

答案与解析

第一章

三角函数

1.1 任意角和弧度制

【题组A 学考通关测试】

正文 P12

- 1 D 【解析】小于 90° 的角包括所有负角,第一象限的角是指终边落在第一象限的角,所以 $A \cap B$ 是指锐角及第一象限的所有负角,故选 D。
- 2 C 【解析】在同一个式子中,角度与弧度必须统一,排除 A, B; D 中的角与所给角的终边不相同,故选 C。
- 3 D 【解析】当 (a, a) 在第一象限时, $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$; 当 (a, a) 在第三象限时, $\alpha = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$. 故选 D。
- 4 D 【解析】因为 $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$, 所以 $5 \text{ rad} \approx 286.5^\circ$, 所以角 α 的终边在第四象限。
- 5 $\frac{3}{2}\pi$ 【解析】因为 $15^\circ = \frac{\pi}{12}$, 所以 $l = \frac{\pi}{12} \times 6 = \frac{\pi}{2} (\text{cm})$. 所以 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 6 = \frac{3\pi}{2} (\text{cm}^2)$.
- 6 $B \not\subseteq A \not\subseteq C$ 【解析】 $A = \{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = 60^\circ + 2n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\beta | \beta = 60^\circ + k \cdot 720^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\beta | \beta = 60^\circ + 4n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{\gamma | \gamma = 60^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$, 所以 $B \not\subseteq A \not\subseteq C$.
- 7 解: (1) 在 0 到 2π 之间, 终边落在 OA 上的角是 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, 故终边落在 OA 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 终边落在 OB 上的角的集合为 $\{\beta | \beta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- (2) 终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha | -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

【题组B 高考通关测试】

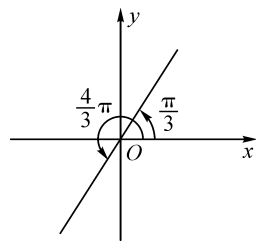
正文 P13

- 1 C 【解析】 $-\frac{3\pi}{4}$ 是第三象限角, 故①错误; 因为 $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{4\pi}{3}$ 是第三象限角, ②正确; $-400^\circ = -360^\circ - 40^\circ$ 是第四象限角, 故③正确; $-315^\circ = -360^\circ + 45^\circ$ 是第一象限角, 故④正确。
- 2 B 【解析】举反例: 第一象限角 370° 不小于第二象限角 100° , 故①错误; 当三角形的内角为 90° 时, 既不是第一象限角, 也不是第二象限角, 故②错误, ③正确。综上可知只有③正确。
- 3 C 【解析】设圆的半径为 r , 则其内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}r$, $\therefore \sqrt{3}r = \alpha \cdot r, \therefore \alpha = \sqrt{3}$.
- 4 C 【解析】 $\because \alpha$ 是第二象限角, $\therefore \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\therefore \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角; 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角。综上, 可知 C 正确。
- 5 B 【解析】设扇形内切圆半径为 r , 则 $r + \frac{r}{\sin \frac{\pi}{6}} = r + 2r = a$. $\therefore a = 3r$. $\therefore S_{\text{内切圆}} = \pi r^2, S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times a^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 9r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. $\therefore S_{\text{内切圆}} : S_{\text{扇形}} = 2 : 3$.

- 6 $2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$ 【解析】设圆的半径为 r , 这段弧所对圆心角的弧度数为 θ , 则圆的外切正三角形的边长为 $2\sqrt{3}r$, $\therefore |\theta| = \frac{2\sqrt{3}r}{r} = 2\sqrt{3}$; 又圆的内接正方形的边长为 $\sqrt{2}r$, $\therefore$ 圆弧长为 $4\sqrt{2}r$, $\therefore |\theta| = \frac{4\sqrt{2}r}{r} = 4\sqrt{2}$.

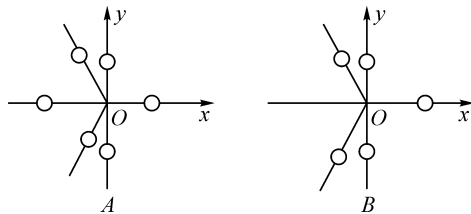
- 7 $900\pi \text{ m}^2$ 【解析】 $\because$ 公路外沿半径 $R_1 = 60 \text{ m}$, 公路内沿半径 $R_2 = 30 \text{ m}$, 圆心角 $\alpha = \frac{40\pi}{60} = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore S_{\text{大扇形}} - S_{\text{小扇形}} = \frac{1}{2} \times 60^2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 30^2 \times \frac{2\pi}{3} = 1200\pi - 300\pi = 900\pi (\text{m}^2)$.

- 8 $\left\{-\frac{5}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi\right\}$ 【解析】如图所示, 在坐标系中画出直线 $y = \sqrt{3}x$, 可以发现它与 x 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 在 $[0, 2\pi)$ 内, 终边在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上的角有两个, 分别是 $\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$; 在 $[-2\pi, 0)$ 内, 终边在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上的角也有两个, 分别是 $-\frac{2}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi$, 故满足条件的角 α 构成的集合为 $\left\{-\frac{5}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi\right\}$.



第8题图

- 9 $B \not\subseteq A$ 【解析】方法一: 集合 A, B 中角的终边如图所示, 所以 $B \not\subseteq A$.



第9题图

- 方法二: $\left\{\alpha \mid \alpha = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\left\{\beta \mid \beta = \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\right\} = \{\beta | \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\beta \mid \beta = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

比较集合 A, B 的元素知, B 中的元素都是 A 中的元素, 但 A 中元素 $\alpha = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 不是 B 中的元素, 所以 $B \not\subseteq A$.

- 10 解: 依题意知圆的半径为 4, 设 P, Q 点第一次相遇时所用的时间是 t s, 则 $\frac{\pi}{3}t + \left| -\frac{\pi}{6} \right| \times t = 2\pi$, 解得 $t = 4$, 即 P, Q 点第一次相遇时所用的时间为 4 s. P 点走过的弧长为 $\frac{4\pi}{3} \times 4 = \frac{16\pi}{3}$, Q 点走过的弧长为 $\frac{2\pi}{3} \times 4 = \frac{8\pi}{3}$.

- 11 解: (1) 因为圆 O 的半径为 10, 弦 AB 的长为 10, 所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 所以 $\alpha = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 所以 $l = |\alpha|r = \frac{10\pi}{3}$,

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{10\pi}{3} \times 10 = \frac{50\pi}{3}.$$

又因为 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

所以 $S = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle AOB} = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3} = 50\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.2 任意角的三角函数

【题组A 学考通关测试】 → 正文 P25

- 1 D 【解析】 $\sin \frac{13}{6}\pi = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 故 A 错误; $\cos \frac{13}{6}\pi = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 B 错误; $\tan \frac{13}{6}\pi = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 错误, D 正确.
- 2 B 【解析】 因为 $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 故选 B.
- 3 B 【解析】 原式 $= 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$, 故选 B.
- 4 B 【解析】 原式 $= \frac{2\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 2} = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 2} = \frac{3}{4}$, 故选 B.
- 5 $-2 < a \leq 3$ 【解析】 由 $\cos \alpha \leq 0$, $\sin \alpha > 0$, 可知 α 为第二象限角或角 α 的终边在 y 轴非负半轴上, 所以 $a + 2 > 0$, $3a - 9 \leq 0$, 所以 $-2 < a \leq 3$.
- 6 $-\frac{23}{16}$ 【解析】 由 $\frac{\sin \alpha - 2\cos \alpha}{3\sin \alpha + 5\cos \alpha} = -5$, 得 $\frac{\tan \alpha - 2}{3\tan \alpha + 5} = -5$, 解得 $\tan \alpha = -\frac{23}{16}$.
- 7 解: 由 $\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1$, 即 $25x^2 = 16$, 即 $x = \frac{4}{5}$ 或 $x = -\frac{4}{5}$. 因为 $x \geq 0$, 所以 $x = \frac{4}{5}$, 从而 $y = -\frac{3}{5}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.
所以角 α 的终边与单位圆的交点坐标为 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.
所以 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$.

【题组B 高考通关测试】 → 正文 P26

- 1 B 【解析】 由三角函数的定义可知, 角 α 的终边与单位圆的交点的横坐标为角 α 的余弦值, 故 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2 C 【解析】 由 θ 是第二象限角可得 $\frac{\theta}{2}$ 为第一或第三象限角, 所以 $\tan \frac{\theta}{2} > 0$, 故选 C.
- 3 C 【解析】 $\sqrt{1 - 2\sin \theta \cos \theta} = \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} = |\cos \theta - \sin \theta|$, 由题意得 $\cos \theta - \sin \theta = |\cos \theta - \sin \theta|$, $\therefore \cos \theta - \sin \theta > 0$, 即 $\cos \theta > \sin \theta$. 又 $\because \cos \theta < 0$, $\therefore \theta$ 是第三象限角. 故选 C.
- 4 D 【解析】 因为 $\frac{7\pi}{8}$ 是第二象限角, 所以 $\sin \frac{7\pi}{8} > 0$, $\cos \frac{7\pi}{8} < 0$, 所以 $MP > 0$, $OM < 0$, 所以 $MP > 0 > OM$.
- 5 B 【解析】 因为 $r = \sqrt{3 + y^2}$, 所以由正弦函数的定义可得 $\frac{y}{\sqrt{3 + y^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$, 解得 $y = \frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}$ (舍去). 所以 $\tan \beta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以 $\frac{2\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta} = \frac{2\tan^2 \beta}{\tan^2 \beta - 1} = \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 1} = -\frac{2}{11}$, 故选 B.
- 6 -8 【解析】 $r = \sqrt{4^2 + y^2}$. 根据任意角的三角函数的定义, 得 $\frac{y}{\sqrt{4^2 + y^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 解得 $y = -8$ 或 $y = 8$ (舍去).
- 7 $-\frac{13}{8}$ 【解析】 由已知得 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, 所以

$$\sin \alpha - 2\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = -\frac{13}{8}.$$

- 8 $\tan \alpha$ 【解析】 原式 $= \frac{1}{\cos^2 \alpha \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} - \sqrt{\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{-\cos \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$.
- 9 $-\frac{3}{4}$ 【解析】 将 $\sin \alpha - 2\cos \alpha = \sqrt{5}$ 两边平方可得 $\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha = 5$, 所以 $4\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0$, 所以 $4\tan^2 \alpha + 4\tan \alpha + 1 = 0$, 所以 $(2\tan \alpha + 1)^2 = 0$, 解得 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 所以 $\tan^2 \alpha - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.
- 10 解: (1) 因为 $\frac{1}{|\sin \alpha|} = -\frac{1}{\sin \alpha}$, 所以 $\sin \alpha < 0$. 由 $\lg(\cos \alpha)$ 有意义, 可知 $\cos \alpha > 0$, 所以角 α 是第四象限角.
(2) 因为 $|OM| = 1$, 所以 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2 = 1$, 得 $m = \pm \frac{4}{5}$.
又因为角 α 是第四象限角, 所以 $m < 0$, 所以 $m = -\frac{4}{5}$.
所以 $\sin \alpha = \frac{m}{|OM|} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}$.
- 11 解: 因为 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 为方程 $4x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 的两个实根, 所以 $\Delta = 16(m^2 - 2m + 1) \geq 0$ 且 $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2m - 1}{4}$.
代入 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$, 解得 $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
又因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 所以 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2m - 1}{4} < 0$,
所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, 易得 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.
又因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 所以 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.
所以 $m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

1.3 三角函数的诱导公式

【题组A 学考通关测试】 → 正文 P34

- 1 D 【解析】 $\cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\right] = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{3}$.
- 2 A 【解析】 由 $\tan(5\pi + \alpha) = m$, 得 $\tan \alpha = m$, 所以原式 $= \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{m + 1}{m - 1}$, 故选 A.
- 3 A 【解析】 $a = \tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \cos \frac{23}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \sin\left(-\frac{33}{4}\pi\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $b > a > c$, 故选 A.
- 4 C 【解析】 $2017^\circ = 360^\circ \times 5 + (180^\circ + 37^\circ)$, 所以 $\sin 2017^\circ = \sin[360^\circ \times 5 + (180^\circ + 37^\circ)] = -\sin 37^\circ < 0$, $\cos 2017^\circ = \cos[360^\circ \times 5 + (180^\circ + 37^\circ)] = -\cos 37^\circ < 0$, 所以点 A 位于第三象限.
- 5 1 【解析】 $f(2\pi - x) = \cos \frac{2\pi - x}{2} = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -\cos \frac{x}{2} = -f(x)$, ① 不成立; $f(2\pi + x) = \cos \frac{2\pi + x}{2} = \cos\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = -\cos \frac{x}{2} = -f(x)$, ② 不成立; $f(-x) = \cos\left(-\frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2} = f(x)$, ③ 不成立; ④ 不成立.

6 45 $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$,
 $\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1, \dots$, 所以原式 $= 44 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 +$
 $1^2 = 45 \frac{1}{2}$.

7 解: 因为 $f\left(-\frac{11}{6}\right) = \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
 $f\left(\frac{11}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) - 1 = f\left(-\frac{1}{6}\right) - 2 = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2 = -\frac{5}{2}$,
 所以 $f\left(-\frac{11}{6}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$.

题组B 高考通关测试

1 B 【解析】 $\cos(450^\circ + \theta) = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta = -\frac{1}{5}$.

2 C 【解析】因为 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta < 0$, 且 $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta > 0$,
 所以 θ 的终边在第三象限, 故选 C.

3 C 【解析】 $\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left[\pi - \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 C 【解析】由已知可得 $-2\tan \alpha + 3\sin \beta + 5 = 0$, $\tan \alpha - 6\sin \beta - 1 = 0$, 所以 $\tan \alpha = 3$. 又因为 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 所以 $9 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$, 所以 $\sin^2 \alpha = \frac{9}{10}$. 因为 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 选 C.

5 C 【解析】 $f(\cos x) = f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x$.

6 0 【解析】 $\frac{\sin(-x)\cos(\pi-x)}{\sin(\pi+x)\cos(2\pi-x)} - \frac{\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(-x)} =$
 $\frac{(-\sin x)(-\cos x)}{(-\sin x)\cos x} - \frac{\sin x(-\cos x)}{\sin x \cos x} = -1 + 1 = 0$.

7 -1 【解析】 $\sin(-840^\circ)\cos 1470^\circ - \cos(-420^\circ)\sin(-930^\circ)$
 $= -\sin 840^\circ \cos 1470^\circ + \cos 420^\circ \sin 930^\circ$
 $= -\sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) \cos(4 \times 360^\circ + 30^\circ) + \cos(360^\circ + 60^\circ) \cdot \sin(2 \times 360^\circ + 210^\circ)$
 $= -\sin 120^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 210^\circ$
 $= -\sin(180^\circ - 60^\circ) \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin(180^\circ + 30^\circ)$
 $= -\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -1$.

8 3 【解析】 $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3} + 1\right) + 1 = f\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = f\left(-\frac{1}{3} + 1\right) + 1 + 1 = f\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = -\cos \frac{2\pi}{3} + 2 = \cos \frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$, 所以 $f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$.

