选 A。

12 若 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$4^x<\log_a x$ 恒成立，则 $0<a<1$。在 $x=\frac{1}{2}$ 处也需满足 $4^{\frac{1}{2}}<\log_a\frac{1}{2}$，得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$。综上，$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$。故选 B。

13 因为偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，所以在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)>0$，即 $\log_4 x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$。

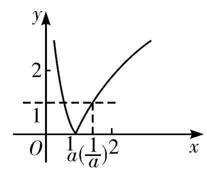
14 因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$，

所以 $\log_{2\,015}\frac{1+mx}{1-2\,019x}+\log_{2\,015}\frac{1-mx}{1+2\,019x}=0$，

所以 $m=2\,019$，所以 $f(x)=\log_{2\,015}\frac{1+2\,019x}{1-2\,019x}$，其定义域为 $-\frac{1}{2\,019}<x<\frac{1}{2\,019}$。

所以 $a\in\left(0,\frac{1}{2\,019}\right]$，结合指数函数 $y=2\,019^x$ 的单调性可知 m^a 的取值范围是 $(1,2\,019^{\frac{1}{2\,019}}]$。

15 先画出函数 $f(x)=|\log_a x|$ 的图像，再画出 $y=1$（如图中虚线所示），交点为 $(a,1)(a>1)$ 或 $\left(\frac{1}{a},1\right)(0<a<1)$。由于不等式 $|f(x)|>1$ 对于任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，当 $a>1$ 时，得 $a<2$，所以 $a\in(1,2)$；当 $0<a<1$ 时，得 $\frac{1}{2}<a$，所以 $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$。综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$，故选 C。



第 15 题图

16 当 $a>0$ 时，由 $\log_2 a>\log_{\frac{1}{2}}a$ 得 $a>1$；当 $a<0$ 时，由 $\log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a)$ 得 $0<-a<1$，$-1<a<0$。所以 $-1<a<0$ 或 $a>1$，故选 C。

17 设 $t=\frac{ax-2}{x-1}$，则函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在定义域上单调递减，要使 $f(x)$ 在区间 $(2,4)$ 上是减函数，则 $t=\frac{ax-2}{x-1}$ 在 $(2,4)$ 上为增函数。因为 $t=\frac{ax-2}{x-1}=\frac{a(x-1)+a-2}{x-1}=a+\frac{a-2}{x-1}$，所以要使函数 $t=\frac{ax-2}{x-1}$ 在区间 $(2,4)$ 上为增函数，则 $a-2<0$，即 $a<2$。要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $t>0$，即 $t=a+\frac{a-2}{x-1}>0$ 在 $(2,4)$ 上成立，所以只需当 $x=2$ 时，$t=\frac{2a-2}{2-1}=2a-2\geqslant0$ 即可，解得 $a\geqslant1$。综上，实数 a 的取值范围是 $[1,2)$。

19 【方法点拨】分离参变量是恒成立问题中常用的方法，这里 $f(x)>\left(\frac{1}{2}\right)^x+m$ 恒成立，即 $f(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^x>m$ 恒成立，就变成求 $f(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的最小值问题了。

第六节　指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

正文P78

答案

1 D　　2 C　　4 D

4 D　　5 C　　6 C　　7 B　　8 B

9 3　　10 $y=x^2$

11 依题意知，x_1 和 x_2 是使两个函数的函数值相等的自变量 x 的值。当 $x<x_1$ 时，$2^x>x^3$，即 $f(x)>g(x)$；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$f(x)<g(x)$；

当 $x>x_2$ 时，$f(x)>g(x)$。

因为 $f(1)=2$，$g(1)=1$，$f(2)=2^2=4$，$g(2)=2^3=8$，

所以 $x_1\in[1,2]$，即 $a=1$；

又因为 $f(8)=2^8=256$，$g(8)=8^3=512$，

$f(8)<g(8)$，$f(9)=2^9=512$，$g(9)=9^3=729$，

$f(9)<g(9)$，$f(10)=2^{10}=1\ 024$，$g(10)=10^3=1\ 000$，

$f(10)>g(10)$。

所以 $x_2\in[9,10]$，即 $b=9$。

12 C　**13** C　**14** C　**15** 300

16 $y=150(1+x)^{10}$　**17** 7 400

18 用指数型函数 $g(x)=a\cdot b^x+c$ 作为模拟函数较好，理由如下：因为 $f(x)=px^2+qx+r$，由已知 $f(1)=1$，$f(2)=1.2$，$f(3)=1.3$，得 $\begin{cases}p+q+r=1,\\4p+2q+r=1.2,\\9p+3q+r=1.3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-0.05,\\q=0.35,\\r=0.7。\end{cases}$ 所以 $f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$，故 $f(4)=1.3$。又因为 $g(x)=a\cdot b^x+c$，由已知 $g(1)=1$，$g(2)=1.2$，$g(3)=1.3$，得 $\begin{cases}a\cdot b+c=1,\\a\cdot b^2+c=1.2,\\a\cdot b^3+c=1.3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.8,\\b=0.5,\\c=1.4。\end{cases}$ 所以 $g(x)=-0.8\times0.5^x+1.4$，$g(4)=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$。根据4月份的实际产量为1.37万件，所以 $|1.3-1.37|>|1.35-1.37|$，故选用 $g(x)=a\cdot b^x+c$ 作为模拟函数较好。

19 (1)由题知，当燕子静止时，它的速度 $v=0$，代入函数关系式可得 $0=5\log_2\dfrac{Q}{10}$，解得 $Q=10$。

即燕子静止时的耗氧量是10个单位。

(2)将耗氧量 $Q=80$ 代入函数关系式，得

$y=5\log_2\dfrac{80}{10}=5\log_2 8=15(\text{m/s})$。

即当一只燕子的耗氧量是80个单位时，它的飞行速度为15 m/s。

20 (1)因为桶2中的水是从桶1中流出的水，而桶1开始时的水是 a 升，桶1中剩余的水满足 $y_1=ae^{-nt}$，

所以桶2中的水与 t 的函数关系式是 $y_2=a-ae^{-nt}$。

(2)因为 $t=5$ 时，$y_1=y_2$，所以 $ae^{-5n}=a-ae^{-5n}$，

解得 $2e^{-5n}=1$，$n=\dfrac{1}{5}\ln 2$。所以 $y_1=ae^{-\frac{\ln 2}{5}t}$。

当 $y_1=\dfrac{a}{8}$ 时，有 $\dfrac{a}{8}=ae^{-\frac{\ln 2}{5}t}$，解得 $t=15$。

所以在15分钟时桶1中的水是 $\dfrac{a}{8}$ 升。

解析

1 由于指数型函数的增长是爆炸式增长，则当 x 越来越大时，函数 $y=100^x$ 的增长速度最快。

2 结合指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 和对数函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图像易得C正确。

4 在同一坐标系中画出函数 $y=x^{0.7}$，$y=0.7^x$，$y=\log_{0.7}x$ 的图像，观察 $x=6$ 时的 y 值，或由 $6^{0.7}>1$，$0<0.7^6<1$，$\log_{0.7}6<0$ 来判断。

5 因为 $f(1)g(2)=a\log_a 2<0(a>0,a\neq1)$，

所以 $\log_a 2<0$，所以 $0<a<1$。结合四个选项，可知选C。

6 画图可知。

7 由 $f(1+x)=f(1-x)$，知 $\dfrac{b}{2}=1$，$b=2$。

由 $f(0)=3$，知 $c=3$。此时 $f(x)=x^2-2x+3$。

当 $x<0$ 时，$3^x<2^x<1$，函数 $y=f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1)$ 上是减函数，所以 $f(b^x)<f(c^x)$；

当 $x=0$ 时，$f(b^x)=f(c^x)$；

当 $x>0$ 时，$3^x>2^x>1$，函数 $y=f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(b^x)<f(c^x)$。

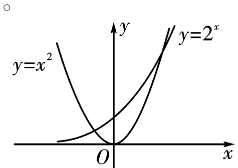
综上，$f(b^x)\leqslant f(c^x)$。

8 方法一：在同一坐标系中画出函数 $y=\log_2x$，$y=x^2$，$y=2^x$ 的图像，在区间 $(2,4)$ 内从上往下依次是 $y=x^2$，$y=2^x$，$y=\log_2x$ 的图像。所以 $x^2>2^x>\log_2x$。故选B。

方法二：取 $x=3$，经检验知B正确。故选B。

【易错点拨】函数 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 的图像在区间 $(2,4)$ 上时，$y=x^2$ 在 $y=2^x$ 的上面，不易画出来。

9 函数 $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=x^2$ 的图像如图所示，显然函数 $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=x^2$ 的图像在 $(-\infty,0)$ 上有一个交点，又 $f(2)=g(2)$ 且指数函数的增长速度大于幂函数的增长速度，所以在 $(0,+\infty)$ 上它们有2个交点，综上，两函数图像交点的个数为3。



第9题图

10 当 x 变大时，x 比 $\ln x$ 增长要快，

所以 x^2 要比 $x\ln x$ 增长得快。

12 当 t 分别取2，3，4，5，6时，C选项中得到的函数值最接近实验数据，故选C。

13 设每年湖水量为上一年的 $q\%$，则 $(q\%)^{50}=0.9$，所以 $q\%=0.9^{\frac{1}{50}}$，所以 x 年后的湖水量 $y=0.9^{\frac{x}{50}}m$。

14 设原进货价为 a，销售价为 b，由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{b-a}{a}\times100\%=r\%,\\[2mm]\dfrac{b-a\times92\%}{a\times92\%}\times100\%=(r+10)\%\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{100+r}{100},\\[2mm]\dfrac{b}{a}\times\dfrac{100}{92}=\dfrac{r+110}{100},\end{cases}$$

所以 $\dfrac{100+r}{100}\times\dfrac{100}{92}=\dfrac{r+110}{100}$，

解得 $r=15$。

15 由已知第一年有100只，得 $a=100$，将 $a=100$，$x=7$ 代入 $y=a\log_2(x+1)$，得 $x=300$。

16 1年后，$y=150(1+x)$；2年后，$y=150(1+x)^2$；3年后，$y=150(1+x)^3$，…，10年后，$y=150(1+x)^{10}$。

17 设距现在有 x 年，则有 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\ 730}}=41\%$，两边取对数，利用计算器可得 $x\approx7\ 400$。

20 【易错点拨】不能充分应用指数式与对数式的互化，不易找到解题方法。

单元综合

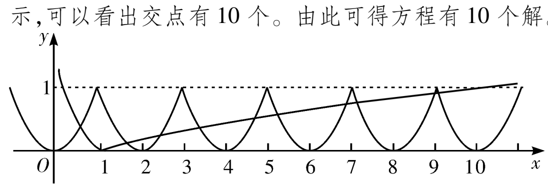
第三章 专题 突破专练

➡正文 P80

答案

1 B　2 C　4 B　4 A

5 画出函数 $y=x^2$ 和 $y=|\lg x|$ 在 $[-1,1]$ 上的图像，如图所示，可以看出交点有 10 个。由此可得方程有 10 个解。



第 5 题图

6 B

7 (1) 因为对任意的实数 x,y 都有 $f(x^y)=yf(x)$，若令 $x=1$，$y=2$，则有 $f(1^2)=2f(1)$，所以 $f(1)=0$。

(2) 对任意 $0<x_1<x_2$，存在 s,t 使得 $x_1=\left(\frac{1}{2}\right)^s$，$x_2=\left(\frac{1}{2}\right)^t$，且 $s>t$。

所以 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^s\right)-f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^t\right)=(s-t)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。

8 (1) 令 $x=y=1$，则 $f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)-f(1)=0$，从而 $f(1)=0$。

(2) 因为 $f(xy)=f\left(\frac{x}{\frac{1}{y}}\right)=f(x)-f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(1)+f(y)=f(x)+f(y)$，所以 $f(x^n)=f(\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{n\text{个}x})=nf(x)\ (n\in\mathbf{N})$。

9 (1) 因为对任意实数 m,n，恒有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，令 $m=1,n=0$，则 $f(1)=f(1)\cdot f(0)$。

因为当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$，所以 $f(0)=1$。

设 $m=x<0,n=-x>0$，所以 $f(0)=f(x)\cdot f(-x)$，所以 $f(x)=\frac{f(0)}{f(-x)}=\frac{1}{f(-x)}>1$。

即当 $x<0$ 时，有 $f(x)>1$。

(2) 设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，所以 $0<f(x_2-x_1)<1$。

由(1)知 $f(x_1)>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。

10 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

11 当 $0<a<1$ 时，有 $a^3<a^2$，即 $a^3+1<a^2+1$。又当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$，即 $P>Q$。

当 $a>1$ 时，有 $a^3>a^2$，即 $a^3+1>a^2+1$。

又当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$，即 $P>Q$。

综上可得，$P>Q$。

12 (1) 当 $a=2$ 时，函数 $f(x)=\log_2(1+x)$ 在 $[3,63]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(3)=\log_2(3+1)=2$；$f(x)$ 的最大值为 $f(63)=\log_2(63+1)=\log_2 64=6$。

(2) 不等式 $f(x)-g(x)>0$，即 $f(x)>g(x)$，即 $\log_a(1+x)>\log_a(1-x)$。

①当 $0<a<1$ 时，由不等式可得 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\\1+x<1-x,\end{cases}$ 解得 $-1<x<0$。

②当 $a>1$ 时，由不等式可得 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\\1+x>1-x,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$。

综上，当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围是 $(-1,0)$，当 $a>1$ 时，x 的取值范围是 $(0,1)$。

13 (1) 因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以关于原点对称。又 $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。

(2) 当 $a>1$ 时，$a^2-1>0$，$y=a^x$ 为增函数，$y=a^{-x}$ 为减函数，从而 $y=a^x-a^{-x}$ 为增函数，所以 $f(x)$ 为增函数；当 $0<a<1$ 时，$a^2-1<0$，$y=a^x$ 为减函数，$y=a^{-x}$ 为增函数，从而 $y=a^x-a^{-x}$ 为减函数，所以 $f(x)$ 为增函数，故当 $a>0$，且 $a\neq1$ 时，$f(x)$ 在定义域内单调递增。

(3) 由(2)知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以在区间 $[-1,1]$ 上为增函数，所以 $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{a}{a^2-1}\cdot(a^{-1}-a)=-1$。所以要使 $f(x)\geqslant b$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，则只需 $b\leqslant-1$。故 b 的取值范围是 $(-\infty,-1]$。

14 (1) 假设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 有“飘移点” x_0，则 $\frac{1}{x_0+1}=\frac{1}{x_0}+1$ 即 $x_0^2+x_0+1=0$，而此方程无实根，矛盾，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 没有“飘移点”。

(2) 令 $h(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)=2(2^{x-1}+x-1)$，

又 $h(0)=-1$，$h(1)=2$，所以 $h(0)\cdot h(1)<0$，

所以 $h(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一实根 x_0，即函数 $f(x)=x^2+2^x$ 有“飘移点”。

(3) 若 $f(x)=\lg\left(\frac{a}{x^2+1}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有“飘移点” x_0，

即有 $\lg\frac{a}{(x_0+1)^2+1}=\lg\left(\frac{a}{x_0^2+1}\right)+\lg\frac{a}{2}$ 成立，即 $\frac{a}{(x_0+1)^2+1}=\frac{a}{x_0^2+1}\cdot\frac{a}{2}$，

整理得 $(2-a)x_0^2-2ax_0+2-2a=0$，从而关于 x 的方程 $g(x)=(2-a)x^2-2ax+2-2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上应有实数根 x_0。

由 $f(x)=\lg\left(\frac{a}{x^2+1}\right)$ 可知，$a>0$。

当 $a=2$ 时，方程的根为 $x=-\frac{1}{2}$，不符合要求。

当 $0<a<2$ 时，由于函数 $g(x)$ 图像的对称轴 $x=\frac{a}{2-a}>0$，

可知只需 $\Delta=4a^2-4(2-a)(2-2a)\geq 0$，

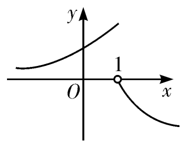
所以 $3-\sqrt{5}\leq a\leq 3+\sqrt{5}$，即有 $3-\sqrt{5}\leq a<2$。

当 $a>2$ 时，$g(x)$ 图像的对称轴 $x=\frac{a}{2-a}<0$，可知，只需 $g(0)=2-2a>0$，所以 $a<1$（舍去）。

所以 a 的取值范围是 $[3-\sqrt{5},2)$。

解析

1 先作出 $f(x)=\begin{cases}3^x, x\leq 1,\\ \log_{\frac{1}{3}}x, x>1\end{cases}$ 的大致图像，如图所示，再把 $f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位长度，可得到 $y=f(x+1)$ 的图像。



第 1 题图

【名师点评】平移变换中，“左加右减”针对的是自变量 x，“上加下减”针对的是因变量 y。

2 显然函数为偶函数，所以图像关于 y 轴对称，排除 A，B；因为 $e^{1-x^2}>0$，所以排除 D。

3 由 $f(4)\cdot g(-4)<0$ 知 $a^2\cdot\log_a 4<0$，所以 $\log_a 4<0$，所以 $0<a<1$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是减函数，只有 B 选项符合。

【名师点评】对于函数图像的判断问题要对常见函数，如一次函数、二次函数、正比例函数、反比例函数、指数函数、对数函数、形如 $y=x+\frac{1}{x}$ 的函数等的图像与性质，以及由其变换得到的函数的图像与性质掌握的十分牢固。

4 由图像知函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $a>1$，又 $-1<f(0)<0$，$f(0)=\log_a(2^0+b-1)=\log_a b$，即 $-1<\log_a b<0$，所以 $0<\frac{1}{a}<b<1$。

6 把握和的函数值等于函数值的积的特征，其典型代表函数为指数函数，又所求函数为单调递增函数，故选 B。

9 【思路点拨】

猜测 $f(x)$ 的函数模型为 $f(x)=a^x(0<a<1)$	$\xrightarrow[\text{特殊值}]{\text{代入}}$	证明(1)中的结论	$\xrightarrow{\text{函数单调性的定义}}$	判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性

10 函数 $y=\log_2\left[ax^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a\right]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

即 $ax^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立。

若 $a=0$，则 $-x>0$ 不能恒成立，所以 $a\neq 0$，则二次函数 $t=ax^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a$ 的图像在 x 轴上方，

所以 $\begin{cases}a>0,\\ (a-1)^2-4\cdot\frac{1}{4}a^2<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$。

故实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$。

11 【思路点拨】本题考查对数函数、幂函数的单调性的应用，注意对 a 进行分类讨论。

【名师点评】本题中比较 P，Q 的大小，主要是利用了对数函数、幂函数的单调性及分类讨论的方法。一般地，当指数、对数的底数含参数时，要分底数大于 1，大于 0 且小于 1 进行讨论。

第三章 真题 分类专练

➡正文 P82

答案

1 D	2 D	4 A	4 D	5 C	6 D
7 B	8 D	9 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	10 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$		
11 B	12 A	13 C			

解析

1 方法一（通性通法） 函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，又当 $x>0$ 时，$y=10^{\lg x}=x$，故函数的值域为 $(0,+\infty)$。只有 D 选项符合。

方法二（光速解法） 易知函数 $y=10^{\lg x}$ 中 $x>0$，排除选项 A，C；又 $10^{\lg x}$ 必为正值，排除选项 B。

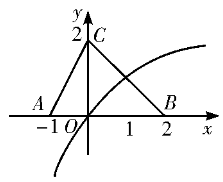
2 由题意可知 $A=\{x|-2\leq x\leq 2\}$，$B=\{x|x<1\}$，故 $A\cap B=\{x|-2\leq x<1\}$。

3 由题意得 $\begin{cases}1-2^x\geq 0,\\ x+3>0,\end{cases}$ 所以 $-3<x\leq 0$，即所求函数的定义域为 $(-3,0]$。

4 由对数函数的性质得 $0<a<1$，因为函数 $y=\log_a(x+c)$ 的图像在 $c>0$ 时是由函数 $y=\log_a x$ 的图像向左平移 c 个单位长度得到的，所以根据题中图像可知 $0<c<1$。

【点评】本题也可以根据函数在 $x=0$，$x=1$ 处的函数值与 0 的大小关系确定 c 的取值范围，即 $\log_a c>0$ 且 $\log_a(1+c)<0$，由于 $0<a<1$，所以 $c<1$，且 $1+c>1$，即 $0<c<1$。

5 在平面直角坐标系中作出函数 $y=\log_2(x+1)$ 的大致图像如图所示。



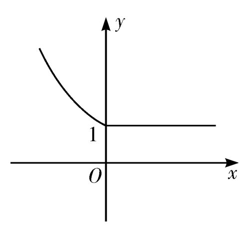
第 5 题图

所以 $f(x)\geq\log_2(x+1)$ 的解集是 $\{x|-1<x\leq 1\}$。

6 由 $x^2-2x-8>0$，得 $x<-2$ 或 $x>4$。因此，函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$。注意到函数 $y=x^2-2x-8$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，由复合函数的单调性知，$f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是 $(4,+\infty)$。

7 由 $a=\log_{0.2}0.3$ 得 $\frac{1}{a}=\log_{0.3}0.2$，由 $b=\log_2 0.3$ 得 $\frac{1}{b}=\log_{0.3}2$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{0.3}0.2+\log_{0.3}2=\log_{0.3}0.4$，所以 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，得 $0<\frac{a+b}{ab}<1$。又 $a>0$，$b<0$，所以 $ab<0$，所以 $ab<a+b<0$。

8 当 $x\leq 0$ 时，函数 $f(x)=2^{-x}$ 是减函数，则 $f(x)\geq f(0)=1$。作出 $f(x)$ 的大致图像如图所示，结合图像可知，要使 $f(x+1)<f(2x)$，则需 $\begin{cases}x+1<0,\\ 2x<0,\\ 2x<x+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geq 0,\\ 2x<0,\end{cases}$ 所以 $x<0$。



第 8 题图

【思路点拨】利用函数的性质，将不等式 $f(x+1)<f(2x)$ 进行转化，脱掉“f”，从而转化为可求解的不等式。

9 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减。又 $f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，$f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$，故 $-\sqrt{2}<2^{|a-1|}<\sqrt{2}$，则 $|a-1|<$

$\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$。

10 当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x>1$ 恒成立，当 $x-\frac{1}{2}>0$，即 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2^{x-\frac{1}{2}}>1$，当 $x-\frac{1}{2}\leqslant 0$，即 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，则不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 恒成立。当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+1+x+\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}>1$，所以 $-\frac{1}{4}<x\leqslant 0$。综上所述，$x$ 的取值范围是$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$。

11 由 $f(-x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x=-f(x)$，知函数 $f(x)$ 为奇函数，因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故选 B。

12 由题意可得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，且 $f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数。又 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{2}{1-x}-1\right)$，易知 $y=\frac{2}{1-x}-1$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数。

13 由题意，知 $f(x)=-f(-x)$，即$\frac{2^x+1}{2^x-a}=-\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-a}$，所以 $(1-a)(2^x+1)=0$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$。由 $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}>3$，得 $1<2^x<2$，所以 $0<x<1$。

第三章　单元测试卷

➡正文 P83

答案

1 C	2 C	4 B	4 D	5 A
6 D	7 B	8 B	9 B	10 B
11 B	12 C	13 $\frac{1}{3}$	14 $[-1,0)$，$(0,1]$	
15 1	16 ④			

17 (1) 原式 $=\sqrt{2}+1-1+\frac{2}{3}+\mathrm{e}-\sqrt{2}=\frac{2}{3}+\mathrm{e}$。

(2) 原式 $=\lg5+\lg10^2+\lg2^3-\lg5-\frac{1}{2}\lg2^6+50\times(\lg10)^2=\lg5+2+3\lg2-\lg5-3\lg2+50=52$。

18 (1) 由题意，知 $x^2-2ax+3>0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，故 $a=2$。

(2) 若函数的值域为 $(-\infty,-1]$，

即 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2ax+3)\leqslant -1$，且 -1 能取到，故 $x^2-2ax+3\geqslant 2$。

故 $a^2-1=0$，即 $a=1$ 或 $a=-1$。

19 (1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=\log_2(1+x)$，

在[3,63]上为增函数，所以当 $x=3$ 时，$f(x)_{\min}=\log_2(1+3)=2$。

当 $x=63$ 时，$f(x)_{\max}=\log_2 64=6$。

(2) $f(x)-g(x)>0$，即 $f(x)>g(x)$。

当 $a>1$ 时，$\log_a(1+x)>\log_a(1-x)$，满足 $\begin{cases}1+x>1-x,\\1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 所以 $0<x<1$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a(1+x)>\log_a(1-x)$，满足 $\begin{cases}1+x<1-x,\\1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 所以 $-1<x<0$。

综上，当 $a>1$ 时，x 的取值范围为 $(0,1)$；当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围为 $(-1,0)$。

20 (1) 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$b=1$。

又 $f(-1)=-f(1)$，得 $a=1$。经检验 $a=1$，$b=1$ 符合题意。

(2) 任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{2^{x_1}+1}-\frac{1-2^{x_2}}{2^{x_2}+1}=\frac{(1-2^{x_1})(2^{x_2}+1)-(1-2^{x_2})(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$。

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$。

又 $(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$。所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数。

(3) 因为 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，

所以 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)$。

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(t^2-2t)<f(k-2t^2)$。

因为 $f(x)$ 为减函数，所以 $t^2-2t>k-2t^2$，即 $k<3t^2-2t$ 恒成立。而 $3t^2-2t=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}$，所以 $k<-\frac{1}{3}$。

故 k 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$。

21 (1) 因为函数 $f(x)$ 的图像过点 $P(0,1)$，所以 $\log_2(2^0+k)=1$，解得 $k=1$。

则 $f(x)=\log_2(2^x+1)$，

因为 $2^x+1>1$，所以 $f(x)=\log_2(2^x+1)>0$，

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$。

(2) 方程有实根，即 $m=f(x)-x$ 有实根，

构造函数 $h(x)=f(x)-x=\log_2(2^x+1)-x$，

则 $h(x)=\log_2(2^x+1)-\log_2 2^x=\log_2\frac{2^x+1}{2^x}=\log_2(2^{-x}+1)$，

因为函数 $y=2^{-x}+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，而 $y=\log_2 x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以复合函数 $h(x)=\log_2(2^{-x}+1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上单调递减函数。

所以 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $h(1)=\log_2(2^{-1}+1)=\log_2 3-1$，最大值为 $h(0)=\log_2(2^{-0}+1)=1$，即 $h(x)\in(\log_2 3-1,1)$，

所以当 $m\in(\log_2 3-1,1)$ 时，方程有实根。

22 (1)因为$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 16,\\1\leqslant x^2\leqslant 16,\end{cases}$

所以 $1\leqslant x\leqslant 4$，即函数 $y=g(x)$ 的定义域为$[1,4]$。

(2)$g(x)=[f(x)]^2+af(x^2)+2=(\log_2x)^2+(2a-2)\cdot\log_2x+3-a$，令 $t=\log_2x$，$t\in[0,2]$，则 $h(t)=t^2+(2a-2)t-a+3=[t-(1-a)]^2-a^2+a+2$。

当 $a\geqslant 1$ 时，$h(t)$ 在$[0,2]$上是增函数，所以 $t=0$ 时，$h(t)_{\min}=3-a$；当 $-1<a<1$ 时，$h(t)$ 在$[0,1-a]$上是减函数，在$[1-a,2]$上是增函数，所以 $t=1-a$ 时，$h(t)_{\min}=-a^2+a+2$；

当 $a\leqslant -1$ 时，$h(t)$ 在$[0,2]$上是减函数，

所以 $t=2$ 时，$h(t)_{\min}=3a+3$。

综上，$g(x)_{\min}=\begin{cases}3-a,a\geqslant 1,\\-a^2+a+2,-1<a<1,\\3a+3,a\leqslant -1。\end{cases}$

(3)由题意知，$g(x)>0$ 恒成立，即 $g(x)_{\min}>0$。

当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)_{\min}=3-a>0$，所以 $1\leqslant a<3$；

当 $-1<a<1$ 时 $g(x)_{\min}=-a^2+a+2>0$，

所以 $-1<a<1$；

当 $a\leqslant -1$ 时，$g(x)_{\min}=3a+3>0$，所以 a 无解。

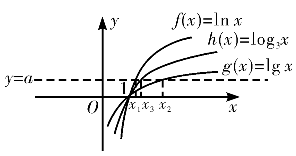
综上，$a\in(-1,3)$。

解析

1 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=e^x+\frac{1}{e^x}$不是定义域上的奇函数，而 $y=e^x-\frac{1}{e^x}$是定义域上的奇函数，且在$(-\infty,+\infty)$上，$y_1=e^x$，$y_2=-\frac{1}{e^x}$是增函数，所以 $y=e^x-\frac{1}{e^x}$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数。

2 要使函数式有意义，则$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\2-x>0,\end{cases}$解得 $-1\leqslant x<2$，即函数的定义域为$[-1,2)$。

3 根据对数函数的图像与性质，可知当底数大于 1 时，在 x 轴上方随着底数越大，函数图像越靠近 x 轴，作出 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的大致图像，如图所示。可知直线 $y=a(a>0)$ 与 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的图像交点的横坐标 x_1，x_2，x_3 的大小关系是$x_1<x_3<x_2$，故选 B。



第 3 题图

4 对数函数 $y=\log_{\frac12}x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，则由 $\log_{\frac12}x<\log_{\frac12}y<0=\log_{\frac12}1$，可得 $1<y<x$。

5 由已知得 $-\frac12\leqslant\log_{\frac12}x\leqslant\frac12$，$\left(\frac12\right)^{\frac12}\leqslant x\leqslant\left(\frac12\right)^{-\frac12}$，即$\frac{\sqrt2}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt2$。

6 函数 $f(x)=\left(\frac12\right)^x$ 的图像恒过点$(0,1)$，则函数$f(x+1)$的图像恒过点$(-1,1)$，则其反函数的图像恒过点$(1,-1)$。而选项 A,B,C 中的图像明显不过点$(1,-1)$，故排除。所以正确选项为 D。

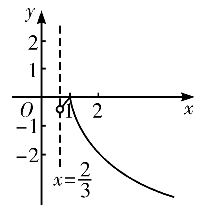
7 由题意得，函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x,x\geqslant 2,\\\left(\frac12\right)^x-1,x<2\end{cases}$是 **R** 上的减函数，

则$\begin{cases}a-2<0,\\\left(\frac12\right)^2-1\geqslant(a-2)\times 2,\end{cases}$解得 $a\leqslant\frac{13}{8}$，故选 B。

8 由 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ 是偶函数，得 $m=0$，则 $f(x)=2^{|x|}-1$。当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=2^x-1$ 单调递增，又 $a=f(\log_{0.5}3)=f(|\log_{0.5}3|)=f(\log_2 3)$，$c=f(0)$，且 $0<\log_2 3<\log_2 5$，则 $f(0)<f(\log_2 3)<f(\log_2 5)$，即 $c<a<b$。

9 因为 $a^x>1=a^0$ 的解集为$\{x|x<0\}$，所以 $0<a<1$。因为 $y=\log_a\left(x+\frac1x\right)$的最大值为 -1，由对勾函数的性质可知，$x>0$ 时，$x+\frac1x\geqslant 2$，所以 $\log_a2=-1$，解得 $a=\frac12$，故选 B。