9 $\frac{1}{2}$ 【解析】 $\because f(x+\pi) = f(x) + \sin x$,
 $\therefore f\left(\frac{23\pi}{6}\right) = f\left(\frac{17\pi}{6} + \pi\right) = f\left(\frac{17\pi}{6}\right) + \sin \frac{17\pi}{6}$
 $= f\left(\frac{11\pi}{6} + \pi\right) + \sin \frac{17\pi}{6} = f\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6}$
 $= f\left(\frac{5\pi}{6} + \pi\right) + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6}$
 $= f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6}$
 $\because 0 \leq x < \pi$ 时, $f(x) = 0$,

$$\therefore f\left(\frac{23\pi}{6}\right) = 0 + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6}$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

10 解: $\because \sin(\alpha - 3\pi) = 2\cos(\alpha - 4\pi)$,
 $\therefore -\sin(3\pi - \alpha) = 2\cos(4\pi - \alpha)$,
 $\therefore -\sin(\pi - \alpha) = 2\cos(-\alpha)$,
 $\therefore \sin \alpha = -2\cos \alpha$, 且 $\cos \alpha \neq 0$.
 $\therefore$ 原式 $= \frac{\sin \alpha + 5\cos \alpha}{-2\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{-2\cos \alpha + 5\cos \alpha}{-2\cos \alpha - 2\cos \alpha} = \frac{3\cos \alpha}{-4\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

11 证明: (1) $\sin \frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$;

同理 $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

(2) $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$;

同理 $\cos(A+B) = -\cos C$, $\tan(A+B) = -\tan C$.

【解析】注意到 $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi-C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, $A+B = \pi - C$, 不难得证.

1.4 三角函数的图像与性质

题组A 学考通关测试

1 D 【解析】因为函数 $y = -x\cos x$ 是奇函数, 图像关于原点对称, 所以排除 A, C; 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = -x\cos x < 0$, 排除 B.

2 B 【解析】由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 2$, 可得函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故选 B.

3 B 【解析】令 $\cos x = t$, $t \in [-1, 1]$, 则 $y = 4t^2 + 4t - 2 = (2t + 1)^2 - 3$, $t \in [-1, 1]$, 所以 $y \in [-3, 6]$.

4 C 【解析】 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $y_{\min} = -1$, 故选 C.

5 ± 2 【解析】因为 $y = 3\sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|a|}$, 即 $\frac{2\pi}{|a|} = \pi$, 所以 $|a| = 2$, 所以 $a = \pm 2$.

6 $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由题意可得, 两个函数的图像的一个交点坐标为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

7 解: (1) $\because 1, \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $1 < \frac{\pi}{3}$, 且函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数, $\therefore \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3}$.

(2) $\because \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} \in (0, \pi)$, 且函数 $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上是减函数,

$\therefore \cos \frac{4\pi}{7} > \cos \frac{5\pi}{7}$.

(3) $\because \sin 110^\circ = \sin 70^\circ$, $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$,

且函数 $y = \sin x$ 在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 上是增函数,

$\therefore \sin 70^\circ > \sin 30^\circ$, 即 $\sin 110^\circ > \sin 150^\circ$.

题组B 高考通关测试

1 A 【解析】根据正弦函数图像的对称中心得 $4x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$, 故选 A.

- 2 C 【解析】当 $\varphi = 2\pi$ 时, $f(x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$, 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 不符合;
当 $\varphi = \pi$ 时, $f(x) = \sin(2x + \pi) = -\sin 2x$, 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 不符合;
当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2x$, 由 $2k\pi + \pi \leq 2x \leq 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$, 不符合;
当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, 由 $2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时符合, 故选 C。

- 3 C 【解析】设 $g(x) = \sin x + \cos^2 x - 1 = \sin x + 1 - \sin^2 x - 1 = -\sin^2 x + \sin x$, 且 $g(x) > 0$. $\because 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\therefore 0 < \sin x < 1$. $g(x)$ 可以看作关于 $\sin x$ 的二次函数, 其图像的对称轴方程为 $\sin x = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$, 即当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时, $g(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{4}$, $\therefore 0 < g(x) \leq \frac{1}{4}$, $\therefore \log_{0.5} g(x) \geq \log_{0.5} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$, 即 $f(x)$ 的取值范围是 $[2, +\infty)$. 故选 C。

- 4 B 【解析】函数 $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left[0, \frac{9\pi}{16}\right]$, 故 $t = 4x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 根据题意可设 $y = \sin t + a$ 有三个零点 t_1, t_2, t_3 , 且 $t_1 + 2t_2 + t_3 = 4\pi$, 即 $4x_1 + \frac{\pi}{4} + 2 \times \left(4x_2 + \frac{\pi}{4}\right) + 4x_3 + \frac{\pi}{4} = 4\pi$, 化简得 $x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{3\pi}{4}$. 故选 B。

- 5 A 【解析】函数 $y = 2\cos x (0 < x < \pi)$ 的图像和函数 $y = 3\tan x$ 的图像相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 由 $2\cos x = 3\tan x$, 可得 $2\cos^2 x = 3\sin x$, 即 $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$, 解得 $\sin x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = -2$ (舍去), 结合 $0 < x < \pi$, 得 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{5\pi}{6}$. $\therefore A\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}\right)$. 根据函数图像的对称性可得线段 AB 的中点 C 的坐标为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC}$. $\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OC \cdot |y_A| + \frac{1}{2} OC \cdot |y_B| = \frac{1}{2} OC \cdot |y_A - y_B| = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. 故选 A。

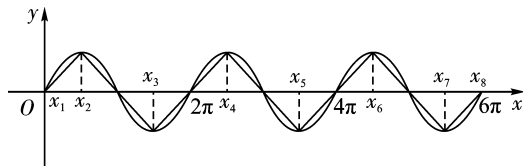
- 6 $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$ 【解析】因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\omega > 0$, 所以 $\omega x \in \left[-\frac{\omega\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{4}\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 所以 $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$ 。

- 7 ①②③ 【解析】 $\because f(-x) = \sin(-\omega x) = -\sin \omega x = -f(x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数. $\because$ 函数 $f(x) = \sin \omega x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上是增函数, $\therefore f(x) = \sin \omega x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 上也是增函数, 故①正确. 由 $\frac{\pi}{6} \omega \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $\omega \leq 3$, $\therefore$ 满足条件的正整数 ω 的最大值为 3, 故②正确. $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上是增函数, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图像的第一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 或在直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 右侧. 又 $\because \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$, $\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq f\left(\frac{\pi}{12}\right)$, 故③正确. 故答案为①②③。

- 8 3 【解析】由题知 $\frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, $\therefore T = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \omega = \frac{\pi}{T} = 2$ 。

又 $\because$ 图像过点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, $\therefore \frac{5\pi}{6} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, $\therefore \varphi = k\pi - \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$. $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$. 又 $\because$ 图像过点 $(0, 1)$, $\therefore A \tan \frac{\pi}{6} = 1$, $\therefore A = \sqrt{3}$, $\therefore f(x) = \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 3$ 。

- 9 8 【解析】 $\because f(x) = \sin x$ 对任意 $x_i, x_j (i, j = 1, 2, 3, \dots, m)$, 都有 $|f(x_i) - f(x_j)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 2$, 要使 m 取得最小值, 必须尽可能多地让 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ 成为最值点, 考虑 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$, $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$, 按如图所示的取值即可满足条件, $\therefore m$ 的最小值为 8。



第9题图

- 10 解: (1) 由题意, 得 $f(x + \theta) = 2\sqrt{3} \sin\left(\omega x + \omega\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

$\because y = f(x + \theta)$ 是最小正周期为 π 的偶函数,

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 即 } \omega = 2, \text{ 且 } 2\theta + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即 } \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}). \text{ 又 } \because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{12}.$$

(2) $\because f(3x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} 3\omega \times 0 + \frac{\pi}{3} \geq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \\ 3\omega \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \begin{cases} k \leq \frac{5}{12}, \\ \omega \leq 2k + \frac{1}{6}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}.$$

$$\because \omega > 0, \therefore 2k + \frac{1}{6} > 0, k \in \mathbf{Z}, \therefore -\frac{1}{12} < k \leq \frac{5}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore k = 0, \therefore 0 < \omega \leq \frac{1}{6}, \text{ 即 } \omega \text{ 的最大值为 } \frac{1}{6}.$$

$$\text{此时, } g(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right). \because 0 \leq x \leq \pi, \therefore \frac{\pi}{3} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}, \therefore \frac{1}{2} \leq \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \text{ 即 } g(x) \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{3}].$$

- 11 解: (1) 由图像可知 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore T = \pi$ 。

$$\text{又 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2.$$

$$\text{又 } \because \text{点 } \left(\frac{\pi}{6}, 1\right) \text{ 在 } f(x) \text{ 的图像上, } \therefore \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1,$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \therefore \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{又 } \because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 最小正周期 } T = \pi.$$

$$(2) \because g(x) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin x, \therefore \text{方程 } a[1 - 2g^2(x)] + 3ag(x) - 2 = 0 \text{ 可化为 } a(1 + 3\sin x - 2\sin^2 x) = 2, \text{ 则 } a \neq 0.$$

$$\because x \in [0, \pi], \therefore \sin x \in [0, 1], \therefore 1 + 3\sin x - 2\sin^2 x > 0, \therefore a > 0.$$

$$\therefore \frac{2}{a} = -2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = \frac{17}{8} - 2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2.$$

令 $t = \sin x$, 则 $t \in [0, 1]$, 作出 $y = \frac{17}{8} - 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2$ 及 $y = \frac{2}{a}$ 的图像(略), 可知当 $1 \leq \frac{2}{a} < 2$ 或 $\frac{2}{a} = \frac{17}{8}$ 时, 两图像在 $[0, 1]$ 内有且仅有一个交点, 即方程 $\frac{2}{a} = \frac{17}{8} - 2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2$ 在 $[0, \pi]$ 内有

且仅有两个解,此时 a 的取值范围为 $\left\{a \mid 1 < a \leq 2 \text{ 或 } a = \frac{16}{17}\right\}$ 。

1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像

题组 A 学考通关测试

正文 P61

1 B 【解析】由函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像可得 $A = 1, \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$, 解得 $\omega = 2$ 。再由“五点法”作图可得 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$, 故把 $g(x) = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $f(x)$ 的图像, 故选 B。

2 B 【解析】 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right]$, $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$, 所以将 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 故选 B。

3 B 【解析】由题中图像可知, $x_0 + \frac{\pi}{4} - x_0 = \frac{T}{2}$, 所以 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\omega = 4$ 。故选 B。

4 B 【解析】周期变为原来的 2 倍, 即横坐标变为原来的 2 倍, 则由平移和伸缩变换规则知, $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像
所有点横坐标变为原来的 2 倍
纵坐标不变
向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
 $\rightarrow f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像。

5 $x = \frac{5}{12}\pi$ (答案不唯一) 【解析】图像平移后对应的函数解析式为 $y = \sqrt{2}\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$, 由 $2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 。当 $k = 0$ 时, $x = \frac{5\pi}{12}$, 答案不唯一。

6 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ [或 $f(x) = \cos 2x$] 【解析】由题中表格给出的信息可知, 函数 $f(x)$ 的周期为 $T = 2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ 。注意到 $\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \varphi\right] = 0$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 。因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以函数的解析式为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ [或 $f(x) = \cos 2x$]。

7 解: (1) 振幅 $A = \frac{3}{2}$, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 初相 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 频率 $f = \frac{1}{4\pi}$ 。

(2) 方法一: 将 $y = \sin x$ 的图像先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把图像上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 最后将图像上各点的纵坐标伸长为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 横坐标不变, 即得函数 $y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像。

方法二: 先将 $y = \sin x$ 的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 最后将图像上各点的纵坐标

伸长为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 横坐标不变, 即得函数 $y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像。

题组 B 高考通关测试

正文 P61

1 B 【解析】因为 $f(x)$ 的图像过点 $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。又因为 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。由题意, 得 $g(x) = \sin\left[2\left(x - \varphi\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - 2\varphi\right)$ 。又 $g(x)$ 的图像过点 $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 经验证可知 B 选项正确。

2 C 【解析】由函数 $f(x)$ 的图像得 $\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$, 即 $T = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3$ 。又 $x = \frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 单调增区间中的一个零点, 所以 $3 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 不妨取 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x) = A\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$, 得 $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(0) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$ 。

3 A 【解析】由图像可知 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, $\therefore T = \pi$, 则 $\omega = 2$ 。又 $\because$ 函数 $f(x)$ 的图像过点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $\therefore 0 = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$, 则 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 。又 $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ 。 $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ 。 $\because g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right]$, $\therefore$ 将 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图像。

4 D 【解析】 $\because P\left(-\frac{\pi}{6}, 2\right)$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + m (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图像的一个对称中心, $\therefore m = 2, \omega \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 。 $\because$ 点 P 到该图像的对称轴的距离的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$, 则 $T = 2\pi$, $\therefore \omega = 1$ 。 $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$ 。 $\therefore f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 。 $\therefore f(x)$ 的最小正周期是 2π , 选项 A 不正确; $f(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 选项 B 不正确; $f(x)$ 的初相 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 选项 C 不正确; 当 $x \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ 时, $x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\right]$, $\therefore f(x)$ 单调递增, 选项 D 正确。

5 A 【解析】将 $f(x)$ 的图像沿 x 轴向右平移 $\frac{1}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left[\omega\left(x - \frac{1}{6}\right) + \varphi\right] = \sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\omega}{6}\right)$ 的图像。 $\because$ 所得图像恰好经过原点, $\therefore \sin\left(\varphi - \frac{\omega}{6}\right) = 0, \therefore \varphi - \frac{\omega}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 。 ①

将 $f(x)$ 的图像上所有的点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标保持不变), 得到函数 $y = \sin(2\omega x + \varphi)$ 的图像。 $\because$ 得到的图像经过点 $\left(\frac{1}{6}, 1\right)$, $\therefore 2\omega \times \frac{1}{6} + \varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ 。 ②

由①②及 $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 得 $\omega = \pi, \varphi = \frac{\pi}{6}$ 满足条件。

6 $2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) (x \in \mathbf{R})$ 【解析】由图像可知 $A = 2, \therefore T = 4 \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) = 2 = \frac{2\pi}{\omega}, \therefore \omega = \pi$ 。由“五点法”可知 $\frac{1}{3} \times \pi + \varphi = \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \therefore$ 函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x) = 2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) (x \in \mathbf{R})$ 。

7 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 【解析】由图像可知 $A = 1, \therefore \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}, \therefore T = \pi, \therefore \omega = 2$ 。由“五点法”可知 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到的图像的解析式为 $g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

8 $\sqrt{2} + 2$ 【解析】由图像可得 $A = 2, T = 8 = \frac{2\pi}{\omega}, \therefore \omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = 0, \therefore f(x) = 2\sin \frac{\pi}{4}x, \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(16) = 0, \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(18) = f(17) + f(18) = f(1) + f(2) = 2\sin \frac{\pi}{4} + 2\sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} + 2$ 。

9 6 【解析】 $\therefore$ 将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图像与原图像重合, $\therefore \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi n}{\omega}, n \in \mathbf{N}^*,$ 解得 $\omega = 6n, n \in \mathbf{N}^*,$ $\therefore \omega$ 的最小值等于 6。

10 解: (1) 由图像知, 函数的最大值为 2, 最小值为 -2, $\therefore A = 2$ 。
又 $\therefore \frac{T}{4} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12}\right), \therefore T = \pi,$ 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2$ 。
 $\therefore$ 函数的解析式为 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ 。
 $\therefore$ 函数的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), \therefore 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2,$
 $\therefore \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1$ 。又 $\therefore 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$ 。
故函数的解析式为 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 其振幅是 2, 初相是 $\frac{\pi}{6}$ 。

(2) $\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12}\right], \therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, 0\right]$ 。

于是, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = 0$, 即 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, 函数取得最大值是 0;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, 函数取得最小值 -2。

11 解: (1) $\therefore$ 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值,

且 $f(x)_{\min} = f(0) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = -\sqrt{3};$

当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 有最大值,

且 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 4\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3}。$

(2) 把 $y = f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到 $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ 的图像, 再把得到的图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $y = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ 的图像, 所以 $g(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ 。由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$ 得 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}。$

所以 $g(x)$ 的单调减区间是 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})。$

1.6 三角函数模型的简单应用

题组 A 学考通关测试

正文 P69

1 B 【解析】由图像知, 振幅为 5 cm。

2 C 【解析】 $f(x) = \begin{cases} -2\cos x, x \geq \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x, x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3 C 【解析】由题意可得 $f = \frac{1}{T} = \frac{160\pi}{2\pi} = 80$, 所以此人每分钟心跳的次数是 80。