10 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=\log_{\frac12}(3x-2)$和 $y=\log_2x$ 的大致图像(图略)，可得 $f(x)=\begin{cases}\log_2x,\frac23<x<1,\\\log_{\frac12}(3x-2),x\geqslant 1,\end{cases}$其图像如图所示，故其值域为$(-\infty,0]$。



第 10 题图

11 当 $0<x\leqslant\frac12$ 时，$1<4^x\leqslant 2$。要使 $4^x<\log_ax$，则由对数函数的性质可得 $0<a<1$。

数形结合可知只需 $2<\log_ax$，

所以$\begin{cases}0<a<1,\\\log_aa^2<\log_ax,\end{cases}$即$\begin{cases}0<a<1,\\a^2>x,\end{cases}$

对 $0<x\leqslant\frac12$ 恒成立，

所以$\begin{cases}0<a<1,\\a^2>\frac12。\end{cases}$解得$\frac{\sqrt2}{2}<a<1$，故选 B。

12 因为$f(a)=f(b)$，所以$|\lg a|=|\lg b|$，又 $b>a>0$，则 $\lg a<0$，即 $a<1$，$\lg b>0$，即 $b>1$，所以 $0<a<1<b$，$|\lg a|=-\lg a$，$|\lg b|=\lg b$，即 $\lg a+\lg b=\lg(ab)=0$，所以 $b=\frac1a$，则 $a+2b=a+\frac2a$。

令 $g(x)=x+\frac2x$，由对勾函数的性质知函数 $g(x)$ 在$(0,1)$上为减函数，所以 $g(a)>g(1)=1+\frac21=3$，即 $a+2b$ 的取值范围是$(3,+\infty)$。

13 因为 $125^x=12.5^y=1\,000$，所以 $x=\log_{125}1\,000$，$y=\log_{12.5}1\,000$，$\frac{y-x}{xy}=\frac1x-\frac1y=\log_{1\,000}125-\log_{1\,000}12.5=\log_{1\,000}\frac{125}{12.5}=\log_{1\,000}10=\frac13$。

14 若 $x<0$，则 $-x>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+2x+2$，所以当 $-x>0$ 时，$f(-x)=-(-x)^2+2(-x)+2=-x^2-2x+2$。因为函数 $f(x)$ 是定义域上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)=$

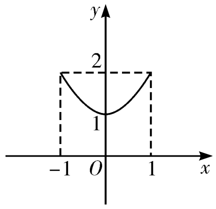
$-x^2-2x+2$，所以 $f(x)=x^2+2x-2$，$x<0$。当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+2x+2$，此时函数的递增区间为 $(0,1]$，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x-2$，此时函数的递增区间为 $[-1,0)$，综上，函数的递增区间为 $[-1,0)$，$(0,1]$。也可填 $(-1,0)$，$(0,1)$。

15 作出函数 $y=2^{|x|}$（值域为 $[1,2]$）的图像（如图所示）。

当 $x=0$ 时，$y=2^0=1$；

当 $x=-1$ 时，$y=2^{|-1|}=2$；

当 $x=1$ 时，$y=2^1=2$。



第 15 题图

所以当值域为 $[1,2]$ 时，区间 $[a,b]$ 的长度的最大值为 2，最小值为 1，它们的差为 1。

16 对于①，函数 $t=-x^2+1$ 的最大值为 1，所以 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，所以①错误；对于②，函数 $y=\log_a(2-ax)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在 $(0,1)$ 上是减函数，所以 $\begin{cases}a>1,\\2-a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 a 的取值范围是 $(1,2]$，②错误；对于③，在同一坐标系中，函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像关于 x 轴对称，③错误；对于④，在同一坐标系中，函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，④正确。综上，正确结论的序号是④。

第四章　函数应用

第一节　函数与方程

课时 1　函数的零点

➡ 正文P85

答案

1 A　2 C　4 D　4 C　5 B

6 -1 和 0

7 C　8 C　9 D　10 C　11 A

12 1　13 $(-1,0)$

14 因为函数 $f(x)=\frac{2x-5}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且函数 $f(x)$ 的图像在区间 $(2,3)$ 上是连续不断的。

又 $f(2)=\frac{2\times 2-5}{2^2+1}=-\frac{1}{5}<0$，

$f(3)=\frac{2\times 3-5}{3^2+1}=\frac{1}{10}>0$，

所以 $f(2)\cdot f(3)<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(2,3)$ 内至少有一个零点。

15 B　16 3　17 2　18 1

19 B　20 C　21 0 或 $-\frac{1}{4}$

22 $(1,+\infty)$　23 $(-2,-1]\cup(1,2]$

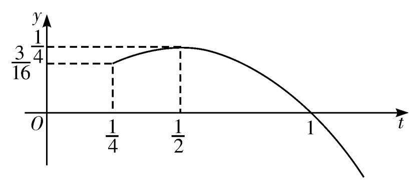
24 (1) 因为 $f(x)=3^x$，且 $f(a+2)=18$，所以 $3^{a+2}=18$，所以 $3^a=2$。

因为 $g(x)=3^{ax}-4^x$，所以 $g(x)=2^x-4^x$。

(2) 方法一：方程为 $2^x-4^x-b=0$，令 $t=2^x$，$x\in[-2,2]$，则 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 4$，且方程 $t-t^2-b=0$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上有两个不同的解。

设 $y=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$y=b$，则两函数图像在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 内有两个交点。

画出 $y=t-t^2$，$t\in\left[\frac{1}{4},4\right]$ 的图像（部分），如图所示。



第 24 题图

由图知当 $b\in\left[\frac{3}{16},\frac{1}{4}\right)$ 时，方程有两个不同的解。

方法二：方程为 $2^x-4^x-b=0$，令 $t=2^x$，$x\in[-2,2]$，则 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 4$，所以方程 $t-t^2-b=0$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上有两个不同的解。

设 $f(t)=-t^2+t-b$，$t\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，

所以 $\begin{cases}\Delta=1-4b>0\Rightarrow b<\frac{1}{4},\\ f\left(\frac{1}{4}\right)\leqslant 0\Rightarrow b\geqslant\frac{3}{16},\\ f(4)\leqslant 0\Rightarrow b\geqslant -12,\end{cases}$ 解得 $b\in\left[\frac{3}{16},\frac{1}{4}\right)$。

25 令 $\log_2 x=t$，$x\in\left[\frac{1}{8},4\right]$，则 $g(t)=t^2+4t+m$（$t\in[-3,2]$），

(1) 由于函数 $f(x)$ 存在大于 1 的零点，所以方程 $t^2+4t+m=0$ 在 $t\in(0,2]$ 内存在根，

由 $t^2+4t+m=0$，得 $m=-t^2-4t$，$t\in(0,2]$，所以 $m\in[-12,0)$。

(2) 函数 $f(x)$ 有两个互异的零点 α,β，则函数 $g(t)$ 在 $[-3,2]$ 内有两个互异的零点 t_1,t_2，其中 $t_1=\log_2\alpha$，$t_2=\log_2\beta$，

所以 $\begin{cases}\Delta=16-4m>0,\\ g(-3)\geqslant 0,\\ g(2)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant m<4$。

所以 $m\in[3,4)$。

根据根与系数的关系，可知 $t_1+t_2=-4$，即 $\log_2\alpha+\log_2\beta=-4$，所以 $\log_2(\alpha\cdot\beta)=-4$，$\alpha\cdot\beta=2^{-4}=\frac{1}{16}$。

解析

1 观察图像可知，A 选项中图像表示的函数没有零点。

2 由 $f(x)=0$，得 $2x-3=0$，解得 $x=\frac{3}{2}$，所以函数 $f(x)=2x-3$ 的零点为 $\frac{3}{2}$。

3 令 $y=0$，得选项 A 和 C 中函数的零点均为 1 和 -1；B 中函数的零点为 $-\frac{1}{2}$ 和 1；只有 D 中函数无零点。

4 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x_0)=-f(x_0)$，而 x_0 是 $y=f(x)+e^x$ 的一个零点，所以 $f(x_0)+e^{x_0}=0$。对于选项 A，$f(x_0)e^{-x_0}-1=-1-1=-2\neq 0$，排除 A；对于选项 B，$f(x_0)e^{x_0}+1=-e^{2x_0}+1\neq 0$，排除 B；对于选项 C，$f(-x_0)e^{-x_0}-1=-f(x_0)e^{-x_0}-1=1-1=0$，C 正确；对于选项 D，$f(-x_0)e^{-x_0}+1=-f(x_0)e^{-x_0}+1=2\neq 0$，排除 D。故选 C。

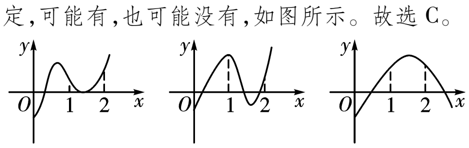
5 由于 $f(-1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0$，$f(0)=1>0$，故 $f(x)=2^x+x$ 的零点 $a\in(-1,0)$。

由于 $g(2)=0$，故 $g(x)$ 的零点 $b=2$。

由于 $h\left(\frac{1}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$，$h(1)=1>0$，故 $h(x)$ 的零点 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，因此 $a<c<b$。

6 因为 $f(x)=ax-b$ 的零点是 3，所以 $f(3)=0$，即 $3a-b=0$，也就是 $b=3a$，所以 $g(x)=bx^2+3ax=bx^2+bx=bx(x+1)$。所以方程 $g(x)=0$ 的两个根为 -1 和 0，即函数 $g(x)$ 的零点为 -1 和 0。

7 根据零点存在性定理，由于 $f(0)\cdot f(1)<0$，$f(1)\cdot f(2)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上一定有零点，在区间 $(1,2)$ 上无法确定，可能有，也可能没有，如图所示。故选 C。



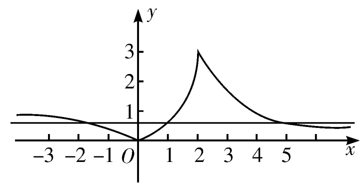
第 7 题图

8 因为函数 $f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线，又 $f(-2)=e^{-2}-4<0$，$f(-1)=e^{-1}-3<0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=e-1>0$，所以 $f(0)\cdot f(1)<0$。故函数的一个零点所在的区间是 $(0,1)$。

9 函数 $f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线，$f(2)\cdot f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3-3+2\right]=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{8}-1\right)<0$，根据函数零点的存在性定理知，$f(x)$ 的零点所在的一个区间为 $(2,3)$。

10 函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2 x$ 在其定义域上连续，$f(4)=\frac{3}{2}-2<0$，$f(2)=3-1>0$，故函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(2,4)$ 上。

11 因为函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, & x\leq 2,\\ \frac{3}{x-1}, & x>2,\end{cases}$ 所以作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示。方程 $f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根，等价于函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=a$ 有三个不同的交点。根据图像可知，当 $0<a<1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像与 $y=a$ 有三个不同的交点，方程 $f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根，故 a 的取值范围是 $(0,1)$。

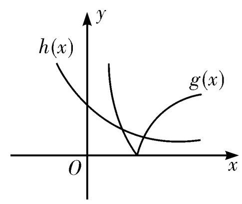


第 11 题图

15 因为 $\Delta=b^2-4ac>0$，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，即二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有 2 个零点。

16 由 $f(-2)\cdot f(-1.5)<0$，$f(-0.5)\cdot f(0)<0$，$f(0)\cdot f(0.5)<0$ 可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 内至少有 3 个零点。

17 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点，即 $2^x|\log_{0.5}x|-1=0$ 的解，即 $|\log_{0.5}x|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的解，作出函数 $g(x)=|\log_{0.5}x|$ 和函数 $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像，如图所示，由图可知，两函数图像共有两个交点，故函数 $f(x)$ 有两个零点。

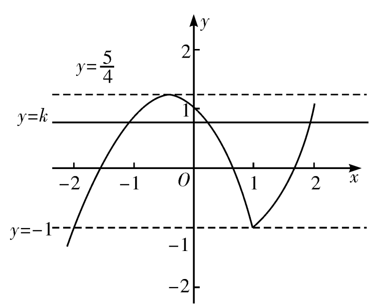


第 17 题图

【易错点拨】本题求解的关键在于将方程 $2^x|\log_{0.5}x|-1=0$ 变形为 $|\log_{0.5}x|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，从而转化为两个简单函数的图像的交点来直观求解。

18 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续不断的函数，且 $f(0)=e^0-3<0$，$f(1)=e^1+4-3>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点。又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f(x)$ 只有 1 个零点。

19 因为 $f(x)=|x-1|(x+1)-x=\begin{cases}-x^2-x+1, & x\leq 1,\\ x^2-x-1, & x>1,\end{cases}$ 故函数 $f(x)$ 的图像如图所示，由图可知：当 $-1<k<\frac{5}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=k$ 有三个交点，即关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有三个不同的实数解，故实数 k 的取值范围是 $-1<k<\frac{5}{4}$。



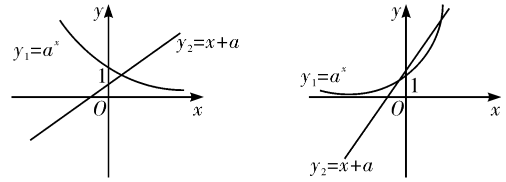
第 19 题图

20 因为 $f(2x^2+1)+f(\lambda-x)=0$，所以由 $f(x)$ 为奇函数得 $f(2x^2+1)=-f(\lambda-x)=f(x-\lambda)$，所以由题可知 $2x^2+1=x-\lambda$，整理有：$2x^2-x+1+\lambda=0$。因为方程只有一个解，所以 $b^2-4ac=1-8(1+\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{7}{8}$。

21 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=1+4a=0$，得 $a=-\frac{1}{4}$。

22 由 $f(x)=a^x-x-a=0$，可得 $a^x=x+a$，设 $y_1=a^x$，$y_2=x+a$，由题意可知，两函数的图像有两个不同的交点，分两种情况：

①当 $0<a<1$ 时，如图甲所示，不合题意；②当 $a>1$ 时，如图乙所示，符合题意。综上所述，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$。



甲　　　　乙

第 22 题图

23 由题意知 $f(x)=\begin{cases}x^2-2,-1\leqslant x\leqslant 2,\\x-1,x<-1\text{ 或 }x>2\end{cases}$。画出 $f(x)$ 的图像(图略)，数形结合可得实数 c 的取值范围是 $(-2,-1]\cup(1,2]$。

24【易错点拨】把指数方程的解通过指数函数的性质，转化为二次方程的解，所以自变量的值或者范围就会有变化。忽视了这些变化就会导致错误。

课时 2　二分法及其应用

➡ 正文P87

答案

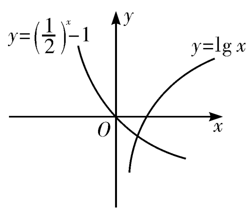
1 C　**2** A　**4** B　**4** C　**5** A　**6** D

7 D　**8** A　**9** C　**10** B

11 $b-a<0.001$　**12** $(2,4)$

13 -2.25

14 先做出函数 $y=\lg x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 的图像，估算出方程的解所在的一个区间，再用二分法求解。作出图像如图所示，由图像可知，方程 $\lg x=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 有唯一实数解，且在区间 $(0,1)$ 内。设 $f(x)=\lg x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$，$f(1)=\frac{1}{2}>0$，用计算器计算，列表如下：



第 14 题图

取值区间	中点值	中点函数近似值	区间长度
(0,1)	0.5	−0.008 1	1
(0.5,1)	0.75	0.280 5	0.5
(0.5,0.75)	0.625	0.147 5	0.25
(0.5,0.625)	0.562 5	0.073 0	0.125