4 C

5 3 6 1 【解析】当 $t = 0$ 时, $s = 6\sin \frac{\pi}{6} = 3; s_{\max} = 6; T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1。$

6 (1) 1 cm (2) 1.25 Hz 【解析】由图像可知: 单摆的振幅是 1 cm; 单摆的振动周期是 0.8 s, 所以 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.8} = 1.25$ (Hz)。

7 解: (1) 当 $t = 0$ 时, $E = 110\sqrt{3}$ (伏), 即开始时的电压为 $110\sqrt{3}$ 伏。
(2) 电压的最大值为 $220\sqrt{3}$ 伏。当 $100\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $t = \frac{1}{300}$ (秒) 时第一次达到这个最大值。

题组 B 高考通关测试

正文 P70

1 B 【解析】当 $t = 0$ 时, $\theta = \frac{1}{2}\sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$, 由函数解析式易知单摆周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故单摆频率为 $\frac{1}{\pi}。$

2 A 【解析】在给定的四个选项中, 我们不妨代入 $t = 0$ 及 $t = 3$, 容易看出最能近似表示表中数据间对应关系的函数是选项 A, 故选 A。

3 B 【解析】以风车的中心为坐标原点, 过风车中心水平方向的直线为 x 轴 (向右为 x 轴的正方向), 过风车中心竖直方向的直线为 y 轴 (向上为 y 轴的正方向) 建立平面直角坐标系。由题意得, 地面对应的直线的纵坐标为 -10, 点 P_0 的坐标为 $(0, -8)$, 点 P 转动的速度为 $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ (rad/min)。 $\therefore$ 点 P 从点 P_0 开始按逆时针方向转动, $\therefore$ 点 P 的纵坐标 y 与其转过的角度 $\frac{\pi}{6}t$ 满足余弦关系。设 $y = A\cos \frac{\pi}{6}t$, $\therefore$ 点 $(0, -8)$ 在函数 $y = A\cos \frac{\pi}{6}t$ 的图像上, $\therefore -8 = A\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right)$, 解得 $A = -8, \therefore y = -8\cos \frac{\pi}{6}t$ 。 $\therefore$ 风车上翼片的端点 P 始终在地面上方, $\therefore$ 点 P 离地面的距离 $h = y - (-10) = -8\cos \frac{\pi}{6}t + 10, \therefore$ 点 P 离地面的距离 h (m) 与时间 t (min) 的函数解析式是 $h(t) = -8\cos \frac{\pi}{6}t + 10$ 。故选 B。

4 C 【解析】由题意, 函数的周期为 $T = 60, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{30}$ 。设函数解析式为 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \varphi\right) (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ (秒针是顺时针转动的)。 $\therefore$ 初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \therefore t = 0$ 时, $y = \frac{1}{2}。 \therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}, \varphi$ 可取 $\frac{\pi}{6}。 \therefore$ 函数的解析式为 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}\right)。$ 故选 C。

5 D 【解析】由已知可得该函数的周期 $T = 12, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}。$
又 $\therefore$ 当 $t = 0$ 时, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore y = \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right), t \in [0, 12],$

可得函数的单调递增区间是 $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$ 。

6 $\sin x - \sqrt{3}\cos x + \frac{5\sqrt{3}}{4}$ 【解析】如图,过点

B 作 $BD \perp MN$,垂足为点 D ,

则 $BD = BO \sin(\pi - x)$,即 $BD = \sin x$ 。

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \sin x = \sin x。$$

$$\therefore OD = BO \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\therefore AB^2 = BD^2 + AD^2 = \sin^2 x + (-\cos x + 2)^2 = 5 - 4\cos x。$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AB \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\cos x。$$

$$\therefore S_{\text{四边形OACB}} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle ABC} = \sin x - \sqrt{3}\cos x + \frac{5\sqrt{3}}{4}。$$

7 $y = -4\cos \frac{5\pi}{2}t, t \geq 0$ 【解析】设 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$,则从表中可以

$$\text{得到 } A = 4, T = 0.8, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2}, \therefore y = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{2}t + \varphi\right)。$$

$$\text{又由 } 4 \sin \varphi = -4.0, \text{得 } \sin \varphi = -1, \text{取 } \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{故 } y = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = -4 \cos \frac{5\pi}{2}t, t \geq 0。$$

8 $y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 【解析】由题意可设曲线方程为 $y = 4 \sin(\omega x + \varphi)$

$$(\omega > 0)。因为 \frac{T}{4} = 4, 所以 T = 16, 所以 \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{8}, 所以 y =$$

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \varphi\right)。又曲线经过点 M(2, 4), 所以 \frac{\pi}{8} \times 2 + \varphi = \frac{\pi}{2} +$$

$$2k\pi, k \in \mathbb{Z}, 所以 \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \varphi \text{ 可取 } \frac{\pi}{4}, 所以 y =$$

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)。$$

9 4°C 【解析】因为 $f(t) = 10 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right), t \in [0, 24]$, 所以

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}, \text{当 } \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}, \text{即 } t = 14 \text{ 时, 函数 } f(t) \text{ 取}$$

$$\text{得最大值, 最大值为 } 10 + 2 = 12; \text{当 } \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{即 } t = 2 \text{ 时, 函}$$

$$\text{数 } f(t) \text{ 取得最小值, 最小值为 } 10 - 2 = 8, \text{所以实验室这一天的最大温差为 } 12 - 8 = 4(^\circ\text{C})。$$

10 解:(1)由图像可知 $A = 300$,周期 $T = 2 \times \left(\frac{11}{900} - \frac{1}{180}\right) = \frac{1}{75}$,

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 150\pi。又由 300 \sin\left(150\pi \times \frac{1}{180} + \varphi\right) = 0, \text{得 } 150\pi \times$$

$$\frac{1}{180} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{所以 } \varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{可取 } \varphi = \frac{\pi}{6}。$$

$$\therefore I = 300 \sin\left(150\pi t + \frac{\pi}{6}\right)。$$

$$(2) \text{由题意得 } T \leq \frac{1}{150}, \text{即 } \frac{2\pi}{\omega} \leq \frac{1}{150}。$$

$$\text{又 } \omega > 0, \therefore \omega \geq 300\pi > 942, \therefore \omega \text{ 的最小正整数值是 } 943。$$

11 解:(1)从拟合的曲线可知,函数 $y = A \sin \omega t + B$ 的一个周期为12

$$\text{小时,因此 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}。$$

$$\text{又 } y_{\min} = 7, y_{\max} = 13, \therefore A = \frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min}) = 3, B = \frac{1}{2}(y_{\max} +$$

$$y_{\min}) = 10。 \therefore \text{函数的解析式为 } y = 3 \sin \frac{\pi}{6}t + 10 (0 \leq t \leq 24)。$$

$$(2) \text{由题意,水深 } y \geq 4.5 + 7, \text{即 } y = 3 \sin \frac{\pi}{6}t + 10 \geq 11.5, t \in [0,$$

$$24], \therefore \sin \frac{\pi}{6}t \geq \frac{1}{2}, \therefore \frac{\pi}{6}t \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k = 0, 1,$$

$$\therefore t \in [1, 5] \text{ 或 } t \in [13, 17]。$$

$$\therefore \text{该船在 } 1:00 \text{ 至 } 5:00 \text{ 或 } 13:00 \text{ 至 } 17:00 \text{ 能安全进港。}$$

若欲当天安全离港,则船在港内停留的时间最多不能超过16小时。

第一章 单元复习方案

测评·高考模拟卷

正文 P78

1 D 【解析】 $\because 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$,半径为 $\pi \text{ cm}$, $\therefore$ 此扇形的弧长为 $l =$

$$\frac{2\pi}{3} \times \pi = \frac{2\pi^2}{3} (\text{cm})。故选 D。$$

2 C 【解析】 $\because$ 角 α 的终边经过点 $P(-5, -12)$, $\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$

$$-\cos \alpha = -\frac{-5}{\sqrt{25+144}} = \frac{5}{13}, \text{故选 C。}$$

3 D 【解析】 $\because \sin 10^\circ > 0, -\cos 10^\circ < 0$, $\therefore$ 点 $P(\sin 10^\circ, -\cos 10^\circ)$ 是

$$\text{第四象限的点。 } \because r = |OP| = \sqrt{(\sin 10^\circ)^2 + (-\cos 10^\circ)^2} = 1,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{x}{r} = \sin 10^\circ = \cos 80^\circ = \cos(-80^\circ), \sin \alpha = \frac{y}{r} =$$

$$-\cos 10^\circ = -\sin 80^\circ = \sin(-80^\circ), \text{满足条件的 } \alpha = -80^\circ + k \cdot$$

$$360^\circ (k \in \mathbb{Z}), \text{取 } k = 0, \text{得 } \alpha = -80^\circ。故选 D。$$

4 D 【解析】 $\because P(\sin \alpha, \tan \alpha)$ 在第三象限, $\therefore \sin \alpha < 0, \tan \alpha < 0$,

$$\therefore \cos \alpha > 0, \therefore \alpha \text{ 为第四象限角。故选 D。}$$

5 D 【解析】由正切函数的定义域得 $2x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

$$\text{即 } x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}), \text{故选 D。}$$

6 C 【解析】由题中图像可得函数为偶函数且函数值有正有负,

$$\text{排除 A, D, 再根据 } [0, 2\pi] \text{ 上正弦函数的图像又可排除 B, 故选 C。}$$

7 B 【解析】 $\because \sin \frac{17\pi}{18} = MP > 0, \cos \frac{17\pi}{18} = OM < 0, \therefore OM < 0 <$

$$MP。故选 B。$$

8 B 【解析】将 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ 两边平方得 $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha =$

$$\frac{4}{9}, \therefore \sin \alpha \cos \alpha < 0。又 \because \alpha \text{ 是三角形的一个内角, } \therefore \sin \alpha > 0,$$

$$\cos \alpha < 0, \text{即 } \alpha \text{ 为钝角, } \therefore \text{该三角形是钝角三角形。故选 B。}$$

9 B 【解析】根据曲线 $C_1: y = \sin x, C_2: y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right) =$

$$-\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{4\pi}{3}\right) = \sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{把曲线 } C_1 \text{ 上各点横坐标伸}$$

$$\text{长到原来的 2 倍, 可得 } y = \sin \frac{1}{2}x \text{ 的图像, 再把得到的曲线向右}$$

$$\text{平移 } \frac{2\pi}{3} \text{ 个单位长度, 得到曲线 } C_2: y = \sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{故选 B。}$$

10 A 【解析】对于函数 $y = \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,令 $x = 0$,得 $y =$

$$\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1, \therefore OD = 1, EF = T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \therefore \triangle DEF \text{ 的}$$

$$\text{面积 } S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{4}。故选 A。$$

11 C 【解析】方法一:依次代入选项的值,检验 $f(x+a)$ 的奇偶性;

$$\text{方法二: } f(x+a) = (x+a-6)^2 \cdot \sin[\omega(x+a)], \text{若 } f(x+a) \text{ 为偶}$$

$$\text{函数,则 } a = 6, \text{且 } \sin[\omega(x+6)] \text{ 也为偶函数(偶函数} \times \text{偶函数} =$$

$$\text{偶函数}), \therefore 6\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{当 } k = 1 \text{ 时, } \omega = \frac{\pi}{4}。$$

12 C 【解析】 $\because f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| =$

$$f(x), \therefore f(x) \text{ 为偶函数, 故 } \textcircled{1} \text{ 正确。当 } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ 时, } f(x) =$$

$$2 \sin x, \text{它在区间 } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 单调递减, 故 } \textcircled{2} \text{ 错误。当 } 0 \leq x \leq \pi \text{ 时,}$$

$$f(x) = 2 \sin x, \text{它有两个零点: } 0, \pi; \text{当 } -\pi \leq x < 0 \text{ 时, } f(x) =$$

$$\sin(-x) - \sin x = -2 \sin x, \text{它有一个零点: } -\pi, \text{故 } f(x) \text{ 在 } [-\pi,$$

$\pi]$ 有 3 个零点: $-\pi, 0, \pi$, 故③错误。当 $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $f(x) = 2\sin x$; 当 $x \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi] (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $f(x) = \sin x - \sin x = 0$, 又 $f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x)$ 的最大值为 2, 故④正确。综上所述, ①④正确, 故选 C。

13 【解析】 $\cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \sin 1866^\circ - \sin(-606^\circ)$
 $= \cos 20^\circ + \cos(180^\circ - 20^\circ) + \sin(360^\circ \times 5 + 66^\circ) - \sin[360^\circ \times (-2) + 114^\circ]$
 $= \cos 20^\circ - \cos 20^\circ + \sin 66^\circ - \sin 114^\circ$
 $= \sin 66^\circ - \sin(180^\circ - 66^\circ)$
 $= \sin 66^\circ - \sin 66^\circ = 0$ 。

14 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ 【解析】将函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ 的图像上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则所得图像对应的函数解析式为 $y = \sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。

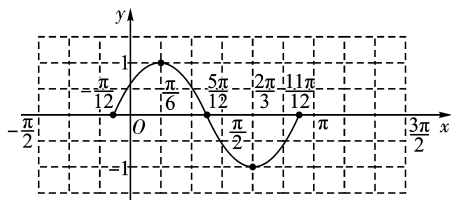
15 ①② 【解析】令 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $y = \tan \frac{x}{2}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, ①正确; $f(-x) = \tan\left(-\frac{x}{2}\right) = -\tan \frac{x}{2} = -f(x)$, 故 $y = \tan \frac{x}{2}$ 为奇函数, ②正确; $T = \frac{\pi}{\omega} = 2\pi$, 所以③不正确; 由 $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得定义域为 $\{x | x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以④不正确。

16 120 【解析】由题意可得, 弧长 $l = 20$ m, 半径 $r = 12$ m, 则扇形田的面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 20 \times 12 = 120(\text{m}^2)$ 。

17 解: (1) 由 $\frac{5\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 1$, 得 $\frac{5\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = 1$,
 即 $5\tan \alpha - 1 = 1 + \tan \alpha$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。
 (2) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$
 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{17}{5}$ 。

18 解: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} + \frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)} =$
 $\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{-\cos \alpha} + \frac{-\sin \alpha \sin \alpha}{-\sin \alpha} = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0$ 。

19 解: (1) 画出函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$ 上的图像如图所示。



第 19 题图

(2) 由 $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 知 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$,

所以当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 取最大值 1, 即 $f(x)$ 的最大值为 2;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 取最小值 $-\frac{1}{2}$, 即 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ 。

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 1, 最小值为 $-\frac{1}{2}$ 。

(3) 因为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 。所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 。

20 解: (1) 细菌存活的时间 y 与日期 x 位置序号之间的函数解析式满足 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + t (A > 0, \omega > 0)$, 由已知表可知函数的最大值为 19.4, 最小值为 5.4, $19.4 - 5.4 = 14$, 故 $A = 7$ 。

又 $19.4 + 5.4 = 24.8$, 故 $t = 12.4$ 。

又因为 $T = 365$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{365}$ 。

当 $x = 172$ 时, $\frac{2\pi}{365} \times 172 + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{323\pi}{730}$,

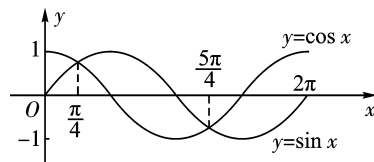
所以 $y = 7\sin\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{323\pi}{730}\right) + 12.4 (1 \leq x \leq 365, x \in \mathbf{N})$ 。

(2) 由 $y > 15.9$ 得 $\sin\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{323\pi}{730}\right) > \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{365}x - \frac{323\pi}{730} < \frac{5\pi}{6}$, 可得 $111.2 \leq x \leq 232.8$ 。

即这种细菌一年中大约有 122 天的存活时间大于 15.9 小时。

21 (1) 解: $\because f(x) = \sin x - \cos x$,
 $\therefore$ 不等式 $f(x) > 0$ 即为 $\sin x - \cos x > 0, \therefore \sin x > \cos x$,
 $\therefore$ 由正弦、余弦函数的图像(如图所示), 可知不等式的解集为 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ 。



第 21 题图

(2) 解: 当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $g(x)_{\min} = 0$;

当 $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $g(x)_{\max} = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 函数 $y = g(x)$ 的值域为 $[0, \sqrt{2}]$ 。

(3) 证明: $\because g(x + \pi) = |\sin(x + \pi) - \cos(x + \pi)| = |-\sin x + \cos x| = |\sin x - \cos x| = g(x), \therefore$ 函数 $y = g(x)$ 的周期为 π 。

22 解: (1) 显然 $A = 2$, 又图像过点 $(0, 1), \therefore f(0) = 1, \therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}$ 。

$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$ 。

由图像结合“五点法”可知, $\left(\frac{11\pi}{12}, 0\right)$ 对应函数 $y = \sin x$ 图像上的点 $(2\pi, 0), \therefore \omega \cdot \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = 2\pi$, 得 $\omega = 2$ 。

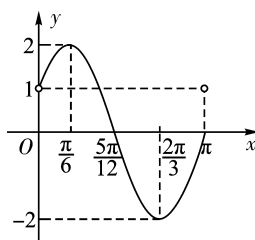
$\therefore$ 所求函数的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(2) 如图所示, 在坐标系中画出 $y =$

$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), 0 < x < \pi$ 的图像。

由图可知, 当 $-2 < m < 1$ 或 $1 < m < 2$ 时, 直线 $y = m$ 与曲线有两个不同的交点, 即原方程有两个不同的实数根。

$\therefore m$ 的取值范围为 $\{m | -2 < m < 1 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$ 。



第 22 题图

当 $-2 < m < 1$ 时, 两个实数根的和为 $\frac{4\pi}{3}$;

当 $1 < m < 2$ 时, 两个实数根的和为 $\frac{\pi}{3}$.