由于区间 $(0.5,0.625)$ 的区间长度为 $0.125<0.2$，此时该区间中点为 0.562 5 与真正零点的误差不超过 0.1，所以函数 $f(x)$ 的零点近似值为 0.562 5，即方程 $\lg x=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 的近似解为 $x\approx 0.562\,5$。

15 函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 在区间 $(1,1.5)$ 上有 $f(1)=-2<0$，$f(1.5)=0.625>0$，

故 $f(x)$ 在 $(1,1.5)$ 内有零点。

又 $f(x)=0$，即 $x^3+x^2-2x-2=0$，

所以 $(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,1.5)$ 内的零点为 $\sqrt{2}$，

故精确到 $\varepsilon=0.1$ 的零点为 1.4。

而根据二分法，将 $(1,1.5)$ 分为 $(1,1.25)$，$(1.25,1.5)$，$f(1.25)\approx -0.984<0$，故 $f(x)$ 的零点在 $(1.25,1.5)$ 内，此时区间长度为 $0.25>\varepsilon$，

继续下去，$f(x)$ 的零点在 $(1.375,1.437\,5)$ 内，此时区间长度为 $0.062\,5<\varepsilon$，此时零点的近似解可取 1.375 或 1.437 5，显然不等于 1.4，

故求出的零点不为“和谐零点”。

16 令 $f(x)=x^2-5$，

因为 $f(2.2)=-0.16<0$，$f(2.4)=0.76>0$，

所以 $f(2.2)\cdot f(2.4)<0$，说明这个函数在区间 $(2.2,2.4)$ 内有零点 x_0。

取区间 $(2.2,2.4)$ 的中点 $x_1=2.3$，$f(2.3)=0.29>0$，

因为 $f(2.2)\cdot f(2.3)<0$，所以 $x_0\in(2.2,2.3)$。

再取区间 $(2.2,2.3)$ 的中点 $x_2=2.25$，$f(2.25)=0.062\,5>0$，

因为 $f(2.2)\cdot f(2.25)<0$，所以 $x_0\in(2.2,2.25)$。

由于 $|2.25-2.2|=0.05<0.1$，

所以原方程的近似正解可取为 2.25。

解析

1 由二分法的思想可知，零点 x_1,x_2,x_4 左右两侧的函数值符号相反，即存在区间 $[a,b]$，使得 $f(a)\cdot f(b)<0$，故 x_1,x_2,x_4 可以用二分法求解，但 $x_3\in[a,b]$ 时，均有 $f(a)\cdot f(b)\geqslant 0$，故不可以用二分法求该零点。

2 根据二分法定义得①②正确。

3 显然，当精度 ε 越大的时候，零点所在区间的长度就越大，故其精确度就越低，所以 A 不正确，B 正确。

4 对于 C，$f(x)=(x+\sqrt{2})^2\geqslant 0$，不能用二分法求解函数零点。

5 因为 $f(-2)=(-2)^3+5=-3<0$，$f(-1)=(-1)^3+5=4>0$，$f(0)=0^3+5=5>0$，$f(1)=1^3+5=6>0$，$f(2)=2^3+5=13>0$，故由零点存在性定理可得零点所在区间可以确定为 $[-2,-1]$。故选 A。

6 设 $f(x)=\lg x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$，经计算 $f(1)=-\frac{1}{2}<0$，$f(2)=\lg 2-\frac{1}{4}>0$，所以方程 $\lg x-\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ 在 $(1,2)$ 内有解。应用二分法逐步缩小方程实数解所在的区间长度，可知选项 D 符合要求。

7 第二次取区间的中点 $x_1=\frac{-2+4}{2}=1$，故零点所在区间为

$[-2,1]$或$[1,4]$；第三次取中点$x_1=\frac{-2+1}{2}=-0.5$，或$x_2=\frac{1+4}{2}=2.5$。所以零点所在区间为$[-2,-0.5]$或$[-0.5,1]$或$[1,2.5]$或$[2.5,4]$，故选 D。

8 因为$f(0)<0$，$f(0.5)>0$，所以$f(0)\cdot f(0.5)<0$，故$f(x)$的一个零点$x_0\in(0,0.5)$，利用二分法，则第二次应计算$f\left(\frac{0+0.5}{2}\right)=f(0.25)$。

9 开区间$(0,1)$的长度等于1，每经过一次操作，区间长度变为原来的一半，经过n次操作后，区间长度变为$\frac{1}{2^n}$。因为精度为0.01，所以$\frac{1}{2^n}<0.01$，又$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n\geqslant7$，且$n\in\mathbf{N}^*$，故所需二分区间的次数最少为7，选 C。

10 真实零点离近似值x_0最远即靠近a或b，而$b-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$，因此误差最大不超过$\frac{\varepsilon}{2}$。

11 精确度为0.001，即$|a-b|<0.001$，又$b>a$，所以$b-a<0.001$。

12 因为$f(2)\cdot f(4)<0$，所以$x_0\in(2,4)$。

13 显然$(1,4)$的中点为2.5，则$f(a)=f(2.5)=2.5^2-2.5-6=-2.25$。

16 【易错点拨】解本题时，可能对精确度的理解不正确，误认为精确度ε满足的关系式是$|f(a)-f(b)|<\varepsilon$，得到$x_0\in(2.2,2.25)$，继续下去：

取区间$(2.2,2.25)$的中点$x_2=2.225$，

因为$f(2.225)\approx-0.0494<0$，所以$x_0\in(2.225,2.25)$，同理可得$x_0\in(2.225,2.2375)$。

又$f(2.2375)\approx0.0064>0$，

且$|0.0064-(-0.0494)|=0.0558<0.1$，

所以原方程的近似正解可取为2.225。

【误区警示】利用二分法求方程近似解时，要随时检验区间$[a,b]$的长度与精确度ε的关系，一旦有$|a-b|<\varepsilon$，应立即停止计算，该区间中的任一值都是方程的近似解。

课时3 函数与方程的综合问题

➡ 正文P89

答案

1 C　2 D　4 C　4 C　5 A　6 C

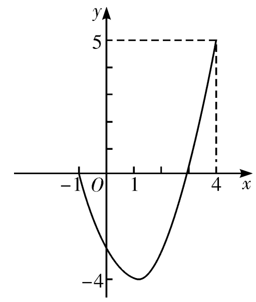
7 B　8 A　9 A

10 $-\frac{3}{2}<m\leqslant-\frac{4}{3}$　11 2或-1　12 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

13 1.5，1.75，1.875，1.8125　14 3　0

15 (1)$f(x)=(x-1)^2-4$，$x\in[-1,4]$，其图像如图所示，其值域为$[-4,5]$。

(2)因为函数$g(x)=f(x)+m$在$[-1,4]$上有两个零点，所以方程$f(x)=-m$在$x\in[-1,4]$上有两个相异的实数根，即函数$y=f(x)$与$y=-m$的图像有两个交点。由(1)所作图像可知，$-4<-m\leqslant0$，所以$0\leqslant m<4$。所以当$0\leqslant m<4$时，函数$y=f(x)$与$y=-m$的图像有两个交点，故当$0\leqslant m<4$时，函数$g(x)=f(x)+m$在$[-1,4]$上有两个零点。



第15题图

16 因为$f(1)=1-1-1=-1<0$，

$f(1.5)=3.375-1.5-1=0.875>0$，

所以函数$f(x)$在区间$[1,1.5]$内存在零点，取区间$(1,1.5)$作为计算的初始区间，用二分法逐次计算，列表如下：

区间	区间中点	中点函数值（或近似值）
(1,1.5)	1.25	−0.297
(1.25,1.5)	1.375	0.225
(1.25,1.375)	1.3125	−0.052
(1.3125,1.375)	1.34375	0.083

因为$|1.375-1.3125|=0.0625<0.1$，

所以函数$f(x)$的零点落在区间$(1.3125,1.375)$内，故函数$f(x)$零点的近似值可取为1.3125。

17 因为$f(1)>0$，所以$3a+2b+c>0$，

即$3(a+b+c)-b-2c>0$。

因为$a+b+c=0$，所以$a=-b-c$，$-b-2c>0$，

则$-b-c>c$，即$a>c$。

因为$f(0)>0$，所以$c>0$，则$a>0$。

取区间$[0,1]$的中点$\frac{1}{2}$，

则$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a+b+c=\frac{3}{4}a+(-a)=-\frac{1}{4}a<0$。

因为$f(0)>0$，$f(1)>0$，

所以函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$\left(\frac{1}{2},1\right)$上各有一个零点。

又$f(x)$为一元二次函数，最多有两个零点，从而$f(x)=0$在$[0,1]$内有两个实根。

18 (1)由题可得方程$x^2-2ax+4=0$的两根均大于1，结合二次函数的单调性与零点存在性定理，得$\begin{cases}\Delta=(-2a)^2-16\geqslant0,\\ f(1)=5-2a>0,\\ a>1。\end{cases}$解得$2\leqslant a<\frac{5}{2}$。

(2)由题可得方程 $x^2-2ax+4=0$ 的一个根大于1,一个根小于1,结合二次函数的单调性与零点存在性定理,得 $f(1)=5-2a<0$,解得 $a>\frac{5}{2}$。

(3)由题可得方程 $x^2-2ax+4=0$ 的一个根在(0,1)内,另一个根在(6,8)内,结合二次函数的单调性与零点存在性定理,得 $\begin{cases}f(0)=4>0,\\f(1)=5-2a<0,\\f(6)=40-12a<0,\\f(8)=68-16a>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{10}{3}<a<\frac{17}{4}$。

19 令 $|x^2-2x|-a^2-1=0$,所以函数 $f(x)=|x^2-2x|-a^2-1(a\in\mathbf{R}^+)$ 的零点的个数转化为 $|x^2-2x|=a^2+1$ 的根的个数,再转化为函数 $y=|x^2-2x|$ 的图像与直线 $y=a^2+1>0$ 交点的个数,其中函数 $y=|x^2-2x|$ 的增区间为(0,1),$(2,+\infty)$,减区间为$(-\infty,0)$,(1,2),当 $x=1$ 时函数值为1,所以函数 $y=|x^2-2x|$ 的图像与直线 $y=a^2+1>1$ 有两个交点,即方程 $|x^2-2x|=a^2+1(a\in\mathbf{R}^+)$ 的解的个数是2,所以函数 $f(x)=|x^2-2x|-a^2-1(a\in\mathbf{R}^+)$ 的零点的个数是2。

20 (1)当 $a=\frac{2}{3}$ 时,令 $g(x)=|3^x-1|-\frac{2}{3}=0$,得 $3^x=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$,

因为 $x_1<x_2$,所以 $x_1=-1$。

(2)令 $g(x)=|3^x-1|-a=0$,得 $3^x=1\pm a$。

因为 $x_1<x_2$,所以 $x_1=\log_3(1-a)$,$x_2=\log_3(1+a)$。

令 $h(x)=|3^x-1|-\frac{a}{2a+1}=0$,得 $3^x=1\pm\frac{a}{2a+1}$。

因为 $x_3<x_4$,所以 $x_3=\log_3\left(1-\frac{a}{2a+1}\right)$,$x_4=\log_3\left(1+\frac{a}{2a+1}\right)$,

所以 $x_2-x_1+x_4-x_3=\log_3\frac{(1+a)\left(1+\frac{a}{2a+1}\right)}{(1-a)\left(1-\frac{a}{2a+1}\right)}=\log_3\frac{1+3a}{1-a}=\log_3\left(\frac{4}{1-a}-3\right)$。

因为 $y=\log_3\left(\frac{4}{1-a}-3\right)$ 在 $a\in\left[\frac{1}{3},1\right)$ 上单调递增,所以当 $a=\frac{1}{3}$ 时,$x_2-x_1+x_4-x_3$ 取最小值,最小值为1。

解析

1 函数 $f(x)=\frac{2}{x-3}$ 的定义域为$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$,所以函数 $y=f(x)$ 的图像在区间[2,4]上不是一条连续的曲线,故不能用零点存在性定理来判断是否存在零点。故选C。

【易错点拨】在使用函数零点存在性定理时,一定要注意它的使用条件,满足条件时,能够判断函数存在零点,但是不能满足条件时,函数也可能存在零点,这一点一定要注意,另外还需注意函数的定义域以及所给的区间。

2 由于奇函数图像关于原点对称且它在$(0,+\infty)$内的零点有1 009个,所以它在$(-\infty,0)$内的零点也有1 009个,又 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f(0)=0$。即0也是它的零点,故 $f(x)$ 的零点共有2 019个。

3 画图易知 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图像有两个交点。

4 若 $a=0$,则 $f(x)=bx+c$ 是一次函数,由 $f(1)\cdot f(2)<0$ 得零点只有一个;若 $a\neq0$,则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为二次函数,若有两个零点,则必有 $f(1)\cdot f(2)>0$,与已知矛盾。

5 由函数 $f(x)=\log_a x+x-3(a>0$ 且 $a\neq1)$ 有两个零点,可知 $0<a<1$,又 $x_1<x_2$,所以 $0<x_1<1$。因为 $x_2\in(3,4)$,所以 $f(3)\cdot f(4)=(\log_a3+3-3)\cdot(\log_a4+4-3)<0$,即 $a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$。

6 因为 a 满足 $x+\lg x=4$,b 满足 $x+10^x=4$,

所以 a,b 分别为函数 $y=4-x$ 与函数 $y=\lg x$,$y=10^x$ 图像交点的横坐标。

因为 $y=x$ 与 $y=4-x$ 图像交点的横坐标为2,函数 $y=\lg x$,$y=10^x$ 的图像关于 $y=x$ 对称,所以 $a+b=4$。

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2,x\leqslant0,\\2,x>0。\end{cases}$

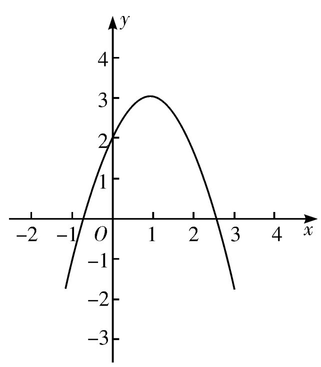
当 $x\leqslant0$ 时,关于 x 的方程 $f(x)=x$,即 $x^2+4x+2=x$,即 $x^2+3x+2=0$,所以 $x=-2$ 或 $x=-1$,满足题意;

当 $x>0$ 时,关于 x 的方程 $f(x)=x$,即 $x=2$,满足题意。

所以关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数是3,故选C。

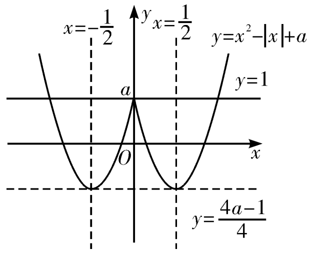
【易错点拨】不能正确求出 $a+b$,后续无法解题,造成失分。$10^x=4-x$,$y^x=4-x$ 的解分别是 $y=10^x$。$y=\lg x$ 与 $y=4-x$ 的交点的横坐标,而 $y=10^x$,$y=\lg x$ 又关于 $y=x$ 对称,所以 $a+b=4$,数形结合求零点。

7 因为 $f(x)=1-(x-a)(x-b)(a<b)$,m,n 为 $y=f(x)$ 的两个零点,所以 $f(a)=f(b)=1$,$f(m)=f(n)=0$,如图所示,根据二次函数的图像与性质,由 $y=1$,$y=0$ 两条直线与抛物线的交点可得到 $a+b=m+n(a<b,m<n)$,所以 $m<a<b<n$。



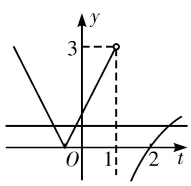
第7题图

8 如图所示,在同一直角坐标系内画出直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$,观察图像可知,若直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点,a 的取值必须满足 $\begin{cases}a>1,\\\frac{4a-1}{4}<1,\end{cases}$ 解得 $1<a<\frac{5}{4}$。



第 8 题图

9 函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|, x<1,\\ \log_2(x-1), x>1。\end{cases}$ 令 $g(x)=t$，$y=f(t)$ 与 $y=m$ 的图像（如图所示）最多有 3 个交点。当有 3 个交点时，$0<m<3$，从左到右交点的横坐标依次是 t_1, t_2, t_3，且 $t_1<t_2<t_3$。由于函数 $y=f(g(x))-m$ 有 6 个零点，$t=x^2-2x+2m-1$，则每一个 t 的值对应 2 个 x 的值，则 t 的值不能取最小值，函数 $t=x^2-2x+2m-1$ 的对称轴为直线 $x=1$，则 t 的最小值为 $1-2+2m-1=2m-2$，由图可知 $2t_1+1=-m$，则 $t_1=\frac{-m-1}{2}$，由于 t_1 是交点横坐标中最小的，满足 $\frac{-m-1}{2}>2m-2$①，又 $0<m<3$②，联立①②得 $0<m<\frac{3}{5}$。



第 9 题图

10 当 $x>0$ 时，$0<\frac{2x}{1+x}<2$，则 $\log_2\frac{2x}{1+x}<1$，即函数 $g(x)=\log_2\frac{2x}{x+1}(x>0)$ 的值域是 $(-\infty,1)$，令 $|g(x)|=t$ 可得 $t^2+mt+2m+3=0$ 在 $(0,1)$ 上只有一个根，在 $[1,+\infty)$ 上有一个根。令 $f(t)=t^2+mt+2m+3$，故 $\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+3>0,\\ 3m+4\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}<m\leqslant -\frac{4}{3}$。

11 由题意知，对于方程 $(a+2)x^2+2ax+1=0$，$\Delta=4a^2-4(a+2)=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$。

12 令 $f(x)=x^3-2x-5$。因为 $f(2)=2^3-4-5=-1<0$，$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-5-5=\frac{45}{8}>0$，$f(3)=3^3-11=16>0$，故下一个有根区间为 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$。

13 第一次用二分法计算得区间 $(1.5,2)$，第二次得区间 $(1.75,2)$，第三次得区间 $(1.75,1.875)$，第四次得区间 $(1.75,1.8125)$。

14 由于 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，所以 $f(0)=0$。因为 -2 是它的一个零点，所以 2 也是它的零点，故共有 3 个零点，它们的和为 0。

第二节　实际问题的函数建模

课时 1　实际问题的函数刻画

➡ 正文P91

答案

1 C	2 C	4 D	4 C	5 D	6 A
7 A	8 B	9 D			

10 $y=a(1+p\%)^x$

11 $y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}x(0\leqslant x\leqslant 30)\\ 2(30<x<40)\\ \frac{1}{10}x-2(40\leqslant x\leqslant 60)\end{cases}$

12 $\left[0,\frac{80}{3}\right]$

13 (1) 当礼品价格为 n 元时，销售量为 $m(1+10\%)^n$ 件，故利润 $y_n=(100-80-n)\cdot m\cdot(1+10\%)^n=(20-n)\cdot m\cdot 1.1^n(0<n<20, n\in\mathbf{N}^*)$。

(2) 令 $y_{n+1}-y_n\geqslant 0$，即 $(19-n)\cdot m\cdot 1.1^{n+1}-(20-n)\cdot m\cdot 1.1^n\geqslant 0$，解得 $n\leqslant 9$。

所以 $y_1<y_2<y_3<\cdots<y_9=y_{10}$。

令 $y_{n+1}-y_{n+2}\geqslant 0$，即 $(19-n)\cdot m\cdot 1.1^{n+1}-(18-n)\cdot m\cdot 1.1^{n+2}\geqslant 0$，解得 $n\geqslant 8$。

所以 $y_9=y_{10}>y_{11}>y_{12}>y_{13}>\cdots>y_{19}$。

所以礼品价格为 9 元或 10 元时，商店获得最大利润。

14 (1) 设两类产品的收益与投资额 x 的函数关系式分别为 $f(x)=k_1x(x\geqslant 0)$，$g(x)=k_2\sqrt{x}(x\geqslant 0)$，

结合已知得 $f(1)=\frac{1}{8}=k_1$，$g(1)=\frac{1}{2}=k_2$，

所以 $f(x)=\frac{1}{8}x(x\geqslant 0)$，$g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}(x\geqslant 0)$。

(2) 设投资稳健型产品 x 万元，则投资风险型产品 $(20-x)$ 万元，依题意得获得收益为 $y=f(x)+g(20-x)=\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{20-x}(0\leqslant x\leqslant 20)$，令 $t=\sqrt{20-x}(0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{5})$，则 $x=20-t^2$，所以 $y=\frac{20-t^2}{8}+\frac{t}{2}=-\frac{1}{8}(t-2)^2+3$，所以当 $t=2$，即 $x=16$ 时，y 取得最大值，$y_{\max}=3$。

故当投资稳健型产品 16 万元，风险型产品 4 万元时，可使投资获得最大收益，最大收益是 3 万元。

15 (1) 由题意，当 $m=9$ 可得 $y=3f(x)=\begin{cases}\frac{30}{4+x}, 0\leqslant x<6,\\ 12-\frac{3x}{2}, 6\leqslant x\leqslant 8,\end{cases}$ 当 $0\leqslant x<6$ 时，$\frac{30}{4+x}\geqslant 2$，解得 $x\leqslant 11$，此时 $0\leqslant x<6$；

当 $6\leqslant x<8$ 时，$12-\frac{3x}{2}\geqslant 2$，解得 $x\leqslant\frac{20}{3}$，此时 $6\leqslant x\leqslant\frac{20}{3}$，

综上可得 $0\leqslant x\leqslant\frac{20}{3}$，

所以病人一次服用 9 g 的药剂，则有效治疗时间可达 $\frac{20}{3}$ h；

(2) 当 $6\leqslant x\leqslant 8$ 时，$y=2\left(4-\frac{x}{2}\right)+m\left[\frac{10}{4+(x-6)}\right]=8-x+\frac{10m}{x-2}$，由 $y=8-x$，$y=\frac{10m}{x-2}(m\geqslant 1)$ 在 $[6,8]$ 均为减

函数，

可得 $y=8-x+\frac{10m}{x-2}$ 在 $[6,8]$ 递减，即有 $y\geqslant 8-8+\frac{10m}{8-2}=\frac{5m}{3}$，

由 $\frac{5m}{3}\geqslant 2$，可得 $m\geqslant\frac{6}{5}$，可得 m 的最小值为 $\frac{6}{5}$。

解析

1 从题中表格可以看出，三个变量 y_1,y_2,y_3 都是越来越大，但是增长速度不同，其中变量 y_2 的增长速度最快，呈指数型函数变化，变量 y_3 的增长速度最慢，呈对数型函数变化。

2 A 中，当 $t=1.99$ 时，$v=\log_2 1.99<1$，当 $t=4$ 时，$v=\log_2 4=2$，显然 A 不满足；B 中，$v=\log_{\frac{1}{2}}t$，当 $t=1.99,3.0,4.0,5.1,6.12$ 时 $v<0$，故 B 不满足；D 显然也不满足。

3 设今年绿地面积为 m，则有 $my=(1+10\%)^x m$，所以 $y=1.1^x$，故选 D。

4 需付车费 $7+4\times1.6+5.2\times2.2+1=25.84\approx 26$。故选 C。

5 由题意得 $10x\geqslant y$，即 $10x\geqslant 5x+4\ 000$，解得 $x\geqslant 800$。所以至少要生产 800 双。故选 D。

6 由题意，$x=2^y$，所以 $y=\log_2 x$。故选 A。

7 因为缴水费 $16m$ 元，所以该职工用水超过了 10 立方米，其中 10 立方米应缴水费 $10m$ 元，另外 $6m$ 元的水费所对应的实际用水为 3 立方米，所以该职工这个月实际用水为 13 立方米。

8 开始一段时间，水槽底部没有水，烧杯满了之后，水槽中水面上升先快后慢，与 B 图像相吻合。

9 由题意可知，$1\ 460=1\ 400+20+40$，1 400 元现金可送 280 元购物券，把 280 元购物券当作现金加上 20 元现金可送 60 元购物券，再把 60 元购物券当作现金加上 40 元现金可获送 20 元购物券，所以最多可获赠购物券 $280+60+20=360$（元）。

10 由题意，每年此种元件的产量是去年的 $(1+p\%)$ 倍，所以 $y=a(1+p\%)^x$。

11 由题图知所求函数是一个分段函数，且各段均是直线，可用待定系数法求得

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}x(0\leqslant x\leqslant 30),\\ 2(30<x<40),\\ \frac{1}{10}x-2(40\leqslant x\leqslant 60)。\end{cases}$$

12 由题意得 $Q=20-\frac{3}{4}t$，因为 $0\leqslant Q\leqslant 20$，

所以 $0\leqslant 20-\frac{3}{4}t\leqslant 20$，解得 $0\leqslant t\leqslant\frac{80}{3}$，

所以函数的定义域为 $\left[0,\frac{80}{3}\right]$。

课时 2　函数建模解决实际问题

➡ 正文P93

答案

1 A　2 A　4 B　4 B　5 D　6 B

7 (1) $y=\begin{cases}10t & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{10}\right),\\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}} & \left(t>\frac{1}{10}\right)\end{cases}$　(2) 0.6

8 3　9 ④

10 (1) 当 $x\geqslant 7$ 时，$f(x+1)-f(x)=\frac{0.4}{(x-3)(x-4)}$，而当 $x\geqslant 7$ 时，函数 $y=(x-3)(x-4)$ 单调递增，且 $(x-3)(x-4)>0$，故 $f(x+1)-f(x)$ 单调递减，

所以当 $x\geqslant 7$ 时，掌握程度的增长量 $f(x+1)-f(x)$ 总是下降。

(2) 由题意可知 $0.1+15\ln\frac{a}{a-6}=0.85$，

整理得 $\frac{a}{a-6}=e^{0.05}$，

解得 $a=\frac{e^{0.05}}{e^{0.05}-1}\times 6\approx 20.5\times 6=123$，

而 $123\in(121,127]$，

由此可知，该学科是乙学科。

11 (1) 由图可得市场售价与上市时间的函数关系式为 $P=f(t)=\begin{cases}300-t,0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-300,200<t\leqslant 300。\end{cases}$

由图可得种植成本与上市时间的函数关系式为 $Q=g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,0\leqslant t\leqslant 300$。

(2) 设从二月一日起的第 t 天的纯收益为 $h(t)$，

则由题意，得 $h(t)=f(t)-g(t)$，

即 $h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2},0\leqslant t\leqslant 200,\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1\ 025}{2},200<t\leqslant 300。\end{cases}$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$，

所以当 $t=50$ 时，$h(t)$ 在区间 $[0,200]$ 上取得最大值 100。

当 $200<t\leqslant 300$ 时，$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$，

所以当 $t=300$ 时，$h(t)$ 在区间 $(200,300]$ 上取得最大值 87.5。

综上可知，当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得最大值，为 100，即从二月一日开始的第 50 天时，上市黄瓜纯收益最大。

解析

1 本题为一次函数模型，注意定义域。

因为 $3\ 000\div 2.5=1\ 200$，所以 $100\leqslant x\leqslant 1\ 200$，故选 A。

2 由表中数据观察可得细菌数 y 与时间 x 的关系式为 $y=300\times 2^x(x\in\mathbf{Z})$。当 $x=-2$ 时，$y=300\times 2^{-2}=75$。故选 A。

3 因为甲第一次卖给乙时获利 10%，所以此时价格为 1 100 元，甲获利 $1\ 100-1\ 000=100$（元）。因为乙返卖给甲时损失 10%，所以此时价格为 $1\ 100\times 0.9=990$（元）。甲再

卖给乙时九折，所以此时价格为 $990\times0.9=891$（元），甲损失 $990-891=99$（元）。所以甲共计获利 $100-99=1$（元）。

4 由题意可知 $50=10+(90-10)e^{-0.25t}$，整理得 $e^{-0.25t}=\frac{1}{2}$，即 $-0.25t=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\approx-0.693$，解得 $t\approx2.77$。

5 由条件可知，$x\geqslant A$ 时所用的时间为常数，所以组装第 4 件产品用时必然满足第一个分段函数，即 $f(4)=\frac{c}{\sqrt{4}}=30\Rightarrow c=60$，$f(A)=\frac{60}{\sqrt{A}}=15$，所以 $A=16$。

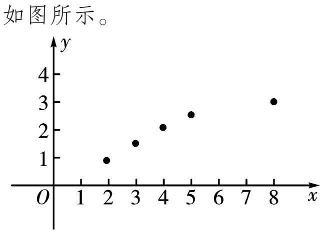
6 将 $x=1,y=100$ 代入 $y=a\log_2(x+1)$，得 $100=a\log_2(1+1)$，解得 $a=100$。所以 $y=100\log_2(x+1)$，所以 2016 年的数量约为 $y=100\log_2(31+1)=100\log_2 32=500$。故选 B。

7 （1）药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量 y(mg) 与时间 t(h) 成正比，则设函数为 $y=kx(k\neq0)$，将点 $(0.1,1)$ 代入可得 $k=10$，则 $y=10t$；将点 $(0.1,1)$ 代入 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$，得 $a=\frac{1}{10}$。则所求解析式为 $y=\begin{cases}10t & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{10}\right),\\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}} & \left(t>\frac{1}{10}\right)。\end{cases}$

（2）令 $\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}<0.25=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$，所以 $t>\frac{6}{10}=0.6$。

8 因为 A、B、C、D 都完成总用时为 9 天，而 D 需要单独工作 4 天，
所以 A、B、C 都完成总用时为 5 天，而 B 用时为 5 天，
所以 A、B 应在 5 天内完成，而 A 完成后 C 才可开工，所以 $x+2\leqslant5$，即 $x\leqslant3$。

9 画出散点图如图所示。



第 9 题图

由图可知上述点大体在函数 $y=\log_2 x$ 上，故选择 $y=\log_2 x$ 可以近似地反映这些数据的规律。

单元综合

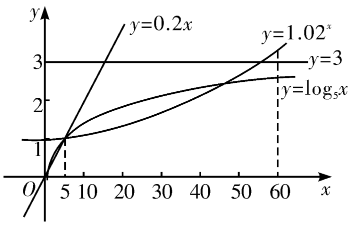
第四章 专题 突破专练

正文 P95

答案

1 D　2 ③④⑤

4 借助工具作出函数 $y=3,y=0.2x,y=\log_5 x,y=1.02^x$ 的图像，如图所示。观察图像可知，在区间 $[5,60]$ 上，$y=0.2x,y=1.02^x$ 的图像都有一部分在直线 $y=3$ 有上方，只有 $y=\log_5 x$ 的图像始终在 $y=3$ 的下方，这说明只有按模型 $y=\log_5 x$ 进行奖励才符合学校的要求。



第 3 题图

4 C　5 A　6 ②③

7 （1）由题意，得 $4=k\{\ln[m+(\sqrt{e}-1)m]-\ln(\sqrt{2}m)\}+4\ln 2$，解得 $k=8$，所以 $y=8[\ln(m+x)-\ln(\sqrt{2}m)]+4\ln 2=8\ln\frac{m+x}{m}$。

（2）由已知，得 $M=m+x=479.8$，则 $m=479.8-x$。

将 $y=8$ 代入（1）中所得式中，得 $8=8\ln\frac{479.8}{479.8-x}$，解得 $x\approx303.3$。

所以应装载大约 303.3 t 燃料，才能使火箭的最大飞行速度达到 8 km/s，顺利地把飞船发送到预定的椭圆轨道。

8 因为火车匀速行驶的总时间为 $(277-13)\div120=\frac{11}{5}$(h)，所以 $0\leqslant t\leqslant\frac{11}{5}$。因为火车匀速行驶 t h 所行驶的路程为 $120t$ km，所以火车行驶的总路程 s 与匀速行驶的时间 t 之间的函数关系式为 $s=13+120t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{11}{5}\right)$。