第二章 平面向量

2.1 平面向量的实际背景及基本概念

题组 A 学考通关测试

正文 P86

- C** 【解析】 $|\vec{OB}|, |\vec{OC}|, |\vec{AO}|$ 均等于 $\odot O$ 的半径, 大小相等。
- B** 【解析】题中只指明了 b 的模的大小, 而没有指明 a 的模的大小, 因此①错误; 题中没有说明 a, b 的方向, 故不能判断两向量是否平行, 因此②错误; 向量的模是一个长度, 其值大于或等于 0, 已知 a 为非零向量, 故 $|a| > 0$, ③正确; $|b| = 1$, 故④错误。
- A** 【解析】由向量相等的概念可知①②错误, 由向量共线的概念可知③错误。若两个向量的模不相等, 则这两个向量一定不相等, 故④正确。
- B** 【解析】方向相同或相反的非零向量才是平行向量, 所以 A 不正确; 长度相等且方向相同的向量叫作相等向量, 所以 C 不正确; 共线向量也叫平行向量, 它们不一定在同一条直线上, 也可能在平行直线上, 所以 D 不正确; 单位向量的长度为 1, 所以 B 正确, 故选 B。
- ②④⑤** 【解析】①中, 因为 $a = b$, 所以 a 与 b 方向相同, 且 $|a| = |b|$, 此命题正确。②中, 若 a 或 b 为零向量, 满足 a 与 b 平行, 但 a 与 b 的方向不一定相同或相反, 此命题错误。③中, 由相等向量的定义知, 若两向量为相等向量, 且起点相同, 则其终点也必定相同, 此命题正确。④由共线向量的定义知, 若两个向量仅有相同的终点, 它们不一定共线, 此命题错误。⑤中, 共线向量是方向相同或相反的非零向量, 若 $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 是共线向量, 则 A, B, C, D 四点不一定在一条直线上, 此命题错误。故不正确的命题为②④⑤。
- 以 O 为圆心, 2, 4 分别为半径的两圆夹成的圆环 (包括边界) 【解析】向量可以平移, 由题意, 符合条件的向量的模 $|a| \in [2, 4]$, 故将起点平移到同一点后, 终点所在的区域是一个圆环及其内部。
- 解: (1) 与 $\vec{EF}$ 共线的向量有: $\vec{FE}, \vec{BD}, \vec{DB}, \vec{DC}, \vec{CD}, \vec{BC}, \vec{CB}$ (自身除外)。(2) 与 $\vec{EF}$ 的模相等的向量有: $\vec{FE}, \vec{BD}, \vec{DB}, \vec{DC}, \vec{CD}$ (自身除外)。(3) 与 $\vec{EF}$ 相等的向量有: $\vec{DB}, \vec{CD}$ (自身除外)。

题组 B 高考通关测试

正文 P87

- B** 【解析】身高只有大小, 没有方向, 故不是向量, ①错误; 同理③中温度不是向量, ③错误; 对于②, $\angle AOB$ 的两条边只有方向, 没有大小, 不是向量, ②错误; ④中加速度是向量, ④正确。故选 B。
- B** 【解析】当单位长度取作 2 010 cm 时, 2 010 cm 长的有向线段刚好表示单位向量, 故 A 错误; B 正确; C 中两向量为共线向量; D 中 $\vec{AB}$ 表示这个人从 A 点到 B 点的位移。
- D** 【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\therefore AB = CD, AB \parallel CD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore \vec{DO} = \vec{OB}$ 。
- C** 【解析】因为 a_0, b_0 是单位向量, 所以 $|a_0| = 1, |b_0| = 1$, 所以 $|a_0| + |b_0| = 2$ 。故选 C。
- D** 【解析】向量是既有大小又有方向的量, a 与 $|a|a_0$ 的模相同, 但方向不一定相同, 故①是假命题; 若 a 与 a_0 平行, 则 a 与 a_0 的方向相同或相反, 反向时 $a = -|a|a_0$, 故②③也是假命题。综上所述, 假命题的个数是 3。
- 6** 【解析】设线段 AD 的长度为 3, 则长度为 1 的向量有 $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD}, \vec{BA} = \vec{CB} = \vec{DC}$, 共 2 个互不相等的非零向量; 长度为 2 的向量有 $\vec{AC} = \vec{BD}, \vec{CA} = \vec{DB}$, 共 2 个互不相等的非零向量; 长度为 3 的向量有 $\vec{AD}, \vec{DA}$, 共 2 个互不相等的向量。综上所述, 最多可以

写出 6 个互不相等的非零向量。

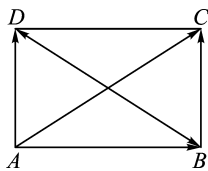
- 3 π** 【解析】这些向量的终点构成的图形是一个圆环, 其面积为 $\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = 3\pi$ 。
- $\vec{FE}, \vec{BC}, \vec{CB}$** 【解析】 $\because E, F$ 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 的中点, $\therefore EF \parallel BC$, $\therefore$ 符合条件的向量为 $\vec{FE}, \vec{BC}, \vec{CB}$ 。
- ①②③** 【解析】正方形的对角线互相平分, 则 $\vec{AO} = \vec{OC}$, ①正确; $\vec{AO}$ 与 $\vec{AC}$ 的方向相同, 所以 $\vec{AO} \parallel \vec{AC}$, ②正确; $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 的方向相反, 所以 $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 共线, ③正确; 尽管 $|\vec{AO}| = |\vec{BO}|$, 然而 $\vec{AO}$ 与 $\vec{BO}$ 的方向不相同, 所以 $\vec{AO} \neq \vec{BO}$, ④不正确。
- 解: (1) 当 $\vec{AB}$ 为零向量时, 点 B 与点 A 重合, 此时 $x = 0, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。(2) 当 $\vec{AB}$ 为单位向量时, $|\vec{AB}| = 1$, 即 A, B 两点间的距离为 1, 所以 $\sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$, 即 $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$, 将 $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入, 得 $2x^2 = 1$, 所以 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0$ 或 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\sqrt{2}$ 。
- 由题可知, 集合 T 中的元素实质上是 S 中任意两点连成的有向线段, 共有 20 个, 即 $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AO}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BO}, \vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CO}, \vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}, \vec{DO}, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ 。由平行四边形的性质可知, 共有 8 对向量相等, 即 $\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AD} = \vec{BC}, \vec{DA} = \vec{CB}, \vec{BA} = \vec{CD}, \vec{AO} = \vec{OC}, \vec{OA} = \vec{CO}, \vec{DO} = \vec{OB}, \vec{OD} = \vec{BO}$ 。又集合元素具有互异性, 故集合 T 中的元素共有 12 个。

2.2 平面向量的线性运算

题组 A 学考通关测试

正文 P97

- C** 【解析】 $(\vec{AB} + \vec{MB}) + (\vec{BO} + \vec{BC}) + \vec{OM} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{BO} + \vec{OM} + \vec{MB}) = \vec{AC} + \vec{0} = \vec{AC}$ 。
- C** 【解析】如图所示, 作平行四边形 $ABCD$, 其中 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \vec{AB} - \vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ 。因为 $|m| = |n|$, 所以 $|\vec{AC}| = |\vec{DB}|$, 所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$ 。



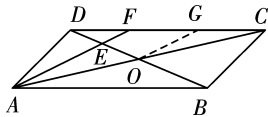
第 2 题图

- A** 【解析】由不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 取等号时的条件可得答案。
- D** 【解析】因为 $c \parallel d$, 所以存在实数 λ , 使 $c = \lambda d$, 即 $ka + b = \lambda(a - b)$, 则 $\begin{cases} k = \lambda, \\ 1 = -\lambda, \end{cases}$ 所以 $k = \lambda = -1$, 即 c 与 d 反向。
- $-\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$ 【解析】由 $\vec{AN} = 3\vec{NC}$ 得 $4\vec{AN} = 3\vec{AC} = 3(a + b)$, 所以 $\vec{AN} = \frac{3}{4}(a + b)$, $\vec{AC} = a + b$, 所以 $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = a + \frac{1}{2}b$, 所以 $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{3}{4}(a + b) - \left(a + \frac{1}{2}b\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$ 。
- [2, 4]** 【解析】由 $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ 知 $|1 - 3| \leq |a - b| \leq 1 + 3$, 解得 $2 \leq |a - b| \leq 4$ 。
- 解: (1) 因为 $a = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}b\right) = -\frac{3}{4}b$, 又因为 $e \neq 0$, 所以 $a \neq 0, b \neq 0$, 所以 a 与 b 共线。(2) 因为 $a = -\frac{1}{3}b$, 又因为 e_1, e_2 为非零且不共线向量, 所以 $a \neq 0, b \neq 0$, 所以 a 与 b 共线。(3) 因为 e_1, e_2 为非零且不共线向量, 所以不存在实数 λ , 使 $a = \lambda b$, 所以 a 与 b 不共线。

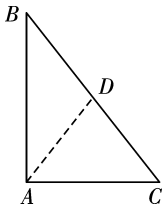
题组B 高考通关测试

正文 P98

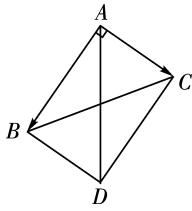
1. **B** 【解析】 $\because a+b=3e_1-e_2, \therefore c=-2(a+b), \therefore a+b$ 与 c 共线。
2. **D** 【解析】对于选项 A, 若 $b=0$, 结论不一定成立, A 错; 对于选项 B, 模相等的向量方向不一定相同或相反, B 错; 对于选项 C, 若非零向量 a 与 b 方向相反, 则 $|a+b| < |a-b|$, C 错; D 正确。故选 D。
3. **B** 【解析】 $\because \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} = \mathbf{0}, \therefore (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OM}) = \mathbf{0}$, 即 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$, $\therefore$ 当 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面上确定的 4 个点时, $\overrightarrow{OM}$ 也是确定的, 即满足条件的点 M 只有 1 个。故选 B。
4. **B** 【解析】由题意得 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 即 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 。又 $\lambda \in (1, 2)$, 所以点 B 在线段 AM 上。故选 B。
5. **D** 【解析】①是假命题, $\because$ 当 $b=0$ 时, $|a| - |b| = |a| + |b|$, $\therefore$ 该命题不成立。②是真命题, $\because (a-b) + (b-a) = \mathbf{0}, \therefore a-b$ 与 $b-a$ 是相反向量。③是真命题, $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}, \therefore$ 该命题成立。④是假命题, $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}, \therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}, \therefore$ 该命题不成立。
6. $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$ 【解析】如图, $\because E$ 是 OD 的中点, $\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}b$ 。又 $\because \triangle ABE \sim \triangle FDE, \therefore \frac{AE}{EF} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{1}, \therefore \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$ 。在 $\triangle AOE$ 中, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b, \therefore \overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$ 。



第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图

7. **1** 【解析】如图, 取边 BC 的中点 D , 连接 AD , 则 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$, 即 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD}$, 因此 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = 1$ 。
8. ①②③④ 【解析】①正确, 如图所示, 以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 为邻边作 $\square ABDC$, 因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $\square ABDC$ 为矩形, 所以 $AD = BC$, 所以 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$; ②正确, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA}|$; ③正确, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}|$; ④正确, 由勾股定理知 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ 。
9. **1** 【解析】若 A, B, C 三点共线, 则 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ 共线, 所以存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则 $a + \lambda_2 b = \lambda(\lambda_1 a + b), (1 - \lambda\lambda_1)a + (\lambda_2 - \lambda)b = \mathbf{0}$ 。因为 a, b 不共线, 所以 $1 = \lambda\lambda_1$, 且 $\lambda_2 = \lambda$, 消去 λ , 得 $\lambda_1\lambda_2 = 1$ 。
10. (1) 证明: 因为 $\overrightarrow{OA} = a + b, \overrightarrow{OB} = a + 2b, \overrightarrow{OC} = a + 3b$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = a + 2b - (a + b) = b$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = a + 3b - (a + b) = 2b$, 所以 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, 即 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线。又因为 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 有公共点 A , 所以 A, B, C 三点共线。
- (2) 解: 因为 a, b 为非零向量且不共线, 所以 $a + kb \neq \mathbf{0}$ 。若 $ka + b$ 与 $a + kb$ 共线, 则必存在唯一实数 λ ,

使 $ka + b = \lambda(a + kb)$, 整理得 $(k - \lambda)a = (\lambda k - 1)b$ 。

因此 $\begin{cases} k - \lambda = 0, \\ \lambda k - 1 = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ \lambda = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = -1, \\ \lambda = -1 \end{cases}$,

即存在实数 $\lambda = 1$, 使 $ka + b$ 与 $a + kb$ 共线, 此时 $k = 1$; 或存在实数 $\lambda = -1$, 使 $ka + b$ 与 $a + kb$ 共线, 此时 $k = -1$, 因此 $k = \pm 1$ 都满足题意。

11. 解: 假设存在点 D , 使得 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}, \text{ 所以存在点 } D, \text{ 使 } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}, \text{ 且}$$