离开北京 2 h 时火车匀速行驶的时间为 $2-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$(h)，此时火车行驶的路程 $s=13+120\times\frac{11}{6}=233$(km)。

9 （1）由题意，知 $y=(a-x)(1+0.01x)-0.4x=-\frac{1}{100}x^2+\left(\frac{a}{100}-\frac{140}{100}\right)x+a$。

因为 $a-x\geqslant\frac{3}{4}a$，所以 $x\leqslant\frac{1}{4}a$。

故 x 的取值范围是 $\left[0,\frac{a}{4}\right]$ 上的自然数。

（2）因为 $y=-\frac{1}{100}\left[x-\left(\frac{a}{2}-70\right)\right]^2+\frac{1}{100}\left(\frac{a}{2}-70\right)^2+a$，且 $140<a\leqslant280$，

所以当 a 为偶数时，$x=\frac{a}{2}-70$，y 取最大值；

当 a 为奇数时，$x=\frac{a-1}{2}-70$ （因为尽可能少裁员，所以舍去 $x=\frac{a+1}{2}-70$），y 取最大值。

所以当员工人数为偶数时，该企业裁员 $\left(\frac{a}{2}-70\right)$ 人才能获得最大的经济效益；

当员工人数为奇数时，该企业裁员 $\left(\frac{a-1}{2}-70\right)$ 人才能获得最大的经济效益。

10 (1)现有木材蓄积量为 200 万立方米，

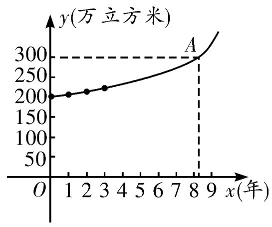
经过 1 年后木材蓄积量为 $200+200\times5\%=200(1+5\%)$ 万立方米；

经过 2 年后木材蓄积量为 $200(1+5\%)+200\cdot(1+5\%)\times5\%=200(1+5\%)^2$ 万立方米；

……

经过 x 年后木材蓄积量为 $200(1+5\%)^x$ 万立方米，所以 $y=f(x)=200(1+5\%)^x(x\in\mathbf{N}^*)$。

(2)作函数 $y=f(x)=200(1+5\%)^x(x\geqslant0)$ 的图像，如图所示。



第 10 题图

x	0	1	2	3	…
y	200	210	220.5	231.5	…

作直线 $y=300$，与函数 $y=200(1+5\%)^x$ 的图像交于 A 点，则 A 点的坐标为 $(x_0,300)$，A 点的横坐标 x_0 的值就是函数值 $y=300$ 时，经过的时间 x(年)的值。

经计算 $8<x_0<9$，则取 $x_0=9$，所以经过 9 年后，林区的木材蓄积量能达到 300 万立方米。

解析

1 由题图可知，投资 3 天以内(含 3 天)，方案一的回报最高，A 正确；

投资 4 天，方案一的回报约为 $40\times4=160$(元)，方案二的回报约为 $10+20+30+40=100$(元)，都高于方案三的回报，B 正确；

投资 6 天，方案一的回报约为 $40\times6=240$(元)，方案二的回报约为 $10+20+30+40+50+60=210$(元)，都高于方案三的回报，C 正确；

投资 12 天，明显方案三的回报最高，所以此时采用方案三，D 错误。

2 路程 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 关于时间 $x(x\geqslant0)$ 的函数关系式分别为 $f_1(x)=2^x-1$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=x$，$f_4(x)=\log_2(x+1)$，它们相应的函数模型分别是指数型函数、二次函数、一次函数和对数型函数。

当 $x=2$ 时，$f_1(2)=3$，$f_2(2)=4$，故①不正确。

当 $x=5$ 时，$f_1(5)=31$，$f_2(5)=25$，故②不正确。

根据四种函数的变化特点，对数型函数的增长速度是先快后慢，当 $x=1$ 时，甲、乙、丙、丁四个物体的路程相等，当 $0<x<1$ 时，丁在最前面，当 $x>1$ 时，丁在最后面，故③正确。指数型函数的增长速度是先慢后快，当运动的时间足够长，最前面的物体一定是按照指数型函数运动的物体，即一定是甲，故⑤正确。结合对数型函数和指数型函数的图像变化情况，可知丙不可能在最前面，也不可能在最后面，故④正确。

【点评】对于函数建模选择的问题，熟悉各种函数模型的增长特点是关键。一次函数模型的增长是匀速的；二次函数模型是对称的，一侧增，一侧减；指数型函数模型适合描述增长速度很快的变化规律；对数型函数模型比较适合描述增长速度平缓的变化规律；幂型函数模型介于指数型函数模型和对数型函数模型之间，适合描述不快不慢的变化规律。

3 【点评】一次函数直线上升，指数函数爆炸增长，都会很快超过 3 万元，只有对数函数增长速度缓慢，满足题意。

4 由题意，知 $\begin{cases}3\,000+20x-0.1x^2\leqslant25x,\\0<x<240,\\x\in\mathbf{N},\end{cases}$

即 $\begin{cases}x^2+50x-30\,000\geqslant0,\\0<x<240,\\x\in\mathbf{N}。\end{cases}$

解得 $150\leqslant x<240$，且 $x\in\mathbf{N}$。

所以生产者不亏本时的最低产量是 150 台。

5 由题意，得 $100=a\log_2(1+1)$，解得 $a=100$，所以 $y=100\log_2(x+1)$。当 $x=7$ 时，$y=100\log_2(7+1)=300$。

6 $t\in[0,3]$ 的图像反映了 C 随时间的变化而逐渐增长但越来越慢。由 $t\in(3,8]$ 的图像，知总产量 C 没有变化，即第 3 年后停产，所以②③正确。

7 有关对数函数的应用题一般都会给出函数解析式，然后根据实际问题求解。具体求解时，先根据实际情况求出函数解析式中的参数或从给出的具体情境中提炼出数据，代入解析式求值，然后根据数值回答其实际意义。

第四章 真题 分类专练

➡ 正文 P97

答案

1 (1)对于模型①，从 2000 年开始算起，2018 年即 $t=19$，

所以 $y=-30.4+13.5\times19=226.1$(亿元)。

对于模型②，从 2010 年算起，2018 年即 $t=9$，

所以 $y=99+17.5\times9=256.5$(亿元)。

(2)对于模型①，当年份为 2016 时，$t=17$，

$y=-30.4+13.5\times17=199.1$(亿元)。

对于模型②，当年份为 2016 时，$t=7$，

$y=99+17.5\times7=221.5$(亿元)。

所以②准确度较高，①误差较大，故选择②较好。

2 D　**4** D　**4** B　**5** B　**6** B

解析

2 对于 A 选项，从图中可以看出当乙车的行驶速度大于 40 km/h 时的燃油效率大于 5 km/L，故乙车消耗 1 L 汽油的行驶路程可大于 5 km，所以 A 错误。对于 B 选项，由图可知甲车消耗汽油最少。对于 C 选项，甲车以 80 km/h 的速度行驶时的燃油效率为10 km/L，故行驶 1 h 的路程为 80 km，消耗 8 L 汽油，所以 C 错误。对于 D 选项，当最高限速为80 km/h 且速度相同时丙车的燃油效率大于乙车的燃油效率，故用丙车比用乙车更省油。所以 D 正确。

3 由已知得，$\lg\dfrac{M}{N}=\lg M-\lg N\approx361\times\lg3-80\times\lg10\approx361\times0.48-80=93.28=\lg10^{93.28}$。故与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是 10^{93}。

4 根据图像，把 (t,p) 的三组数据 $(3,0.7)$，$(4,0.8)$，$(5,0.5)$

分别代入函数关系式，得

$\begin{cases}0.7=9a+3b+c,\\0.8=16a+4b+c,\\0.5=25a+5b+c,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-0.2,\\b=1.5,\\c=-2.0。\end{cases}$

所以 $p=-0.2t^2+1.5t-2.0=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{13}{16}$。

当 $t=\frac{15}{4}=3.75$ 时，p 取得最大值，即最佳加工时间为3.75 min。

【思路点拨】利用待定系数法求出系数的值，转化为二次函数的最值问题。

5 设经过 x 年后该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元，则 $130(1+12\%)^x>200$，即 $1.12^x>\frac{2}{1.3}\Rightarrow x>\frac{\lg\frac{2}{1.3}}{\lg 1.12}=\frac{\lg 2-\lg 1.3}{\lg 1.12}\approx\frac{0.30-0.11}{0.05}=3.8$，因为 x 取整数，所以取 $x=4$，所以该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 2019 年。

6 因为第一次（2015 年 5 月 1 日）把油加满，第二次把油加满加了 48 升，即汽车行驶路程为 35 600 − 35 000 = 600（千米），耗油 48 升，所以每 100 千米的耗油量为 8 升。

第四章 单元测试卷

正文 P98

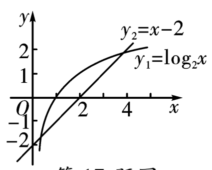
答案

1 B	2 B	4 C	4 B	5 A	6 C
7 B	8 C	9 D	10 A	11 A	12 D

13 ①③④⑤ 　　14 $(1,+\infty)$

15 4 　　16 120　80

17 令 $\log_2x-x+2=0$。即 $\log_2x=x-2$。令 $y_1=\log_2x$，$y_2=x-2$。画出两个函数的大致图像，如图所示。由图可知，两个函数有两个不同的交点。所以函数 $f(x)=\log_2x-x+2$ 有两个零点。



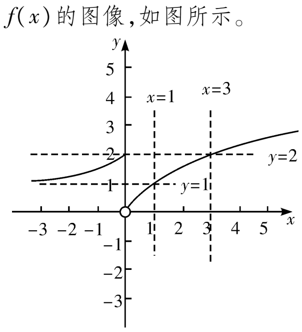
第 17 题图

18 (1) 设 $V=k\cdot\log_3\frac{Q}{100}$，因为当 $Q=900$ 时，$V=1$，所以 $1=k\cdot\log_3\frac{900}{100}$，所以 $k=\frac{1}{2}$，所以 V 关于 Q 的函数解析式为 $V=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$。

(2) 令 $V=1.5$，则 $1.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$，所以 $Q=2\ 700$，

即一条鲑鱼的游速是 1.5 m/s 时耗氧量为 2 700 个单位。

19 (1) 画出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示。

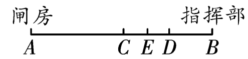


第 19 题图

由图像得：$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$，$(0,+\infty)$ 单调递增；

(2) 若函数 $y=f(x)-m$ 有两个零点，则 $f(x)$ 和 $y=m$ 有 2 个交点，结合图像得：$1<m\leqslant 2$。

20 (1) 如图所示，他首先从中点 C 查，用随身带的话机向两端测试时，假设发现 AC 段正常，断定故障在 BC 段，再到 BC 段中点 D 查，这次若发现 BD 段正常，可见故障在 CD 段，再到 CD 段中点 E 来查。依次类推……



第 20 题图

(2) 每查一次，可以把待查的线路长度缩减一半，因此只要 7 次就够了。

21 (1) 要使函数有意义，则有 $\begin{cases}1-x>0,\\x+3>0,\end{cases}$

解得 $-3<x<1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,1)$。

(2) 函数 $f(x)$ 可化为 $f(x)=\log_a(1-x)(x+3)=\log_a(-x^2-2x+3)$。

由 $f(x)=0$ 得 $-x^2-2x+3=1$，即 $x^2+2x-2=0$。

解得 $x=-1\pm\sqrt{3}$。

因为 $-1\pm\sqrt{3}\in(-3,1)$，所以 $f(x)$ 的零点是 $-1\pm\sqrt{3}$。

(3) 函数 $f(x)$ 可化为 $f(x)=\log_a(1-x)(x+3)=\log_a(-x^2-2x+3)=\log_a[-(x+1)^2+4]$。

因为 $-3<x<1$，所以 $0<-(x+1)^2+4\leqslant 4$，

因为 $0<a<1$，所以 $\log_a[-(x+1)^2+4]\geqslant\log_a4$，

即 $f(x)_{\min}=\log_a4$，所以 $\log_a4=-4$，得 $a^{-4}=4$，

所以 $a=4^{-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

22 (1) 因为 $f(x)=\log_2(4^x+1)+kx(k\in\mathbf{R})$ 是偶函数，所以 $f(-x)=\log_2(4^{-x}+1)-kx=f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立。

即 $\log_2(4^x+1)-2x-kx=\log_2(4^x+1)+kx$ 恒成立，所以 $k=-1$。

(2) 由于 $a>0$，所以 $g(x)=\log_2\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$ 的定义域为 $\left(\log_2\frac{4}{3},+\infty\right)$，也就是满足 $2^x>\frac{4}{3}$。

因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有且只有一个交点，所以方程 $\log_2(4^x+1)-x=\log_2\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$ 在 $\left(\log_2\frac{4}{3},+\infty\right)$ 上只有一解，

即方程 $\frac{4^x+1}{2^x}=a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a$ 在 $\left(\log_2\frac{4}{3},+\infty\right)$ 上只有一解，令 $2^x=t$，则 $t>\frac{4}{3}$，因而等价于关于 t 的方程 $(a-1)\cdot t^2-\frac{4}{3}at-1=0(*)$ 在 $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 上只有一解。

①当 $a=1$ 时，解得 $t=-\frac{3}{4}\notin\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$，不合题意；

②当 $0<a<1$ 时，记 $h(t)=(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1$，其图像的对称轴 $t=\frac{2a}{3(a-1)}<0$，

所以函数 $h(t)=(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减少的，而 $h(0)=-1$，

所以方程 $(*)$ 在 $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 上无解；

③当 $a>1$ 时，记 $h(t)=(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1$，其图像的对称轴 $t=\frac{2a}{3(a-1)}>0$，

所以，只需 $h\left(\frac{4}{3}\right)<0$，即 $\frac{16}{9}(a-1)-\frac{16}{9}a-1<0$，此式恒成立。

所以此时 a 的范围为 $a>1$。

综上所述，所求 a 的取值范围为 $a>1$。

解析

1 $f(x)=3^x-\log_2(-x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$，所以 C，D 不能选；又 $f(-2)\cdot f(-1)<0$，故零点在 $(-2,-1)$ 内。

2 $x^2+3x+5=0$，$\Delta<0$。

3 由题意可知，-1 和 -7 分别是函数 $f(x)=mx^2+8mx+21$ 的两个零点，因此由根与系数的关系有 $\frac{21}{m}=(-1)\times(-7)=7$，解得 $m=3$。

4 设洗 x 次，令 $\left(1-\frac{3}{4}\right)^x\leqslant\frac{1}{100}$，得 $x\geqslant\frac{1}{\lg 2}\approx3.322$，因此至少要洗 4 次。

5 注入溶液量 V 随溶液深度 h 的增加增长越来越快，故选 A。不要理解为 V 与时间的关系。

6 因为 $f(-4)=f(0)$，$f(-2)=-2$，

所以 $\begin{cases}16-4b+c=c,\\4-2b+c=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=4,\\c=2。\end{cases}$ 所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2,x\leqslant0,\\2,x>0。\end{cases}$ 当 $x>0$ 时，方程为 $x=2$，此时方程 $f(x)=x$ 只有 1 个解；

当 $x\leqslant0$ 时，方程为 $x^2+4x+2=x$，解得 $x=-1$ 或 $x=-2$，此时方程 $f(x)=x$ 有 2 个解。所以方程 $f(x)=x$ 共有 3 个解。