点 D 为靠近点 C 的线段 AC 的三等分点。

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示

题组A 学考通关测试

正文 P111

1. **D** 【解析】由于 $a = (1, 2), b = (2, 3)$, 所以 $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(2, 3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2)$ 。已知 $c = (3, 4)$, 所以 $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$ 故选 D。
2. **B** 【解析】设 $B(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x+1, y+5)$ 。因为 $3a = (6, 9)$, $\overrightarrow{AB} = 3a$, 所以 $\begin{cases} x+1=6, \\ y+5=9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$ 故选 B。
3. **D** 【解析】设 $a = x_1 p + y_1 q$, 故 $x_1 = -2, y_1 = 2$, 所以 $a = -2(1, -1) + 2(2, 1) = (2, 4)$ 。对于同一个向量 $a = (2, 4)$ 而言, 求其在基底 m, n 下的坐标, 只需求 m, n 前面的系数。设 $a = x_2 m + y_2 n = x_2(-1, 1) + y_2(1, 2) = (y_2 - x_2, x_2 + 2y_2) = (2, 4)$, 故 $\begin{cases} y_2 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2y_2 = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2. \end{cases}$ 故选 D。
4. **B** 【解析】因为 $a \parallel b$, 所以 $\frac{1}{-2} = \frac{2}{m}$, 所以 $m = -4$, 所以 $b = (-2, -4)$, 则 $2a = (2, 4), 3b = (-6, -12)$, 所以 $2a + 3b = (-4, -8)$ 。
5. $60^\circ \quad 30^\circ$
6. -1 【解析】 $a + b = (1, m-1)$, 由 $(a+b) \parallel c$, 得 $1 \times 2 - (m-1) \times (-1) = 0$, 所以 $m = -1$ 。
7. 解: (1) $\overrightarrow{AB} = (x, 1), \overrightarrow{CD} = (4, x)$ 。因为 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 共线, 所以 $x^2 - 4 = 0$, 即 $x = \pm 2$ 。所以当 $x = \pm 2$ 时, 向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 共线。
- (2) 当 $x = -2$ 时, $\overrightarrow{BC} = (6, -3), \overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ 。又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B , 所以 A, B, C 三点共线, 从而, 当 $x = -2$ 时, A, B, C, D 四点在同一条直线上。但当 $x = 2$ 时, A, B, C, D 四点不在同一条直线上。

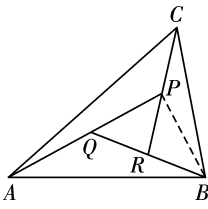
题组B 高考通关测试

正文 P111

1. **D** 【解析】选项 A 中的两个向量为相反向量, 即 $e_1 - e_2 = -(e_2 - e_1)$, 则 $e_1 - e_2, e_2 - e_1$ 为共线向量; 选项 B 中, $2e_1 - e_2 = 2(e_1 - \frac{1}{2}e_2)$, 也为共线向量; 选项 C 中, $6e_1 - 4e_2 = -2(2e_2 - 3e_1)$, 也为共线向量。根据不共线的向量可以作为基底, 知只有选项 D 中的两个向量符合。
2. **C** 【解析】 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = (k, 12) - (4, 5) = (k-4, 7), \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = (k, 12) - (10, k) = (k-10, 12-k)$ 。因为 A, B, C 三点共线, 所以 $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CA}$, 所以 $(k-4)(12-k) - 7(k-10) = 0$, 整理得 $k^2 - 9k - 22 = 0$, 解得 $k = -2$ 或 $k = 11$ 。
3. **A** 【解析】由向量 $a = (2, 3), b = (-1, 2)$, 得 $ma + nb = (2m - n, 3m + 2n), a - 2b = (4, -1)$ 。由 $ma + nb$ 与 $a - 2b$ 共线, 得 $\frac{2m-n}{4} = \frac{3m+2n}{-1}$, 所以 $\frac{m}{n} = -\frac{1}{2}$, 故选 A。

- 4 C 【解析】 $\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \therefore AD = \frac{1}{4}AB$. $\because DE \parallel BC, \therefore AE = \frac{1}{4}AC$. 又 $\because M$ 为 BC 的中点, $\therefore N$ 为 DE 的中点, $\therefore \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}, \therefore x = y = \frac{1}{8}, \therefore x + y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

- 5 C 【解析】如图,连接 BP ,则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{PR}$ ①, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RB}$ ②. ①+②,得 $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{RB}$ ③. 又 $\because \overrightarrow{RB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right)$ ④,将④代入③,得 $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right)$,解得 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{a} + \frac{4}{7}\overrightarrow{b}$. 故选C.



第5题图

- 6 $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 A, B, C 三点共线,所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线,所以存在实数 λ ,使 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$,所以 $(a-1, 1) = \lambda(-b-1, 2)$,所以 $\begin{cases} a-1 = -\lambda b-1, \\ 1 = 2\lambda, \end{cases}$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2}, \therefore a + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$.

- 7 $\frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}$ 【解析】 $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b}$.

- 8 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$ 【解析】设点 P 的坐标为 (x, y) .
①若点 P 在线段 AB 上,则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}, \therefore (x-3, y+4) = \frac{1}{2}(-9-x, 2-y)$. 解得 $x = -1, y = -2, \therefore P(-1, -2)$.
②若点 P 在线段 BA 的延长线上,则 $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}, \therefore (x-3, y+4) = -\frac{1}{4}(-9-x, 2-y)$. 解得 $x = 7, y = -6, \therefore P(7, -6)$.
综上可得,点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

- 9 $(-1, 0)$ 【解析】由点 D 是圆 O 外一点,可设 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BA} (\lambda > 1)$,则 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{BA} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$. 又因为 C, O, D 三点共线,令 $\overrightarrow{OD} = -\mu \overrightarrow{OC} (\mu > 1)$,则 $\overrightarrow{OC} = -\frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{OA} - \frac{1-\lambda}{\mu}\overrightarrow{OB} (\lambda > 1, \mu > 1)$. 又因为 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$,所以 $m = -\frac{\lambda}{\mu}, n = -\frac{1-\lambda}{\mu}$,则 $m+n = -\frac{\lambda}{\mu} - \frac{1-\lambda}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \in (-1, 0)$.

- 10 解:如图所示,以 O 为原点, $\overrightarrow{OA}$ 为 x 轴的正方向建立平面直角坐标系.

由三角函数的定义,得 $B(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ), C(3\cos 240^\circ, 3\sin 240^\circ)$,

即 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

又 $A(2, 0)$,所以 $\overrightarrow{a} = (2, 0), \overrightarrow{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{c} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

设 $\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$,则 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \lambda_1(2, 0) + \lambda_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(2\lambda_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2, \frac{1}{2}\lambda_2\right)$.

所以 $\begin{cases} 2\lambda_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = -\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2}\lambda_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_2 = -3\sqrt{3}, \end{cases}$

所以 $\overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{a} - 3\sqrt{3}\overrightarrow{b}$.

- 11 解:(1)由题意知,点 A 是 BC 的中点,且 $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$,由平行四边形法则,得 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}, \therefore \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{a} - \frac{5}{3}\overrightarrow{b}$.

$$(2) \because \overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = (2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - \lambda\overrightarrow{a} = (2-\lambda)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{a} - \frac{5}{3}\overrightarrow{b}, \therefore \frac{2-\lambda}{2} = \frac{1}{\frac{5}{3}}, \therefore \lambda = \frac{4}{5}.$$

2.4 平面向量的数量积

题组A 学考通关测试

正文 P123

- 1 A 【解析】因为 $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$,所以 $-4-x=0$,得 $x=-4$,故 $\overrightarrow{b}=(-4, -2)$. 故 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -10$,故选A.

- 2 B 【解析】因为 $\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} = (2\lambda + 3, 3), \overrightarrow{m} - \overrightarrow{n} = (-1, -1)$,由 $(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) \perp (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n})$,可得 $(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) \cdot (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}) = (2\lambda + 3, 3) \cdot (-1, -1) = -2\lambda - 6 = 0$,解得 $\lambda = -3$.

- 3 D 【解析】 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ 表示 O 到三角形三个顶点 A, B, C 的距离相等,即 O 是三角形的外心;由 $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ 得 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC})$,表示 N 在 BC 边的中线上,类似地, N 在 AC 边的中线上,所以 N 是三角形的重心;由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ 可得 P 是三角形的垂心.

- 4 A 【解析】因为 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$,所以 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. 因为 $f(x) = (x\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (x\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = x^2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + x \cdot \overrightarrow{b}^2 - x \cdot \overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x(\overrightarrow{b}^2 - \overrightarrow{a}^2) = x(|\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2)$,故选A.

- 5 $3\sqrt{2}$ 【解析】依题意,可知 $|2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = 4|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = 4 - 4|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos 45^\circ + |\overrightarrow{b}|^2 = 4 - 2\sqrt{2}|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b}|^2 = 10$,即 $|\overrightarrow{b}|^2 - 2\sqrt{2}|\overrightarrow{b}| - 6 = 0$,所以 $|\overrightarrow{b}| = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (负值舍去).

- 6 $(-2, 1)$ 【解析】设 $\overrightarrow{q} = (x, y)$,则 $\overrightarrow{p} \oplus \overrightarrow{q} = (x-2y, y+2x) = (-4, -3)$,所以 $\begin{cases} x-2y = -4, \\ y+2x = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{q} = (-2, 1)$.

- 7 解: $\overrightarrow{a} = (3, -4), \overrightarrow{b} = (2, x), \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow 3x = -8$,解得 $x = -\frac{8}{3}$,则 $\overrightarrow{b} = \left(2, -\frac{8}{3}\right)$.

由 $\overrightarrow{c} = (2, y), \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$,得 $3 \times 2 - 4y = 0$,解得 $y = \frac{3}{2}$,

则 $\overrightarrow{c} = \left(2, \frac{3}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 2 \times 2 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} = 0$,

所以 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 的夹角为 90° .

题组B 高考通关测试

正文 P124

- 1 C 【解析】由 $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = 2$,得 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 2$,即 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3$,故 $\cos \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{1}{2}$,则向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,故选C.

- 2 B 【解析】设 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$,由 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$,得 $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ①. 由 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$,得 $5x + 2y = 0$ ②. 联立①②,解得 $x = -2, y = 5$ 或 $x = 2, y = -5$. 故 $\overrightarrow{AB} = (-2, 5)$ 或 $\overrightarrow{AB} = (2, -5)$.

- 3 D 【解析】 $\because |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|, \therefore \overrightarrow{a}^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2 = \overrightarrow{a}^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2, \therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. 又 $\because |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 2|\overrightarrow{a}|, \therefore |\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = 4|\overrightarrow{a}|^2, \therefore |\overrightarrow{b}|^2 = 3|\overrightarrow{a}|^2$.

设 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ 的夹角为 θ ,则 $\cos \theta = \frac{(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|} = \frac{|\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{b}|^2}{4|\overrightarrow{a}|^2} = \frac{-2|\overrightarrow{a}|^2}{4|\overrightarrow{a}|^2} = -\frac{1}{2}$. 又 $\because \theta \in [0, \pi], \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$.

- 4 B 【解析】 $|\overrightarrow{a}| = 2|\overrightarrow{b}| \neq 0$,且关于 x 的方程 $x^2 + |\overrightarrow{a}|x + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ 有实根,则 $|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \geq 0$. 设向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的夹角为 θ ,所以

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|} \leq \frac{\frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2} = \frac{1}{2}, \text{所以 } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]. \text{ 故选B.}$$

- 5 A 【解析】设正六边形的边长是1,则 $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = 1 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = \frac{3}{2}; \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 1; \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_5} = 1 \times$

$$\sqrt{3} \times \cos 90^\circ = 0; \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_6} = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

6 $\frac{1}{2}$ 【解析】由题意可得 $a \cdot b - b \cdot c - c \cdot a = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ - 1 \times 1 \times \cos 120^\circ - 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

7 5 【解析】由 $a+b+c=0, a \perp b, |a|=1, |b|=2$, 得 $|c|^2 = c^2 = (-a-b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 1^2 + 0 + 2^2 = 5$.

8 120° 【解析】 $\therefore \begin{cases} |a| \cos \theta = -3, \\ |b| \cos \theta = -\frac{3}{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{a \cdot b}{|b|} = -3, \\ \frac{a \cdot b}{|a|} = -\frac{3}{2}, \end{cases}$
即 $\begin{cases} \frac{-9}{|b|} = -3, \\ \frac{-9}{|a|} = -\frac{3}{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} |a| = 6, \\ |b| = 3. \end{cases} \therefore \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{-9}{6 \times 3} = -\frac{1}{2}.$
 $\therefore 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \therefore \theta = 120^\circ.$

9 $-\frac{10}{3}$ 【解析】如图,以 B 为原点, BC 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系,则 $B(0,0), E(2, \frac{2}{3}), D(2,2)$. 由 $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB})$ 知 F 为 BC 的中点,故 $\overrightarrow{DF} = (-1, -2)$. 又 $\overrightarrow{BE} = (2, \frac{2}{3}), \therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF} = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

10 解:(1) 因为 $a = (1,0), b = (m,1)$, 且 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,

所以 $a \cdot b = m, |a| = 1, |b| = \sqrt{m^2 + 1}$.

因为 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$, 所以 $\frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} = \cos \frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $m = 1$ 或 $m = -1$ (舍). 所以 $a - 2b = (-1, -2)$,

所以 $|a - 2b| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

(2) 因为 $a + \lambda b = (1 + \lambda, \lambda), a + \lambda b$ 与 b 垂直,

所以 $(a + \lambda b) \cdot b = 0$, 即 $1 + 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$.

11 解:(1) $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}, \therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$.

$\therefore \frac{3}{2}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \therefore \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 60^\circ = 6, \therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$,

$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}), (1 + \lambda)\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$,

$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{1}{1 + \lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\overrightarrow{OB}$.

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{1 + \lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\overrightarrow{OB} \right) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= -\frac{1}{1 + \lambda}\overrightarrow{OA}^2 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\overrightarrow{OB}^2 + \left(\frac{1}{1 + \lambda} - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$= \frac{-16 + 9\lambda + 6 - 6\lambda}{1 + \lambda} = \frac{3\lambda - 10}{1 + \lambda} = 3 - \frac{13}{1 + \lambda}$.

$\therefore \lambda > 0, \therefore 3 - \frac{13}{1 + \lambda} \in (-10, 3)$.

$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $(-10, 3)$.

2.5 平面向量应用举例

题组A 学考通关测试

1 B 【解析】 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x - 2, -2), \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (x - 4, -1), \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (x - 2)(x - 4) + 2 = x^2 - 6x + 10$. 当 $x = -\frac{-6}{2} = 3$ 时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 取得最小值.

2 D 【解析】如图所示,由做功公式可得 $W = |F| |s| \sin \theta$, 故选 D.

3 A 【解析】可设所求直线上任意一点为 $A(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (-1 - x, 2 - y)$. 由题意可知 $2(-1 - x) - (-1) \cdot (2 - y) = 0$, 整理得 $2x + y = 0$. 故选 A.

4 C

5 $\frac{4}{5}$ 【解析】因为 $A(3, 1), B(6, 1), C(4, 3), D$ 为 BC 的中点, 所以 $D(5, 2)$. 又因为 $\overrightarrow{AC} = (1, 2), \overrightarrow{AD} = (2, 1)$, 所以 $\cos \angle CAD = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

6 与水流方向成 135° 角

7 证明: 因为 $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$, 所以 $C(-12, 9), D(6, 15)$. 所以 $\overrightarrow{AB} = (6, 2), \overrightarrow{CD} = (18, 6)$. 所以 $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. 所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. 又因为 AB 与 CD 无公共点, 所以 $AB \parallel CD$.

题组B 高考通关测试

1 C 【解析】设运动 5 s 后点 P 在点 $M(x, y)$ 处, 则 $\overrightarrow{PM} = 5\mathbf{v}$, $\therefore (x, y) = (-10, 10) + 5(4, -3) = (10, -5)$.

2 B 【解析】根据题意得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \right) = -\frac{1}{4}|\overrightarrow{CB}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \cos 135^\circ - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \cos 135^\circ + 2 \times 1 \times \cos 0^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + 2 = 2$.

3 A 【解析】 $f = f_1 + f_2 + f_3 = (3, 4) + (2, -5) + (3, 1) = (8, 0)$, 设合力 f 的终点坐标为 $P(x, y)$, O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + f = (1, 1) + (8, 0) = (9, 1)$, 故选 A.

4 D 【解析】将 $\triangle ABC$ 各边及 PA, PB, PC 均用向量表示, 则 $\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{|PC|^2} = \frac{\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2}{\overrightarrow{PC}^2} = \frac{(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA})^2 + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})^2}{\overrightarrow{PC}^2} = \frac{2|\overrightarrow{PC}|^2 + 2\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + |\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2} - 6 = 16 - 6 = 10$.

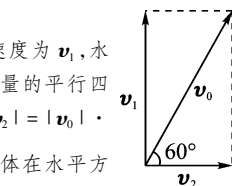
5 C 【解析】 $|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\therefore A$ 是正确的, 同理 B 也是正确的, 对于 D , 可以变形为 $|\overrightarrow{CD}|^2 \cdot |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \cdot |\overrightarrow{BC}|^2$, 通过等面积变换可知正确. 故选 C.

6 $(-5, 1)$ 【解析】 $\therefore F_1 + F_2 + F = 0, \therefore F = -F_1 - F_2 = (-3, -4) + (-2, 5) = (-5, 1)$.

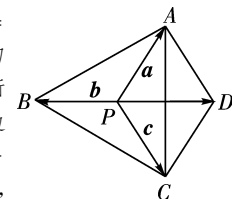
7 5 【解析】设该物体在竖直方向上的速度为 v_1 , 水平方向上的速度为 v_2 , 如图所示, 由向量的平行四边形法则以及直角三角形的知识可知 $|v_2| = |v_0| \cdot \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ (m/s), 所以该物体在水平方向上的速度为 5 m/s.

8 ①③ 【解析】设水的阻力为 f , 绳的拉力为 F, F 与水平方向夹角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 则 $|F| \cos \theta = |f|, \therefore |F| = \frac{|f|}{\cos \theta}$. $\therefore \theta$ 增大, $\cos \theta$ 减小, $|f|$ 不变, $\therefore |F|$ 增大. $\therefore |F| \sin \theta$ 增大, $\therefore$ 船的浮力减小.

9 等边三角形 【解析】由题意得 $|a| = |b| = |c|$, 由于在合力作用下物体做匀速运动, 故合力为 0 , 即 $a + b + c = 0$, 所以 $a + c = -b$. 如图所示, 作平行四边形 $APCD$, 则其为菱形. 因为 $\overrightarrow{PD} = a + c = -b$, 所以 $\angle APC = 120^\circ$. 同理, $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$. 又因为 $|a| =$



第7题图



第9题图

$|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

10 解: (1) 依题意, A 为 MS 的中点, B 为 NS 的中点,

所以 $\overrightarrow{SN} = 2\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SA}$.

所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = 2(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = 2\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

(2) 因为 $|\overrightarrow{MN}| \in [2\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$,

所以 $|\overrightarrow{MN}|^2 \in [12, 28]$.

由 (1) 得 $12 \leq 4(\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 \leq 28$,

所以 $3 \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq 7$,

所以 $3 \leq 4 + 1 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq 7$,

所以 $-1 \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq 1$.

因为 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{2}$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$.

因为 $0 \leq \theta \leq \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$.

11 解: 设 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BA}$, 则 $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

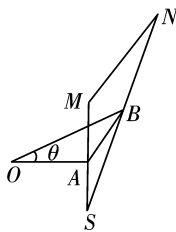
因为 $\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 共线, 所以设 $\overrightarrow{CF} = \mu \overrightarrow{CE}$,

从而 $\lambda \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \mu \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \right) = \frac{2\mu}{5}\overrightarrow{BA} - \frac{3\mu}{5}\overrightarrow{BC}$.

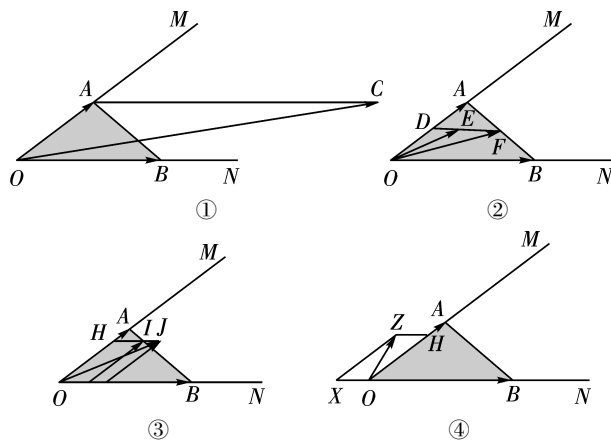
因为 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线, 所以 $\begin{cases} \frac{2\mu}{5} = \lambda, \\ \frac{3\mu}{5} = 1. \end{cases}$ 所以 $\lambda = \frac{2}{3}$.

所以 $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. 所以 $|\overrightarrow{AF}| : |\overrightarrow{FB}| = \frac{1}{2}$.

故 $AF : FB$ 的值为 $\frac{1}{2}$.



第 10 题图



第 9 题图

取 OA 的中点 D , 过 D 作 DE 平行于 ON , 使得 $DE = \frac{1}{3}OB$,

设过 D 且与 ON 平行的直线交 AB 于 F , 则 $DF = \frac{1}{2}OB$.

$\because DE < DF, \therefore E$ 在阴影 $\triangle AOB$ 内, 如图②所示, $\therefore$ ②满足条件;

在 OA 上取点 H , 使得 $OH = \frac{3}{4}OA$, 过 H 作 ON 的平行线交 AB 于

I , 则 $HI = \frac{1}{4}OB < \frac{1}{3}OB$, 故 $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 对应的终点 J 在阴影 $\triangle OAB$ 外, 如图③所示, $\therefore$ ③不满足条件;

同理, $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ 对应的终点在阴影 $\triangle OAB$ 内, $\therefore$ ④满足条件;

$\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ 对应的终点 Z 不在阴影 $\triangle OAB$ 内, 如图④所示,

$\therefore$ ⑤不满足条件.

综上, 满足条件的是②④. 故选 B.

10 D 【解析】由平行四边形法则得 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PO}$, 故 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC}$. 又 $|\overrightarrow{PC}| = 2 - |\overrightarrow{PO}|$, 且 $\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC}$ 反向, 设 $|\overrightarrow{PO}| = t (0 \leq t \leq 2)$, 则 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC} = -2t(2 - t) = 2(t^2 - 2t) = 2[(t - 1)^2 - 1]$. $\because 0 \leq t \leq 2, \therefore$ 当 $t = 1$ 时, $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值 -2 , 故选 D.

11 A 【解析】过点 D 作 $DF \parallel CE$, 交 AB 于点 F .

因为 D 是 BC 的中点, 所以 F 是 BE 的中点.

又 $BE = 2EA$, 所以 $EF = EA$, 从而 $AO =$

OD , 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

又 $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

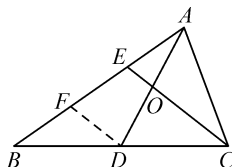
所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = 6 \times \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) =$

$\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$,

所以 $AB^2 = 3AC^2$, 即 $\frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$.

12 B 【解析】 $\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD} = (\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6)\overrightarrow{AB} + (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)\overrightarrow{AD}$, 要使 $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$ 最小, 只需要 $|\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6| = |\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6| = 0$, 此时只需要取 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 1$, 此时 $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|_{\min} = 0$.

又 $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|^2 = |(\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6)\overrightarrow{AB} + (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)\overrightarrow{AD}|^2 = (\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6)^2 + (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)^2 \leq (|\lambda_1| + |\lambda_3| + |\lambda_5 - \lambda_6|)^2 + (|\lambda_2| + |\lambda_4| + |\lambda_5 + \lambda_6|)^2 = (2 + |\lambda_5 - \lambda_6|)^2 + (2 + |\lambda_5 + \lambda_6|)^2 = 8 +$



第 11 题图

第二章 单元复习方案

测评·高考模拟卷

正文 P140

1 C 【解析】利用平行四边形法则作出向量 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, 通过平移即可发现 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{FO}$.

2 C 【解析】 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, 所以 A 不正确; $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, 则 $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$, 所以 B 不正确; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, -1), (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (1, -1) \cdot (1, 1) = 0$, 所以 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 所以 C 正确; 因为 $2 \times 1 - 0 \times 1 = 2 \neq 0$, 所以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不平行, 所以 D 不正确.

3 C 【解析】 $\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -8\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 2\overrightarrow{BC}, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形.

4 B 【解析】由题意可知 $\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ -4 - 2y = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$ 故 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -1), |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10}$.

5 C 【解析】因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $f(x) = (\mathbf{a}x + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 x^2 + |\mathbf{b}|^2$, 所以 $f(x) = (\mathbf{a}x + \mathbf{b})^2$ 是偶函数.

6 A 【解析】由 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 可知 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2, \therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$, 即 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2}$. 又 $0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi, \therefore \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$.

7 C 【解析】A 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$, 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线; B 中, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线; C 中, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \parallel \overrightarrow{AB}$; D 中, $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线. 故选 C.

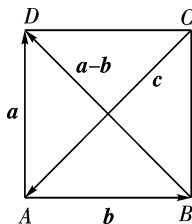
8 B 【解析】对于半径为 1 的圆, 有一个位置正好是三角形的内切圆, 此时只有 3 个交点; 当圆稍右移或进行其他的变化时, 能实现 4 个交点的情况, 但 5 个及 5 个以上的交点不能实现.

9 B 【解析】过 A 作 ON 的平行线 AC , 并且使得 $AC = 2OB$, 根据向量加法的三角形法则, 得到和向量 $\overrightarrow{OC}$ 的终点 C 不在阴影 $\triangle OAB$ 内, 如图所示, $\therefore$ ①不满足条件;

$4(|\lambda_5 - \lambda_6| + |\lambda_5 + \lambda_6|) + (\lambda_5 - \lambda_6)^2 + (\lambda_5 + \lambda_6)^2 = 8 + 4\sqrt{(|\lambda_5 - \lambda_6| + |\lambda_5 + \lambda_6|)^2 + 2(\lambda_5^2 + \lambda_6^2)} = 12 + 4\sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + (\lambda_5 + \lambda_6)^2 + 2|\lambda_5^2 - \lambda_6^2|} = 12 + 4\sqrt{2(\lambda_5^2 + \lambda_6^2) + 2|\lambda_5^2 - \lambda_6^2|} = 20$, 等号成立当且仅当 $\lambda_1, -\lambda_3, \lambda_5 - \lambda_6$ 均非负或者均非正, 并且 $\lambda_2, -\lambda_4, \lambda_5 + \lambda_6$ 均非负或者均非正. 比如 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 1$, 则 $|\lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{BC} + \lambda_3 \vec{CD} + \lambda_4 \vec{DA} + \lambda_5 \vec{AC} + \lambda_6 \vec{BD}|_{\max} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

- 13 $\frac{23}{8}$ 【解析】由题意可得 $(3a + 5b) \cdot (ma - b) = 3ma^2 + (5m - 3)a \cdot b - 5b^2 = 0$, 即 $3m + (5m - 3) \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ - 5 \times 4 = 0$, $8m = 23$. $\therefore m = \frac{23}{8}$.

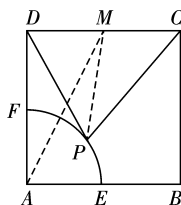
- 14 4 【解析】由于 $a \perp b$, 因此画出以 a, b 为邻边的矩形 $ABCD$, 如图所示, 其中 $\vec{AD} = a$, $\vec{AB} = b$, $\therefore a + b + c = 0$, $\therefore \vec{CA} = c$, $\vec{BD} = a - b$. $\therefore (a - b) \perp c$, $\therefore$ 矩形的两条对角线互相垂直, 则四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore |a| = |b| = 1, |c| = \sqrt{2}$, $\therefore |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 4$.



第 14 题图

- 15 $-4, 2, 1$ (答案不唯一) 【解析】由 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$ 得 $\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0, \\ 2k_1 - k_2 + 10k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -4k_3, k_2 = 2k_3$, 令 $k_3 = c (c \neq 0)$, 则 $k_1 = -4c, k_2 = 2c$, 则可取 $k_1 = -4, k_2 = 2, k_3 = 1$.

- 16 $5 - 2\sqrt{5}$ 【解析】注意到本题中向量 $\vec{PC}$ 与向量 $\vec{PD}$ 的差为定向量, 于是 $4\vec{PC} \cdot \vec{PD} = (\vec{PC} + \vec{PD})^2 - (\vec{PC} - \vec{PD})^2 = (\vec{PC} + \vec{PD})^2 - 4$. 取 CD 的中点 M , 则有 $\vec{PC} \cdot \vec{PD} = \vec{PM}^2 - 1$, 如图所示, 问题转化为求 $\vec{PM}^2 - 1$ 的最小值, 显然当 A, P, M 三点共线时, $\vec{PM}^2 - 1$ 取得最小值 $(\sqrt{5} - 1)^2 - 1 = 5 - 2\sqrt{5}$.



第 16 题图

- 17 解: (1) $\because a = (-3, 2), b = (2, 1), c = (3, -1)$, $\therefore a + tb = (-3, 2) + t(2, 1) = (-3 + 2t, 2 + t)$, $\therefore |a + tb| = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + (2 + t)^2} = \sqrt{5t^2 - 8t + 13} = \sqrt{5(t - \frac{4}{5})^2 + \frac{49}{5}} \geq \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, 当且仅当 $t = \frac{4}{5}$ 时取等号, 故 $|a + tb|$ 的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$. (2) $\because a - tb = (-3, 2) - t(2, 1) = (-3 - 2t, 2 - t)$, 又 $a - tb$ 与 c 共线, $c = (3, -1)$, $\therefore (-3 - 2t) \times (-1) - (2 - t) \times 3 = 0$, 解得 $t = \frac{3}{5}$.

- 18 解: (1) 由题设知 $\vec{AB} = (3, 5), \vec{AC} = (-1, 1)$, 则 $\vec{AB} + \vec{AC} = (2, 6), \vec{AB} - \vec{AC} = (4, 4)$, 所以 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2\sqrt{10}, |\vec{AB} - \vec{AC}| = 4\sqrt{2}$. 故所求的两条对角线的长分别为 $2\sqrt{10}, 4\sqrt{2}$. (2) 由题设知 $\vec{OC} = (-2, -1), \vec{AB} - t\vec{OC} = (3 + 2t, 5 + t)$. 由 $(\vec{AB} - t\vec{OC}) \cdot \vec{OC} = 0$, 得 $(3 + 2t, 5 + t) \cdot (-2, -1) = 0$, 从而 $5t = -11$, 所以 $t = -\frac{11}{5}$.

- 19 解: (1) 由已知得 $\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DM} = \frac{1}{2}a + b$.

连接 AF , $\because \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = a + \frac{1}{3}b$,

$$\therefore \vec{HF} = \vec{HA} + \vec{AF} = -\frac{1}{2}b + \left(a + \frac{1}{3}b\right) = a - \frac{1}{6}b.$$

(2) 由已知得 $a \cdot b = |a||b|\cos 120^\circ = 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$,

$$\text{从而 } \vec{AM} \cdot \vec{HF} = \left(\frac{1}{2}a + b\right) \cdot \left(a - \frac{1}{6}b\right) = \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{11}{12}a \cdot b -$$

$$\frac{1}{6}|b|^2 = \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{11}{12} \times (-6) - \frac{1}{6} \times 4^2 = -\frac{11}{3}.$$

- 20 (1) 解: 连接 OB , 设 $B(x_B, y_B)$, 则 $x_B = |\vec{OA}| + |\vec{AB}| \cdot \cos(\pi - \angle OAB) = \frac{5}{2}, y_B = |\vec{AB}| \cdot \sin(\pi - \angle OAB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1, \sqrt{3}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore B\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

(2) 证明: $\because \vec{OC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore \vec{OC} = 3\vec{AB}$, $\therefore \vec{OC} \parallel \vec{AB}$. 又易知 OA 与 BC 不平行, $|\vec{OA}| = |\vec{BC}| = 2$, $\therefore$ 四边形 $OABC$ 为等腰梯形.