7 要使函数在 $(-1,1)$ 上存在一个零点，则有 $f(-1)\cdot f(1)<0$，即 $(a+1)(-5a+1)<0$，解得 $a>\frac{1}{5}$ 或 $a<-1$。

8 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上有唯一实根，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有唯一实根。

9 $Q=30-\frac{3}{4}t$，$0\leqslant Q\leqslant30$，所以 $0\leqslant t\leqslant40$。

10 因为已知 a 是 $f(x)=2^x-\log_{\frac{1}{3}}x$ 的零点，所以 $f(a)=0$。再由函数 $f(x)$ 的解析式可得函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $0<x_0<a$，可得 $f(x_0)<0$，故选 A。

11 $f(x)=4x-1$ 的零点为 $x=\frac{1}{4}$，

$f(x)=(x-1)^2$ 的零点为 $x=1$，

$f(x)=e^x-1$ 的零点为 $x=0$，

$f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的零点为 $x=\frac{3}{2}$。

现在我们来估算 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点，

因为 $g(0)=-1$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$g(0)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)<0$，

所以 $g(x)$ 的零点 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

又 $g\left(\frac{1}{4}\right)\approx-0.086<0$，

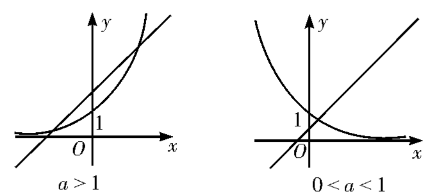
故 $g(x)$ 的零点 $x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$。

又函数 $f(x)$ 的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25，只有 $f(x)=4x-1$ 的零点适合，故选 A。

12 根据题意，$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}$，则 $g(1)=[f(1)]=\left[\frac{e}{1+e}-\frac{1}{2}\right]=0$，$g(-1)=[f(-1)]=\left[\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2}\right]=-1$。则 $g(1)\neq g(-1)$，$g(1)\neq-g(-1)$，所以函数 $g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数，A，B 错误；函数 $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^x}$，又由 $e^x>0$，则 $1+e^x>1$，则有 $-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$，则 $g(x)=[f(x)]=\{-1,0\}$，C 错误，D 正确。故选 D。

13 一次函数在 **R** 上是单调函数，只有一个零点，①正确；二次函数的零点可能有 0 个或 1 个或 2 个，②不正确；指数函数的值域为 $(0,+\infty)$，没有零点，③正确；对数函数是单调函数，且图像过定点 $(1,0)$，故只有一个零点，④正确；幂函数 $y=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内没有零点，⑤正确。

14 分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况，画出函数 $y=a^x$ 与函数 $y=x+a$ 的图像，如图所示。由图知，当 $a>1$ 时，两个函数的图像有两个交点，所以实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$。



第 14 题图

15 将 26 枚金币平均分成两份，分别放在天平两端，则假币一定在质量小的那 13 枚金币里面。从这 13 枚金币中拿出 1 枚，然后将剩下的 12 枚金币平均分成两份，分别放在天平两端，若天平平衡，则假币一定是拿出的那一枚；若不平衡，则假币一定在质量小的那 6 枚金币里面，将这 6 枚金币平均分成两份，分别放在天平两端，则假币一定在质量小的那 3 枚金币里面，从这 3 枚金币中任拿出 2 枚，分别放在天平两端，若天平平衡，则剩下的那一枚是假币，若不平衡，则质量小的那一枚是假币。综上可知，最多称 4 次就可以发现这枚假币。故填 4。

16 因为随着时间的增加，种植成本先减少后增加，而且当 $t=60$ 和 $t=180$ 时种植成本相等，在结合题中给出的四种函数关系可知，种植成本与上市时间的变化关系应该用函数 $Q=at^2+bt+c$ 描述。将表中三组数据 $(60,116)$，$(100,84)$ 和 $(180,116)$ 分别代入，可得

$\begin{cases}60^2a+60b+c=116,\\100^2a+100b+c=84,\\180^2a+180b+c=116,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.01,\\b=-2.4,\\c=224,\end{cases}$

所以 $Q=0.01t^2-2.4t+224=0.01(t-120)^2+80$。

故当上市天数为 120 时的种植成本最低，最低为 80 元/(100 kg)。

模块整合 全书大综合

必修1 常考题型 专练

➡正文 P100

答案

1 B	2 B	4 D	4 D	5 C	6 A
7 C	8 A	9 C	10 D		
11 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$		12 C	13 -2		
14 $(-\infty,8]$		15 $(4,8)$			
16 B		17 D	18 D		

解析

1 因为 $B=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，所以$\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{2}\right\}$，因为 $A=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2}\right\}$。

2 集合 $A=\{y|y=\lg x\}=\mathbf{R}$，$B=\{x|y=\sqrt{x}\}=\{x|x\geqslant0\}$，所以 $A\cap B=[0,+\infty)$。

3 $M\cap N=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=2\\x-y=2\end{cases}\right\}=\{(2,0)\}$。

4 由 $f(x)+g(x)=2e^x$，可得 $f(-x)+g(-x)=2e^{-x}$，由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性，可得 $f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=2e^{-x}$。所以 $f(x)-g(x)-[f(x)+g(x)]=2(e^{-x}-e^x)$，整理得 $-2g(x)=2(e^{-x}-e^x)$，即 $g(x)=e^x-e^{-x}$。

5 由函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称可知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$。又 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，所以$f(2)=f(0+2)=f(-0)=0$，且 $f(x+4)=f(x+2+2)=-f(x+2)=f(x)$，即函数 $y=f(x)$ 的周期为 4，综上，$f(2\,016)+f(2\,017)+f(2\,018)=f(0)+f(1)+f(2)=0+4+0=4$。

6 函数 $f(x)=(x-a)|x|$ 中，若 $a=0$，则 $f(x)$ 可以为奇函数，其他函数都不可能为奇函数。

7 因为 $\log_2 20\in(4,5)$，所以 $\log_2 20-4\in(0,1)$，
所以 $4-\log_2 20\in(-1,0)$。
又定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)=f(x+4)$，
所以 $f(\log_2 20)=f(\log_2 20-4)=-f(4-\log_2 20)$。
因为 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{5}$，
所以 $f(4-\log_2 20)=2^{4-\log_2 20}+\frac{1}{5}=2^4\div2^{\log_2 20}+\frac{1}{5}=16\div20+\frac{1}{5}=1$，故 $f(\log_2 20)=-1$。

8 由函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\frac{1}{1+x^2}$，得 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数。又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}$，易知 $f(x)$ 是单调递增的，故 $f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)$，所以 $|x|>|2x-1|$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$。

9 由题意得 $\begin{cases}3a-1<0,\\0<a<1,\\(3a-1)+4a\geqslant0,\end{cases}$ 所以 $\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$。

10 方法一：对于选项 A，$\log_a c=\frac{\lg c}{\lg a}$，$\log_b c=\frac{\lg c}{\lg b}$，因为 $c>1$，所以 $\lg c>0$，而 $0<a<b<1$，所以 $\lg a<\lg b<0$，故 $\frac{1}{\lg a}>\frac{1}{\lg b}$，$\frac{\lg c}{\lg a}>\frac{\lg c}{\lg b}$，即 $\lg_a c>\lg_b c$，故选项 A 错误；
对于选项 B，幂函数 $y=x^c$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $0<a<b<1$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 $\left(\frac{1}{a}\right)^c>\left(\frac{1}{b}\right)^c$，故选项 B 错误。
对于选项 C，要比较 ab^c 与 ba^c，只需比较 $\frac{a}{b}$ 与 $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ 的大小关系，又 $0<\frac{a}{b}<1$，所以指数函数 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 是减函数，故 $\left(\frac{a}{b}\right)^c<\frac{a}{b}$，即 $ab^c>ba^c$，故选项 C 错误；故选 D。
方法二：取 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=2$，经验证易知只有 D 正确。
【方法点拨】本题基于幂函数、指数函数、对数函数的单调性展开，解题的关键是熟悉常见函数的单调性。

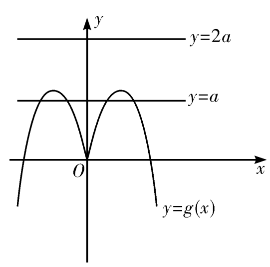
11 令 $t=x^2-ax-a$，则 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$，y 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的函数。由复合函数单调性有关知识可知，$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 是 $t=x^2-ax-a$ 的一个单调递减区间，且在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上 $t>0$，从而有 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant-\frac{1}{2},\\\left(-\frac{1}{2}\right)^2-a\left(-\frac{1}{2}\right)-a\geqslant0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant-1,\\a\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 即实数 a 的取值范围为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$。

12 $f(f(2))=f(\log_3 3)=f(1)=2\times e^0=2$。

13 由 $f(a)=\ln(\sqrt{1+a^2}-a)+1=4$，
得 $\ln(\sqrt{1+a^2}-a)=3$，
所以 $f(-a)=\ln(\sqrt{1+a^2}+a)+1=-\ln\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}+1=-\ln(\sqrt{1+a^2}-a)+1=-3+1=-2$。

14 当 $x<1$ 时，由 $e^{x-1}\leqslant2$ 得 $x\leqslant1+\ln2$，所以 $x<1$；当$x\geqslant1$ 时，由 $x^{\frac{1}{3}}\leqslant2$ 得 $x\leqslant8$，所以 $1\leqslant x\leqslant8$。综上，符合题意的 x 的取值范围是 $(-\infty,8]$。
【方法点拨】本题着眼于指数、对数的简单运算，以及指数、对数方程(不等式)的探讨，熟练掌握运算性质是解决此类问题的关键。

15 当 $x\leqslant0$ 时，由 $x^2+2ax+a=ax$，得 $a=-x^2-ax$；当 $x>0$ 时，由 $-x^2+2ax-2a=ax$，得 $2a=-x^2+ax$。令 $g(x)=\begin{cases}-x^2-ax,x\leqslant0,\\-x^2+ax,x>0。\end{cases}$ 作出直线 $y=a$，$y=2a$，函数 $g(x)$ 的图像如图所示，$g(x)$ 的最大值为 $-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$，由图像可知，若 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 $a<\frac{a^2}{4}<2a$，得 $4<a<8$。

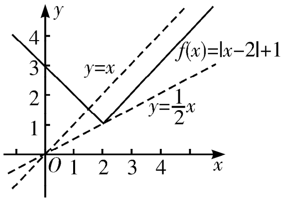


第 15 题图

【方法点拨】研究方程根的情况，可以通过研究函数的单调性、最值、图像的变化趋势等求解，根据题目要求，画出函数图像的走势，通过数形结合思想去分析问题，可以使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现。

16 画出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示。若方程 $f(x)=g(x)$ 有两

个不相等的实数根，则函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图像有两个不同的交点，此时，直线 $g(x)=kx$ 只有夹在直线 $y=x$ 和直线 $y=\frac{1}{2}x$ 两条虚线之间才有两交点，故 $k>\frac{1}{2}$，且 $k<1$。



第 16 题图

【归纳总结】本题若用代数方法来处理，既要对函数 $f(x)$ 中自变量 x 进行分类讨论，又要对函数 $g(x)$ 中 k 的正负进行讨论，这就相当繁琐，也极易出错，把它们转换成两个函数，并在同一坐标系中作出图像，问题便一目了然，一般来说，讨论方程实数根的个数时，常用函数图像的交点来处理。

17 当 $x\leqslant 1$ 时，由 $f(x)=2^x-1=0$，解得 $x=0$；当 $x>1$ 时，由 $f(x)=1+\log_2 x=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，又 $x>1$，所以此时方程无解，综上，函数 $f(x)$ 的零点为 0。

18 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

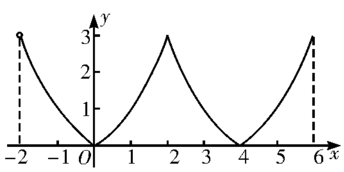
所以 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称。

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x-2)=f(x+2)$，

所以 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 4。

因为当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-2,6]$ 内的图像如图所示，在区间 $(-2,6]$ 内关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a>1)$ 恰有 3 个不同的实数根等价于函数 $f(x)$ 的图像与 $y=\log_a(x+2)$ 的图像在区间 $(-2,6]$ 内有且只有三个不同的交点，则 $\begin{cases}\log_a(2+2)<3,\\ \log_a(6+2)>3,\end{cases}$ 解得 $\sqrt[3]{4}<a<2$。



第 18 题图

必修1 学科素养 专练

➡正文 P102

答案

1 B　2 D　4 D　4 B　5 A　6 C

7 (1) $h(x)-8g(x)-h(1)=0$，即 $9^x-8\cdot 3^x-9=0$，解得 $3^x=9$，故 $x=2$。

(2) 由题得 $p(x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}$，$p\left(\frac{1\,009}{2\,018}\right)=p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$。

因为 $p(x)+p(1-x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{3^{1-x}}{3^{1-x}+\sqrt{3}}$

$=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3^x+\sqrt{3}}=1$，

所以 $p\left(\frac{1}{2\,018}\right)+p\left(\frac{2}{2\,018}\right)+\cdots+p\left(\frac{2\,017}{2\,018}\right)=1\,008+\frac{1}{2}=\frac{2\,017}{2}$。

(3) 因为 $f(x)=\frac{g(x+1)+a}{g(x)+b}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f(-1)=-f(1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3+a}{1+b}=0,\\ \frac{1+a}{3^{-1}+b}=-\frac{3^2+a}{3+b},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=3\left(1-\frac{2}{3^x+1}\right)$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。由 $f(h(x)-1)+f(2-kg(x))>0$，得 $f(h(x)-1)>-f(2-kg(x))$，因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(h(x)-1)>f(kg(x)-2)$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $h(x)-1>kg(x)-2$，即 $3^{2x}-1>k\cdot 3^x-2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，即 $k<3^x+\frac{1}{3^x}$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，由对勾函数的单调性知，$3^x+\frac{1}{3^x}\geqslant 2$，故 $k<2$。

8 $(1,2]$　9 D　10 24

11 设小矩形的长为 x，宽为 y，窗户的面积为 S，则由题图可得 $9x+\pi x+6y=l$，

所以 $6y=l-(9+\pi)\cdot x$，

所以 $S=\frac{\pi}{2}x^2+4xy=\frac{\pi}{2}x^2+\frac{2}{3}x\cdot[l-(9+\pi)\cdot x]=-\frac{36+\pi}{6}x^2+\frac{2}{3}lx=-\frac{36+\pi}{6}\cdot\left(x-\frac{2l}{36+\pi}\right)^2+\frac{2l^2}{3(36+\pi)}$。要使窗户所通过的光线最多，只需窗户的面积 S 最大。

由 $6y>0$，得 $0<x<\frac{l}{9+\pi}$。

因为 $0<\frac{2l}{36+\pi}<\frac{l}{9+\pi}$，

所以当 $x=\frac{2l}{36+\pi}$，$y=\frac{l-(9+\pi)x}{6}=\frac{l(18-\pi)}{6(36+\pi)}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{12}{18-\pi}$ 时，窗户的面积 S 有最大值，且 $S_{\max}=\frac{2l^2}{3(36+\pi)}$。

12 A

解析

1 方法一　由 $f(-x)=2-f(x)$ 可得 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}=1$，则函数 $y=f(x)$ 图像上的点 $A(x,f(x))$ 关于点 $M(0,1)$ 的对称点 $A'(-x,f(-x))$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上。

又由 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 可知，函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 的图像的交点关于点 M 对称。因此，函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 的图像的交点关于点 M 对称。不妨设 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=\frac{x_1+x_m}{2}+\frac{x_2+x_{m-1}}{2}+\cdots+\frac{x_m+x_1}{2}=0$，

$\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=\frac{y_1+y_m}{2}+\frac{y_2+y_{m-1}}{2}+\cdots+\frac{y_m+y_1}{2}=m$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=m$。