- 21 解: (1) $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = (2e_1 + e_2) + (-e_1 + \lambda e_2) = e_1 + (1 + \lambda)e_2$. $\because A, E, C$ 三点共线, $\therefore$ 存在实数 k , 使得 $\vec{AE} = k\vec{EC}$, 即 $e_1 + (1 + \lambda)e_2 = k(-2e_1 + e_2)$, 得 $(1 + 2k)e_1 = (k - 1 - \lambda)e_2$. $\because e_1, e_2$ 是平面内两个不共线的非零向量,

$$\therefore \begin{cases} 1 + 2k = 0, \\ k - 1 - \lambda = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

(2) $\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC} = (-e_1 - \frac{3}{2}e_2) + (-2e_1 + e_2) = -3e_1 - \frac{1}{2}e_2 = (-6, -3) + (-1, 1) = (-7, -2)$.

(3) $\because A, B, C, D$ 四点按逆时针顺序构成平行四边形, $\therefore \vec{AD} = \vec{BC}$. 设 $A(x, y)$, 则 $\vec{AD} = (3 - x, 5 - y)$. $\because \vec{BC} = (-7, -2)$, $\therefore \begin{cases} 3 - x = -7, \\ 5 - y = -2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 10, \\ y = 7, \end{cases}$ 即点 A 的坐标为 $(10, 7)$.

- 22 解: (1) $a' = (2, 3) - \frac{2 \times (-2 + 9)}{10} \times (-1, 3) = \left(\frac{17}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

(2) 由题意知 $a = (x, y)$, 设 $a' = (x', y')$, 则 $(x', y') = (x, y) - \frac{2}{5}(2x + y)(2, 1) = \left(-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$,

$$\therefore \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \end{cases} \text{ 于是 } \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', \\ y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \end{cases}$$

$$\text{故 } A\left(-\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + B\left(-\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) + C = 0,$$

$$\text{从而 } -\frac{1}{5}(3A + 4B)x' + \frac{1}{5}(-4A + 3B)y' + C = 0.$$

(3) 设 $b = (b_1, b_2)$, 则 $b_1^2 + b_2^2 = 1$.

对任意实数 t , 取 $a = (t, t^2)$,

$$\text{则 } a' = (t, t^2) - 2[(t, t^2) \cdot (b_1, b_2)](b_1, b_2) = (t, t^2) - (2tb_1 + 2t^2b_2)(b_1, b_2) = ((1 - 2b_1^2)t - 2b_1b_2t^2, -2b_1b_2t + (1 - 2b_2^2)t^2).$$

$\therefore a'$ 的终点坐标满足 $y^2 = x$,

$$\therefore [-2b_1b_2t + (1 - 2b_2^2)t^2]^2 = (1 - 2b_1^2)t - 2b_1b_2t^2 \quad ①.$$

由于 t 为任意实数, 比较①式两边 t 的系数得

$$\begin{cases} 1 - 2b_1^2 = 0, \\ 1 - 2b_2^2 = 0, \\ (-2b_1b_2)^2 = -2b_1b_2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{因此 } b = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } b = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

第三章

三角恒等变换

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

题组 A 学考通关测试

正文 P155

- 1 B 【解析】 $\sin \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{12} \right) =$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

2 C 【解析】因为 $2\alpha = (\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)$, 所以 $\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$. 因为 $90^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$, 所以 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$. 因为 $270^\circ < \alpha + \beta < 360^\circ$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$. 所以 $\cos 2\alpha = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}$.

3 C 【解析】因为 $\tan(23^\circ + 97^\circ) = \frac{\tan 23^\circ + \tan 97^\circ}{1 - \tan 23^\circ \cdot \tan 97^\circ} = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, 所以 $\tan 23^\circ + \tan 97^\circ = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\tan 23^\circ \tan 97^\circ$, 所以原式 $= \sqrt{3}\tan 23^\circ \tan 97^\circ - (-\sqrt{3} + \sqrt{3}\tan 23^\circ \tan 97^\circ) = \sqrt{3}$.

4 C 【解析】原式 $= \sqrt{2\cos^2 50^\circ} - \sqrt{2\sin^2 50^\circ} = \sqrt{2}(\cos 50^\circ - \sin 50^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 50^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 50^\circ\right) = 2\sin(45^\circ - 50^\circ) = 2\sin(-5^\circ) = -2\sin 5^\circ$.

5 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】原式 $= \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) = 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 钝角 【解析】由根与系数的关系, 得 $\begin{cases} \tan A + \tan B = \frac{5}{3}, \\ \tan A \tan B = \frac{1}{3}, \end{cases}$ 所以

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}. \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \tan C =$$

$$\tan[\pi - (A+B)] = -\tan(A+B) = -\frac{5}{2} < 0, \text{ 所以 } \angle C \text{ 是钝角, 所以 } \triangle ABC \text{ 是钝角三角形.}$$

7 解: 由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{3}$, 所以 $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

又因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$.

因为 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$,

所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 所以 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

题组B 高考通关测试

正文 P156

1 C 【解析】由题设知 $\sin[(A-B)+B] \geq 1$, $\therefore \sin A \geq 1$, $\therefore \sin A = 1, A = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

2 C 【解析】 $\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{3}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

3 D 【解析】因为 $a \parallel b$, 所以 $3\cos \alpha - 1 \times \sin \alpha = 0$, 所以 $\tan \alpha = 3$, 所以 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 3}{1 - 3^2} = -\frac{3}{4}$, 故选 D.

4 D 【解析】 $\because \sqrt{3}(\tan \alpha \tan \beta + 2) + 2\tan \alpha + 3\tan \beta = 0$, $\therefore \sqrt{3}\tan \alpha \tan \beta + 3(\tan \alpha + \tan \beta) = \tan \alpha - 2\sqrt{3}$ ①.
 $\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore 3(\tan \alpha + \tan \beta) = \sqrt{3}(1 - \tan \alpha \tan \beta)$ ②.

将②代入①, 得 $\sqrt{3} = \tan \alpha - 2\sqrt{3}$, $\therefore \tan \alpha = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

5 C 【解析】先将 $\sin \alpha + 2\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 两边平方, 再同时除以 $\cos^2 \alpha$, 整理得 $3\tan^2 \alpha - 8\tan \alpha - 3 = 0$, 故 $\tan \alpha = 3$ 或 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 代入 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, 得 $\tan 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

6 $\frac{4}{3}$ 【解析】因为 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 3$, 所以 $\sin \alpha - 2\cos \alpha = 0$, 即 $\tan \alpha = 2$, 因此 $\tan(\beta - 2\alpha) = -\tan(2\alpha - \beta) = -\tan(\alpha - \beta + \alpha) = -\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan \alpha} = -\frac{2+2}{1-2 \times 2} = \frac{4}{3}$.

7 3 【解析】 $\frac{1 - \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta} = \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right)}{2\cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)} = \tan \frac{\theta}{2} = 3$.

8 -1 【解析】原式 $= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} \cdot \cos 10^\circ \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - 1\right)$
 $= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} \cdot \cos 10^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$
 $= \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \cos 10^\circ \cdot \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 20^\circ\right)}{\cos 20^\circ}$
 $= \frac{2\cos 10^\circ \cdot \sin(-10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{-\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -1$.

9 $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ 【解析】 $\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \therefore \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0, -\frac{\pi}{4} < -\frac{\beta}{2} < 0.$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\beta}{2} < \pi, -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{又 } \because \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9} < 0, \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3} > 0,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\beta}{2} < \pi, 0 < \frac{\alpha}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)\right]$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{9}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{4\sqrt{5}}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{27}.$$

10 解: (1) 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{故 } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(2) 由(1)知 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{4}{5}$,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{3}{5},$$

所以 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2\alpha + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2\alpha \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) \\
 &= -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}.
 \end{aligned}$$

11 解: (1) 因为 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$,

$$\text{所以 } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

(2) 因为 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, 所以 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$.

$$\text{所以 } \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25},$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } f\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos 2\theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2\theta \cdot \right. \\
 &\left. \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \left[-\frac{7}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{24}{25}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{17}{25}.
 \end{aligned}$$

3.2 简单的三角恒等变换

题组 A 学考通关测试

1 D 【解析】因为 $\frac{5\pi}{2} < \theta < 3\pi$, 所以 $\frac{5\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\sin \frac{\theta}{2} < 0$. 由 $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$, 得 $\sin \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} = -\sqrt{\left(1+\frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$.

2 A 【解析】因为 $\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{7}{5}$.

3 C 【解析】 $\cos 72^\circ - \cos 36^\circ = -2\sin 54^\circ \sin 18^\circ = -2\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ = -\frac{2\cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = -\frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ} = -\frac{1}{2}$.

4 A 【解析】因为 α 是第三象限角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二、四象限角, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$. 因为 $\cos \alpha = \frac{1-\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = -\frac{4}{5}$, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2} = -3$, 所以 $\frac{1+\tan \frac{\alpha}{2}}{1-\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1+(-3)}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$.

5 $\frac{1}{4}$ 【解析】原式 $= \frac{1-\cos 40^\circ}{2} + \frac{1+\cos 160^\circ}{2} + \sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1 + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ - \cos 40^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 100^\circ - \sin 60^\circ) = 1 + \frac{1}{2} \times (-2) \sin 100^\circ \sin 60^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 100^\circ - \frac{3}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 100^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 100^\circ - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

6 $\frac{3}{4}$ 【解析】由题意得 $y = \frac{1}{2} \left[\cos(2x+\pi) + \cos \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x$. 当 $\cos 2x = -1$ 时, $y_{\max} = \frac{3}{4}$.

7 解: 因为 $\sin \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times (-2)}{1+(-2)^2} = -\frac{4}{5}$, $\cos \alpha =$

$$\frac{1-\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-(-2)^2}{1+(-2)^2} = -\frac{3}{5}, \text{ 所以 } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}.$$

题组 B 高考通关测试

正文 P171

1 C 【解析】因为 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$. 故选 C.

2 A 【解析】 $\because f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - \sqrt{3} \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ 是奇函数, $\therefore \varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore f(x) = 2\sin(\omega x + k\pi) (k \in \mathbf{Z})$. 又 $\because$ 奇函数 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 1]$ 内有 9 个零点, $\therefore 2T \leq 1 < \frac{5}{2}T, \therefore 2 \times \frac{2\pi}{\omega} \leq 1 < \frac{5}{2} \times \frac{2\pi}{\omega}, \therefore 4\pi \leq \omega < 5\pi$. 故选 A.

3 A 【解析】原式 $= \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1$. 故选 A.

4 C 【解析】因为 $a \cdot b = \cos 2\alpha + \sin \alpha (2\sin \alpha - 1) = 1 - 2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha = 1 - \sin \alpha = \frac{2}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. 因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 所以 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 所以 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{1}{7}$.

5 B 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图像与 x 轴的两个相邻交点的距离等于 $\frac{\pi}{4}$, $\therefore \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{4}, \therefore \omega = 4$. $\therefore$ 函数 $f(x) = \sin 4x - \sqrt{3} \cos 4x = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$. 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $y = g(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \leq x \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}, k \in \mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时, 可得函数 $g(x)$ 的一个减区间为 $\left(\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right)$.

6 $\tan \frac{x}{2}$ 【解析】原式 $= \frac{2\sin 2x \cos 2x}{2\cos^2 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan \frac{x}{2}$.

7 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ 【解析】 $\Delta = (-8\sin \alpha)^2 - 4 \times 8 \times \cos 2\alpha \leq 0$, 即 $2\sin^2 \alpha - \cos 2\alpha \leq 0$, 所以 $4\sin^2 \alpha \leq 1$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$. 因为 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 所以 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} \leq \alpha \leq \pi$.

8 π 【解析】 $\because f(x) = \sqrt{a+1} \sin[(1-a)x + \varphi] \left(\tan \varphi = \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$, 由

已知得 $\sqrt{a+1}=2$, $\therefore a=3$. $\therefore f(x)=2\sin(-2x+\varphi)$, $\therefore T=\frac{2\pi}{|-2|}=\pi$.

9 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 【解析】方法一: 设 $x=\cos\alpha\cdot\sin\beta$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}+x$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}-x$.

因为 $-1\leq\sin(\alpha+\beta)\leq 1$, $-1\leq\sin(\alpha-\beta)\leq 1$,

所以 $\begin{cases} -1\leq\frac{1}{2}+x\leq 1, \\ -1\leq\frac{1}{2}-x\leq 1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} -\frac{3}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 所以 $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$.

方法二: 设 $x=\cos\alpha\cdot\sin\beta$, 则 $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}x$, 即 $\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta=2x$. 由 $|\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta|\leq 1$, 得 $|2x|\leq 1$, 所以 $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$.

10 解: $f(x)=(-\cos x)\cdot(-\sin x)-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$$\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

(1) $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 1.

(2) 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$), 解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leq$

$x\leq k\pi+\frac{5}{12}\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). 又因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$

上单调递增, 即 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调递增区间是

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right].$$

11 解: (1) 因为 $f(x)=2\sin x\cos x+1-2\sin^2x=\sin 2x+\cos 2x=$

$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

(2) 因为 $-\frac{\pi}{3}\leq x\leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{5\pi}{12}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq \frac{3\pi}{4}$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$;

当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{12}$, 即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时,

$$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2},$$

即 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$.

第三章 单元复习方案

测评·高考模拟卷 $\rightarrow$ 正文 P179

1 A 【解析】由已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, 且 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, 故 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$. 故选 A.

2 A 【解析】 $\because \alpha$ 为锐角, $\therefore \frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$.

$$\text{又} \because \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}, \therefore \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{4}{5}.$$

$$\text{当} \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5} \text{ 时, } \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-$$

$$\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}<0, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

$$\text{当} \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5} \text{ 时, } \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}>0, \text{ 满足题意.}$$

综上, $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. 故选 A.

3 A 【解析】 $\because \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{2}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$, $\therefore \tan\alpha=3$, $\therefore \cos 2\alpha=$

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}. \text{ 故选 A.}$$

4 C 【解析】 $\because \theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=$

$$-\frac{4}{5}, \therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}, \therefore \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{1}{7}.$$

故选 C.

5 B 【解析】 $\because \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\cos(2\pi-\theta)$, $\therefore \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4\cos\theta$. 又

$$\because |\theta|<\frac{\pi}{2}, \therefore \cos\theta>0, \therefore \sin\theta=\frac{1}{4}, \therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4}, \therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{15}}{15}. \therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{15}}{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)^2}=$$

$$\frac{\sqrt{15}}{7}. \text{ 故选 B.}$$

6 D 【解析】因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$, 由题

意可得 $\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的一个周期, 所以 $k\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$, 即 $\omega=8k$, $k\in\mathbf{Z}$, 结合选项可得 D 正确.

7 A 【解析】 $\because \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\right.$

$$\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\left]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

故选 A.

8 A 【解析】由已知, 得 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot$

$$\cos\beta=\frac{1}{4}, (\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{9}.$$

两式相加得 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}$, $\therefore \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot$

$$\sin\beta=\frac{59}{72}, \therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{59}{72}. \text{ 故选 A.}$$

9 C 【解析】 $\because \tan\alpha, \frac{1}{\tan\alpha}$ 是关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2-3=0$ 的

两个实根, $\therefore \tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=k$, $\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}=k^2-3=1$. $\therefore 3\pi<$

$$\alpha<\frac{7}{2}\pi, \therefore k>0. \therefore k=2. \text{ 解得 } \tan\alpha=1, \therefore \alpha=3\pi+\frac{\pi}{4}, \therefore \cos\alpha=$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \cos\alpha+\sin\alpha=-\sqrt{2}. \text{ 故选 C.}$$

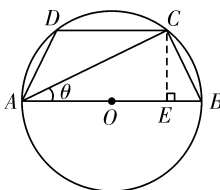
10 A 【解析】连接 AC, 过 C 作 $CE\perp AB$,

垂足为点 E, 设 $\angle CAB=\theta$, 如图所示, 因为

AB 为直径且长为 6, 所以 $BC=6\sin\theta$, $BE=6\sin^2\theta$. 由题意可知四边形

ABCD 为等腰梯形, 故其周长为 $y=6+$

$$12\sin\theta+6-12\sin^2\theta=12\left(1+\sin\theta-\sin^2\theta\right)=-12\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+15, \text{ 所以}$$



第 10 题图

当 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 时, 四边形 $ABCD$ 的周长取到最大值 15。

11 D 【解析】取特殊值检验。例如: 令 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 和 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$,

求 $\tan \beta$ 是否存在(考试中, 有解时则认为存在, 取多组解时发现没有解, 则可认为不存在)。

12 D 【解析】① $\because \tan A + \tan B = \tan(A+B)(1 - \tan A \tan B)$,
 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan(A+B)(1 - \tan A \tan B) + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 。

若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 可得 $\tan A \tan B \tan C < 0$ 。故①错误。

② $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore A+B > 90^\circ, B > 90^\circ - A, \therefore \cos B < \sin A, \sin B > \cos A$ 。
 $\therefore \cos B - \sin A < 0, \sin B - \cos A > 0$,
 $\therefore \cos B - \sin A < \sin B - \cos A, \therefore \cos A + \cos B < \sin A + \sin B$ 。故②错误。

③ 当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan B$ 不存在, 故③错误。

④ 由 $\tan C = \frac{3}{4}$ 得 $0^\circ < C < 90^\circ$ 。 $\therefore \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{4} < 1 = \tan 45^\circ$, 正切函数在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 上为增函数, $\therefore 30^\circ < C < 45^\circ$ 。

又 $\because \sin B = \frac{2}{5}, \therefore 0^\circ < B < 180^\circ$ 。

当 $0^\circ < B < 90^\circ$ 时, $\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2} > \frac{2}{5}$, 正弦函数在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 上为增函数, $\therefore 0^\circ < B < 30^\circ$;

当 $90^\circ < B < 180^\circ$ 时, $\therefore \sin 150^\circ = \frac{1}{2} > \frac{2}{5}$, 正弦函数在 $(90^\circ, 180^\circ)$ 上为减函数, $\therefore B > 150^\circ, \therefore B+C > 180^\circ$, 与 B, C 为三角形的内角矛盾, 不成立。 $\therefore 0^\circ < B < 30^\circ$ 。

由 B 和 C 的取值范围得到 A 为钝角, $\therefore A > C > B$, 故④正确。故选 D。

13 $\frac{1}{2}$ 【解析】 $\sin 135^\circ \cos(-15^\circ) + \cos 225^\circ \sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。

14 $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】 $\because (\tan \alpha - 1)(\tan \beta - 1) = 2, \therefore \tan \alpha + \tan \beta + 1 = \tan \alpha \tan \beta, \therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1$ 。 $\therefore \alpha, \beta$ 都是锐角, $\therefore \alpha + \beta \in (0, \pi), \therefore \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ 。

15 $\frac{\pi}{2}$ 【解析】 $\because f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{2} = -\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2}, \therefore T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 。

16 3 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, 函数 $g(x) = \sqrt{3} \sin 2x, \therefore f(x) - g(x) = 1 - \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 1 = -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$ 。

若直线 $x = a$ 与函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像分别交于 M, N 两点,

则 $|MN| = |f(a) - g(a)| = \left| -2 \sin \left(2a + \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right| \leq |2 + 1| = 3$, $\therefore |MN|$ 的最大值为 3。

17 解: (1) 由 $\sin \beta = \frac{3}{5}, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, 得 $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{4}{5}$ 。

由 $\tan \alpha = 2$, 得 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$ 。

(2) 由 (1) 得, $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ 。

又 $\because \tan 2\alpha = -\frac{4}{3}, \therefore \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} =$

$$\frac{-\frac{4}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{7}{24}。$$

18 解: (1) $f(x) = 2 \sin x \cos x + \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \right.$

$$\left. \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)。$$

$\therefore$ 当 $2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x = k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 且最大值为 $\sqrt{2}$ 。

$$(2) \text{方法一: } \because f\left(\theta + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \therefore \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}。$$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{1}{3}。 \because \theta \text{ 为锐角, 即 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < 2\theta < \pi。$$

$$\therefore \sin 2\theta = \sqrt{1 - \cos^2 2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}。$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2\sqrt{2}, \therefore \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2\sqrt{2}。$$

$$\therefore \sqrt{2} \tan^2 \theta + \tan \theta - \sqrt{2} = 0。 \therefore (\sqrt{2} \tan \theta - 1)(\tan \theta + \sqrt{2}) = 0。$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } \tan \theta = -\sqrt{2} \text{ (不合题意, 舍去)}, \therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$\text{方法二: } \because f\left(\theta + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \therefore \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}。$$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{1}{3}, \therefore 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{1}{3}。$$

$$\because \theta \text{ 为锐角, 即 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}。$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}。 \therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

19 证明: $\because \sin(2\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) + \alpha]$

$$= \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha,$$

$$\therefore \sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin \beta。$$

$$\therefore \sin(2\alpha + \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha + \sin \beta。 \text{等式得证。}$$

20 解: (1) $\because m \parallel n, \therefore a \cos B = b \cos A$ 。

由正弦定理, 得 $\sin A \cos B = \sin B \cos A, \therefore \sin(A - B) = 0$ 。

又 $-\pi < A - B < \pi, \therefore A = B$ 。

$$\text{而 } p^2 = |p|^2 = 8 \sin^2 \frac{B+C}{2} + 4 \sin^2 A = 9,$$

$$\therefore 8 \cos^2 \frac{A}{2} + 4 \sin^2 A = 9,$$

$$\therefore 4(1 + \cos A) + 4(1 - \cos^2 A) = 9,$$

$$\therefore 4 \cos^2 A - 4 \cos A + 1 = 0,$$

$$\therefore (2 \cos A - 1)^2 = 0, \therefore \cos A = \frac{1}{2}。$$

$$\text{又 } 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore A = B = C = \frac{\pi}{3}。$$

$$(2) \text{由题意得 } f(x) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \therefore x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$\therefore x = 0 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f(0) = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1。$$

21 解: (1) 因为 $\sin 2A = \sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} + A \right)$, 所以 $2 \sin A \cos A = \sqrt{3} \cos A$,

$$\text{即 } (2 \sin A - \sqrt{3}) \cos A = 0。$$

又因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$,故 $\cos A > 0$,

所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 因为 $A + B + C = \pi$,所以 $\sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C)$,
即 $\sin B = \sin(A + C)$ 。

所以 $\sin B + \sin C = \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) + \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{3}{2}\sin C = \sqrt{3}\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

因为在锐角三角形 ABC 中, $A = \frac{\pi}{3}$,所以 $B + C = \frac{2\pi}{3}$, $B = \frac{2\pi}{3} - C$,

所以 $\begin{cases} 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{3} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi$ 。

由正弦函数的单调性可知, $\sin B + \sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$ 。

22 解:(1) 由题意得 $3\sin B\sin C + \cos B\cos C - \sqrt{3}\sin B\cos C - \sqrt{3}\cos B\sin C = 4\cos B\cos C$,

$\therefore -\sqrt{3}\sin(B + C) = 3\cos(B + C)$,显然 $\cos(B + C) \neq 0$,

$\therefore \tan(B + C) = -\sqrt{3}$ 。

$\therefore B, C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\therefore B + C = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) $p = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2\tan C} + \frac{1}{2}$ 。

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形,且 $A = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}$ 且 $0 < C < \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \frac{1}{2} < p < 2$ 。

$\therefore$ 实数 p 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 。

必修4 模块备考方略

测评·高考模拟卷

正文 P197

1 **B** 【解析】由 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$,得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3 + 2m = 0$,故 $m = \frac{3}{2}$ 。

2 **B** 【解析】原式 $= \frac{\tan 60^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan(60^\circ - 15^\circ) = \tan 45^\circ = 1$ 。

3 **B** 【解析】 $\because \sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$, $\therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\cos \theta = \sin^2 \theta = \frac{16}{9}$, $\therefore 2\cos \theta \sin \theta = \frac{7}{9}$, $\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$ 。
又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore \sin \theta < \cos \theta$, $\therefore \sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

4 **A** 【解析】因为 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$,所以 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$,所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$ 。

5 **D** 【解析】由题意得 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,A 错误;
 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos 2x + 1$ 为偶函数,B 错误;将 $f(x)$ 的图像上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,再向上平移1个单位长度后得到

函数 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$, $g(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 2\right)$ 对称,

C 错误; $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增,D 正确,选 D。

6 **B** 【解析】由题意得向量 $3a, 4b, 5c$ 首尾相接能组成三角形,又 $|a| = |b| = |c| = 1$,所以三角形的三边长分别是3,4,5,故该三角形为直角三角形,且 $a \perp b$,所以 $a \cdot (b + c) = a \cdot c = -\frac{3}{5}$ 。

7 **D** 【解析】将函数 $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$)的图像向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后,得到函数 $y_1 = 2\sin\left(x + m + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$)的图像,由题意知平移后的函数为奇函数,所以 $m + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,所以 $m = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ 。又 $m > 0$,所以 m 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$ 。

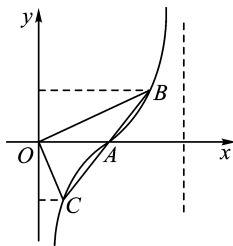
8 **A** 【解析】由题意可知以 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 对应线段为一组邻边可构造边长为1的菱形,且 $\vec{OA} + \vec{OB}, \vec{OA} - \vec{OB}$ 对应线段为菱形的对角线,又 θ 角为锐角,所以B, C, D 正确, A 不正确。

9 **C** 【解析】由题意得 $g(x) = \cos x$,令 $F(x) = |f(x) - g(x)|$,所以 $F(x) = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$,当 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,即 $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $F(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$,所以 $|MN|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ 。

10 **C** 【解析】由向量数量积的定义知 $\vec{AB} \cdot \vec{AP}_i = |\vec{AB}| |\vec{AP}_i| \cdot \cos \angle P_iAB$ ($i = 1, 2, \dots, 7$),记为 m ,从题图中可看出,对于 P_2, P_5 , $m = 0$;对于 P_1, P_3, P_6 , $m = 2$;对于 P_4, P_7 , $m = 4$,故 $\vec{AB} \cdot \vec{AP}_i$ 不同值的个数为3。

11 **C** 【解析】由图像可知,函数的振幅为2,初相为0,周期为8,即 $A = 2, \varphi = 0, \frac{2\pi}{\omega} = 8, \omega = \frac{\pi}{4}$,从而 $f(x) = 2\sin \frac{\pi}{4}x$, $\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(11) = f(1) + f(2) + f(3) = 2\sin \frac{\pi}{4} + 2\sin \frac{\pi}{2} + 2\sin \frac{3\pi}{4} = 2 + 2\sqrt{2}$ 。

12 **A** 【解析】 $\because$ 函数的图像与 x 轴交于点A, $\therefore$ 令 $\frac{\pi x}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,解得 $x = 4k, k \in \mathbf{Z}$ 。又 $x \in (2, 6)$, $\therefore k = 1, x = 4$, $\therefore A(4, 0)$ 。 $\because$ 过点A的直线与函数的图像交于B, C 两点,设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,且B, C 两点关于点A对称,即 $x_1 + x_2 = 8, y_1 + y_2 = 0$,如图,又 $\vec{OA} = (4, 0), \vec{OB} + \vec{OC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (8, 0)$, $\therefore (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{OA} = 32$ 。故选 A。



第12题图

13 **2** $\frac{\pi}{3}$ 【解析】函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像的对称轴完全相同,则两个函数的最小正周期完全相同,所以 $\omega = 2$ 。此时 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)个单位长度所得图像对应的函数是偶函数,即 $y = f(x + \varphi) = 3\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数,则 $2\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,则 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,所以 $k = 0$,此时 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 。

14 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 【解析】因为 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$,所

以 $f\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

15 7 【解析】由 $\sin 2x = \cos x$ 可得 $2\sin x \cos x = \cos x$, 则 $\cos x = 0$ 或 $\sin x = \frac{1}{2}$. 又 $x \in [0, 3\pi]$, 则 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ 或 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$, 故所求交点个数是 7.

16 2 【解析】因为 $\frac{|x|}{|b|} = \frac{|x|}{\sqrt{(xe_1 + ye_2)^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xye_1 \cdot e_2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \leq 2$, 当且仅当 $\frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取“=”, 所以 $\frac{|x|}{|b|}$ 的最大值为 2.

17 解: (1) 原式 $= \frac{4\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{4 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$.

(2) 原式 $= \frac{\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{3}{5}$.

18 解: (1) 若 A, B, C 三点共线, 则存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB}$, 即 $\frac{1}{3}(a + b) = \lambda a + (1 - \lambda)b$, 则 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}, \\ (1 - \lambda)t = \frac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 故 $t = \frac{1}{2}$ 时, A, B, C 三点共线.

(2) $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, 则 $|a - xb|^2 = a^2 + x^2 \cdot b^2 - 2xa \cdot b = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,

因为 $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, 所以当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $|a - xb|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $|a - xb|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$,

所以 $|a - xb|$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$.

19 解: (1) 由 $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$,

得 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

(2) 由 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ 与 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 得

$f(x) = -\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π .

由正弦函数的性质得 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

20 解: (1) $\because f(x) = \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{4}\sin 2x + \sin \frac{\pi}{4}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore f(x)$ 的最大值为 2, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore f\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

又 α 是第二象限的角,

$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{13}}{4}$,

$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{39}}{8}$.

21 解: (1) 方法一: 依题意得 $A = 40, h = 50, T = 3$, 由 $\frac{2\pi}{\omega} = 3$ 得 $\omega =$

$\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(t) = 40\sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \varphi\right) + 50$.

又 $f(0) = 10$, 所以 $\sin \varphi = -1$. 又 $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

所以 $f(t) = 40\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + 50 (t \geq 0)$,

所以 $f(2016) = 40\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 2016 - \frac{\pi}{2}\right) + 50 = 10$,

所以 $t = 2016$ 时, 点 P 距离地面的高度为 10 m.

方法二: $2016 = 3 \times 672$, 故 $t = 2016$ 时点 P 所在的位置与 $t = 0$ 时点 P 所在的位置相同, 即在起始位置, 所以 $t = 2016$ 时, 点 P 距离地面的高度为 10 m.

(2) 由 (1) 知 $f(t) = 40\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + 50 = 50 - 40\cos \frac{2\pi}{3}t (t \geq 0)$.

令 $f(t) > 50 + 20\sqrt{3}$, 即 $\cos \frac{2\pi}{3}t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

从而 $2k\pi + \frac{5\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}t < 2k\pi + \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbf{N})$,

$\therefore 3k + \frac{5}{4} < t < 3k + \frac{7}{4} (k \in \mathbf{N})$.

$\therefore 3k + \frac{7}{4} - \left(3k + \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} = 0.5 (k \in \mathbf{N})$,

$\therefore$ 摩天轮转一圈的过程中在点 P 处有 0.5 min 的时间可以看到公园的全貌.

22 解: (1) 因为 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \omega x - \frac{1}{2}\cos \omega x - \cos \omega x$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \omega x - \frac{3}{2}\cos \omega x$

$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x\right)$

$= \sqrt{3}\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$.

由题设知 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 所以 $\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

故 $\omega = 6k + 2, k \in \mathbf{Z}$. 又 $0 < \omega < 3$, 所以 $\omega = 2$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $g(x) = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$.

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 所以 $x - \frac{\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

所以当 $x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.