方法二　由 $f(-x)=2-f(x)$ 知，$y=f(x)$ 的图像关于点 $M(0,1)$ 对称，所以可令 $y=f(x)=x+1$，

解方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\ y=\frac{x+1}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2,\end{cases}$ 即 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x+1}{x}$ 的图像有两个交点 $(-1,0)$，$(1,2)$，此时 $m=2$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=2=m$。

2 取特殊值进行判断，当 $x=1.1$ 时，$[-x]=-2$，$-[x]=-1$，故 A 错；当 $x=-1.1$ 时，$[x]=-2$，$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[-0.6]=-1$，故 B 错；当 $x=1.9$ 时，$[2x]=3$，$2[x]=2$，故 C 错；由排除法知选 D。

3 对选项 A，取 $f(x)=x-1$，$x\in\mathbf{N}^*$，易知 $f(x)$ 满足条件，所以 $A=\mathbf{N}^*$，$B=\mathbf{N}$ 是“保序同构”，应排除 A；对选项 B，取 $f(x)=\begin{cases}-8,x=-1,\\ x+1,-1<x\leqslant 0,\\ x^2+1,0<x\leqslant 3,\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 满足条件，所以 $A=\{x|-1\leqslant$

$x\leqslant3\}$，$B=\{x\mid x=-8$ 或 $0<x\leqslant10\}$ 是“保序同构”，应排除 B；对选项 C，取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{x-1},\dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ \dfrac{2x-1}{x},0<x<\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 满足条件，所以 $A=\{x\mid0<x<1\}$，$B=\mathbf{R}$ 是“保序同构”，应排除 C，故选 D。

4 设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $f(x)_{\max}=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$。由题意知 $|x_1-x_2|=f(x)_{\max}$，即 $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，$|a|=2\sqrt{-a}$，所以 $a=-4$。

5 如果 T 代表负整数集合，V 代表非负整数集合，那么 $T\cup V=\mathbf{Z}$ 成立，且对任意 $a,b,c\in T$，有 $abc\in T$；对任意 $x,y,z\in V$，有 $xyz\in V$。但是 $ab\notin T$，所以 T 不是乘法封闭的，所以 D 不正确。如果 T 代表奇数集合，V 代表偶数集合，则 $T\cup V=\mathbf{Z}$ 成立，且对任意 $a,b,c\in T$，有 $abc\in T$；对任意 $x,y,z\in V$，有 $xyz\in V$。显然 T,V 都是乘法封闭的，所以 B，C 都不正确。若 T,V 都不满足乘法封闭，则对任意 a,b，存在 $ab\notin T$，假设 $1\in T$，则 $1\cdot a\cdot b\notin T$，矛盾，所以 A 正确。

6 方法一　比较 $-2,\log_2 12$ 与分段函数的分界点 1 的大小，再将 $-2,\log_2 12$ 代入相应的解析式，计算 $f(-2)$，$f(\log_2 12)$ 的值。由 $-2<1$ 知，$f(-2)=1+\log_2[2-(-2)]=1+\log_2 2^2=3$。

因为 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2 12>\log_2 2=1$，

则 $f(\log_2 12)=2^{\log_2 12-1}=12\times\dfrac{1}{2}=6$。

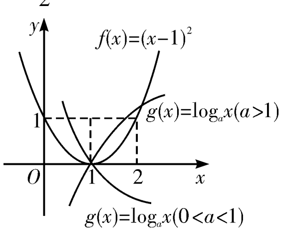
所以 $f(-2)+f(\log_2 12)=3+6=9$。

方法二　先将分段函数中每一段的解析式适当变形或化简，再将 $-2,\log_2 12$ 逐一代入。

$f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x),x<1,\\2^{x-1},x\geqslant1\end{cases}=\begin{cases}\log_2 2(2-x),x<1,\\2^{-1}\times2^x,x\geqslant1\end{cases}=\begin{cases}\log_2(4-2x),x<1,\\\dfrac{2^x}{2},x\geqslant1。\end{cases}$

由 $-2<1$，$\log_2 12>1$ 知，$f(-2)+f(\log_2 12)=\log_2[4-2\times(-2)]+\dfrac{2^{\log_2 12}}{2}=\log_2 8+\dfrac{12}{2}=3+6=9$。

8 设 $f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=\log_a x$，在同一平面直角坐标系中分别作出它们的图像，如图所示。



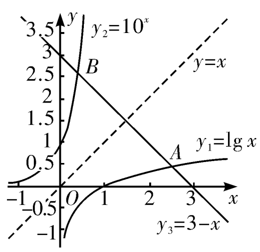
第 8 题图

若 $0<a<1$，则当 $x\in(1,2)$ 时，由图可知 $(x-1)^2<\log_a x$ 是不可能的，

所以实数 a 应满足 $\begin{cases}a>1,\\\log_a 2\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant2$。

故实数 a 的取值范围为 $(1,2]$。

9 将方程变形为 $\lg x=3-x$ 和 $10^x=3-x$。令 $y_1=\lg x$，$y_2=10^x$，$y_3=3-x$，在同一平面直角坐标系中分别作出 $y_1=\lg x$，$y_2=10^x$，$y_3=3-x$ 的图像，如图所示。方程 $\lg x=3-x$ 的根可以看成函数 $y_1=\lg x$ 和 $y_3=3-x$ 的图像的交点 A 的横坐标，方程 $10^x=3-x$ 的根可以看成函数 $y_2=10^x$ 和 $y_3=3-x$ 的图像的交点 B 的横坐标。因为函数 $y_1=\lg x$ 和 $y_2=10^x$ 互为反函数，所以 $y_1=\lg x$ 和 $y_2=10^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，由题意可得，A,B 两点也关于直线 $y=x$ 对称，故 A,B 两点的坐标分别为 $A(\alpha,\beta)$，$B(\beta,\alpha)$。而 A,B 两点都在直线 $y_3=3-x$ 上，所以 $\beta=3-\alpha$，所以 $\alpha+\beta=3$。



第 9 题图

10 由题意可知，$\begin{cases}192=e^b,\\48=e^{22k+b},\end{cases}$ 则 $e^b=192$，$e^{11k}=\dfrac{1}{2}$，于是当 $x=33$ 时，$y=e^{33k+b}=(e^{11k})^3\cdot e^b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot192=24$。

12 由折线图可知，各年的月接待游客量从 8 月份后存在下降趋势。

高考　模拟测试卷

➡正文 P103

答案

1 B	2 D	4 C	4 C	5 D	6 C
7 C	8 C	9 B	10 C	11 C	12 B

13 $(2,3)$　　14 4

15 $(1,+\infty)$　　16 (2)(3)(4)

17 当 $Q=\varnothing$ 时，$2k-1<k+1$，即 $k<2$，满足条件。

当 $Q\neq\varnothing$，即 $k\geqslant2$ 时，要使 $P\cap Q=\varnothing$，则 $k+1>5$ 或 $2k-1<-2$，解得 $k>4$ 或 $k<-\dfrac{1}{2}$。

因为 $k\geqslant2$，所以 $k>4$。

综上可知，$k<2$ 或 $k>4$。

18 (1) 因为 $b=1$，所以 $f(x)=x^2+x-1$，由二次函数图像的性质可知 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递增。

又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$，$f(1)=1$，即 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$。所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上存在唯一零点。

(2) 由题意可知 $x^2+bx-1<1$ 在区间 $[1,2]$ 上有解。

即 $b<\dfrac{2-x^2}{x}=\dfrac{2}{x}-x$ 在区间 $[1,2]$ 上有解。令 $g(x)=\dfrac{2}{x}-x$，

可得 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上递减，

所以 $b<g(x)_{\max}=g(1)=2-1=1$。

所以实数 b 的取值范围为 $b<1$。

19 (1) $p(x)=R(x)-C(x)=-20x^2+2\,500x-4\,000$，$x\in[1,100]$，$x\in\mathbf{N}$，

故 $Mp(x)=p(x+1)-p(x)=[-20(x+1)^2+2\,500(x+1)-4\,000]-(-20x^2+2\,500x-4\,000)=2\,480-40x$，$x\in[1,100]$，$x\in\mathbf{N}$。

(2) $p(x)=-20\left(x-\dfrac{125}{2}\right)^2+74\,125$，$x\in[1,100]$，$x\in\mathbf{N}$，

故当 $x=62$ 或 63 时，$p(x)_{\max}=74\,120$（元）。

因为 $Mp(x)=2\,480-40x$ 为减函数，当 $x=1$ 时有最大值 2 440，故不具有相同的最大值。

(3) 意义在于研究当多生产一台报警系统装置时多获得利润的最大值，以便据此确定生产量，从而获得最大利润。

20 (1) 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $e^{-x}+ae^x=e^x+ae^{-x}$，所以 $(a-1)(e^x-e^{-x})=0$，所以 $a=1$。

(2) $g(x)$ 是偶函数，证明如下：

$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $g(-x)=\ln(e^{-x}+1)+\dfrac{1}{2}x=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)+\dfrac{1}{2}x=\ln(e^x+1)-\dfrac{1}{2}x=g(x)$，所以 $g(x)$ 是偶函数。

21 (1)设 $f(x)=k_1x(k_1\neq0)$,$g(x)=\dfrac{k_2}{x}(k_2\neq0)$。

因为 $f(1)=1$,$g(1)=1$,所以 $k_1=1$,$k_2=1$,

所以 $f(x)=x$,$g(x)=\dfrac{1}{x}$。

(2)由(1)得 $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$,

由函数 $h(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

$h(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-h(x)$,

可知,函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 是奇函数。

(3)证明:由(1)得 $S(x)=x^2+2$。设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $S(x_1)-S(x_2)=(x_1^2+2)-(x_2^2+2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)$。

因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

所以 $x_1-x_2<0$,$x_1+x_2>0$。

所以 $S(x_1)-S(x_2)<0$。所以 $S(x_1)<S(x_2)$。

所以函数 $S(x)=xf(x)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。

22 (1)配方可得 $g(x)=m(x-1)^2+1+n-m$,当 $m>0$ 时,$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数,

由题意可得 $\begin{cases}g(1)=0,\\g(2)=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+n-m=0,\\m+1+n-m=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=0,\end{cases}$

当 $m=0$ 时,$g(x)=1+n$,无最大值和最小值,不合题意;

当 $m<0$ 时,$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数,由题意可得 $\begin{cases}g(1)=1,\\g(2)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}1+n-m=1,\\m+1+n-m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=-1,\end{cases}$ 因为 $n\geqslant0$,故应舍去。

综上可得 m,n 的值分别为 1,0。

(2)由(1)知 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$,

所以 $f(\log_2x)-2k\log_2x\geqslant0$ 在 $x\in[2,4]$ 上有解等价于 $\log_2x+\dfrac{1}{\log_2x}-2\geqslant2k\log_2x$ 在 $x\in[2,4]$ 上有解,即 $2k\leqslant\dfrac{1}{(\log_2x)^2}-\dfrac{2}{\log_2x}+1$ 在 $x\in[2,4]$ 上有解,

令 $t=\dfrac{1}{\log_2x}$,则 $2k\leqslant t^2-2t+1$,

因为 $x\in[2,4]$,所以 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$。记 $\varphi(t)=t^2-2t+1$,

因为 $\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant1$,所以 $\varphi(t)_{\max}=\dfrac{1}{4}$,所以 $k\leqslant\dfrac{1}{8}$。

解析

1 $M=\{-2,-1,0,1\}$,$N=\{-1,0,1,2,3\}$,

所以 $M\cap N=\{-1,0,1\}$。

2 要使函数有意义,自变量 x 的取值须满足 $\begin{cases}x\neq0,\\x+3>0,\end{cases}$ 解得 $x>-3$ 且 $x\neq0$。

3 函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数,而 $-\dfrac{4}{3}<-\dfrac{5}{4}$,所以 $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(-\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,故 A 错;函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,而 $-\dfrac{4}{5}>-\dfrac{5}{6}$,

所以 $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$,故 B 错,同理 D 错。

4 $f(-x)=\dfrac{(1+a^{-x})^2}{a^{-x}}=\dfrac{(a^x+1)^2}{a^x}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数。

5 因为 $f(3)=2^2+3-9=-2<0$,$f(4)=2^3+4-9=3>0$,所以 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(3,4)$。

6 令 $x^3-1=7$,得 $x=2$,所以 $f(7)=3$。

7 因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $b=0$。

因为 $f(x)=\log_a(x^2+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减,

所以 $0<a<1$。所以 $f(b-1)=f(-1)=f(1)<f(a)$。

8 $f(x)=\ln x$,$h(x)=-\ln x$,$h(a)=1$,所以 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

9 设半衰期为 t 年,则 $500(1-10\%)^t=250$,即 $\left(\dfrac{9}{10}\right)^t=\dfrac{1}{2}$,所以 $t\lg\dfrac{9}{10}=\lg\dfrac{1}{2}$,所以 $t(1-2\lg3)=\lg2$,$t=\dfrac{\lg2}{1-2\lg3}\approx6.6$。

10 由题意知,$2a+b=0$,所以 $a=-\dfrac{b}{2}$,所以 $g(x)=bx^2+\dfrac{b}{2}x=b\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{b}{16}$。又知函数 $g(x)$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{1}{4}$,排除 A,B,D,故选 C。

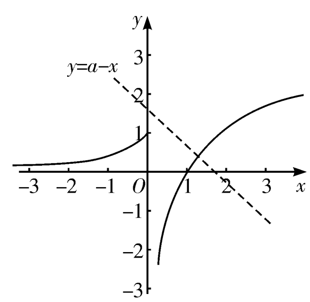
11 因为 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$,$B=\{x|x>1\}$,所以 $A*B=[0,1]\cup(2,+\infty)$,故选 C。

12 令 $t=f(x)$,则 $y=f[f(x)]-1=f(t)-1$,由 $y=f(t)-1=0$,得 $f(t)=1$。若 $t\leqslant0$,由 $f(t)=1$ 得 $2^t=1$,所以 $t=0$,此时 $x=1$。若 $t>0$,由 $f(t)=1$ 得 $\log_2t=1$,所以 $t=2$,此时 $x=4$。所以函数的零点个数为 2 个。

13 设 $f(x)=x^3-2x-5$,则 $f(2)<0$,$f(3)>0$,$f(4)>0$,有 $f(2)\cdot f(3)<0$,则下一个有根区间是 $(2,3)$。

14 分析三个函数的图像,当 $x=4$ 时,有 $\log_2x<x^2=2^x$;当 $x>4$ 时,有 $\log_2x<x^2<2^x$。

15 由题意可画出函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2x,x>0,\\3^x,x\leqslant0\end{cases}$ 的图像,如图所示,函数 $h(x)=f(x)+x-a$ 有且只有一个零点,即 $y=f(x)$ 的图像与 $y=a-x$ 的图像有且只有一个交点,显然当 $a>1$ 时满足条件。



第 15 题图

16 (1)函数的图像过定点 $(1,-1)$,(1)不正确;(2)设 $x>0$,$-x<0$,则 $f(x)=f(-x)=(-x)(-x+1)=x^2-x$,所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x,x\leqslant0,\\x^2-x,x>0,\end{cases}$ 即 $f(x)=x^2-|x|$,(2)正确;(3)由 $\log_a\dfrac{1}{2}>1$,可知,$0<a<1$,又 $1=\log_aa<\log_a\dfrac{1}{2}$,根据单调性可得 $\dfrac{1}{2}<a<1$,(3)正确;(4)原不等式可化为 $2^{-x}-\ln x>2^y-\ln(-y)(x>0,y<0)$,因为函数 $y=2^{-x}-\ln x$ 在定义域内是减函数,所以 $x<-y$,即 $x+y<0$,(4)正确。